

Lehrstuhl und Prüfamnt  
für  
Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik  
der Technischen Universität München

Schriftenreihe  
Heft 8

# **Ein stochastisches Bodenmodell für geotechnische Aufgaben**

von  
Dirk Alber

München, 1987

---

Herausgegeben von  
Prof. Dr.-Ing. Rudolf Floss  
Ordinarius für Grundbau, Bodenmechanik  
und Felsmechanik

Eigenverlag: Lehrstuhl und Prüfamf für Grundbau,  
Bodenmechanik und Felsmechanik  
Technische Universität München  
Baumbachstraße 7  
8000 München 60  
Tel.: (089) 8895-200

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK GmbH  
8000 München 2, Gabelsbergerstr. 15, Tel. 28866314

## V O R W O R T

Diese Arbeit entstand als Dissertation während der Bearbeitung eines Forschungsvorhabens des Bundesministers für Forschung und Technologie an der Technischen Universität München im Institut für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik.

Seinem Leiter, Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Floss möchte ich für seine Unterstützung und sein Vertrauen danken, als er mir die Bearbeitung dieser doch etwas abseits des üblichen Bauingenieurwesens liegenden Aufgabe übertrug. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann möchte ich für die bereitwillige Übernahme des Koreferates danken.

Dem Betriebsleiter des Instituts, Herrn v. Soos, sei an dieser Stelle für seine hilfreichen Ratschläge und seine Anregungen gedankt.

Mein Dank gilt auch Herrn Dipl.-Ing. B. Peintinger und Herrn Dipl.-Ing. W. Reitmeier, die in vielzähligen Diskussionen mit wertvollen Hinweisen zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

Dirk Alber



Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
1.1 Literaturrückblick	4
1.2 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit	9
1.3 Bodenkennwerte als Zufallsvariable	10
2. Stochastische Prozesse	15
2.1 Verfahren zur Untersuchung stochastischer Prozesse	17
2.2 Schreibweise und Nomenklatur des BOX-JENKINS-Verfahrens	19
3. Zeitreihenanalyse von Bodeneigenschaften	23
3.1 Zusammenstellung der Ergebnisse von ALBER/REITMEIER (1986)	25
3.2 Weitere Zeitreihen und Autokorrelationsfunktionen aus der Literatur	28
3.3 Schätzwerte für Prozeßparameter	31
4. Theoretische Ergebnisse für den linearen Fall	33
4.1 Autokorrelationsfunktion	39
4.2 Spektrale Dichte des Prozesses	45
4.3 Einfluß des Probenabstandes	47
4.4 Varianzreduktion gleitender Mittelwerte	48
4.5 Wirksamkeit von Stichproben	52
4.6 Vorhersage und Kontrolle	53
4.7 Extremwerte des Prozesses	58
5. Erweiterung auf ebene und räumliche Probleme	61
5.1 Der stationäre autoregressive Prozeß	61
5.2 Die Varianz des instationären Mittelwertprozesses	61
5.3 VANMARCKES Varianzreduktionsfunktion	64
5.4 Autokorrelationsfunktion	64
5.5 Spektrum	67

	<u>Seite</u>
6. Hilfsmittel für die Anwendung	71
6.1 Varianzreduktion bei Mittelung	71
6.2 Anisotrope Baugrundverhältnisse	72
7. Anwendungen auf bodenmechanische Probleme	74
7.1 Grundbruch	74
7.2 Böschungsbruch	77
8. Zusammenfassung	85
9. Anhang	88
9.1 Ableitung der Autokovarianzfunktion des Mittelwertprozesses im $\mathbb{R}^2$	88
9.2 Ableitung der Varianzreduktionsfunktion für Geraden, Rechtecke und Quader	90
10. Literatur	94
 <u>Tabellen:</u>	 99
1. Kurzbeschreibung der untersuchten Zeitreihen	
2. Ergebnisse der Zeitreihenanalysen	
3. Varianzreduktion des AR(1)-Prozesses für Flächen und Quader	

## 1. Einleitung

Die Ermittlung und Vorhersage von Bodenkennwerten durch Versuch und Erfahrung, ihre Beurteilung anhand der jeweiligen Problemstellung zur Festlegung von Rechenwerten und letztlich der Nachweis einer ausreichenden Sicherheit sind die Kernpunkte jeder geotechnischen Untersuchung. Während in der praktischen Arbeit noch die traditionellen deterministischen Verfahren dominieren, brachte die Übernahme der zuverlässigkeitstheoretischen Betrachtungsweise in die geotechnische Forschung umwälzende Neuerungen mit sich. So wird neben dem von den "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen" (1981) und dem "Model Code" geforderten einheitlichen Sicherheitskonzept auch eine wesentlich zutreffendere Idealisierung des Bodens in erdstatischen Berechnungen ermöglicht. Letztere manifestiert sich nun nicht mehr durch eine Reihe von Rechenwerten, sondern in einer statistischen Beschreibung der Bodenkennwerte. Hierzu ist die Kenntnis des Verteilungstyps mit seinen Parametern, der Autokorrelationsstruktur und der deterministischen Trends einer Bodeneigenschaft sowie deren funktionale und stochastische Abhängigkeit von anderen relevanten Kennwerten erforderlich. Das Problem der Beurteilung verschiedener Bodenkennwerte wird in Verbindung mit einer probabilistischen erdstatischen Berechnung gelöst: Als Ergebnis erhält man sowohl den nachzuweisenden Sicherheitsindex, wie auch Wichtungsfaktoren für die einzelnen Bodenkennwerte. Mit diesen Werten können neben der Berechnung von Teilsicherheitsbeiwerten auch sogenannte Ereignisbäume entwickelt werden (vgl. z. B. R.V. WHITMAN, 17th Terzaghi Lecture 1984), die einen wesentlich aufschlußreicherem Einblick in die Zuverlässigkeit von Bauwerken gestatten, als die üblicherweise getrennt voneinander geführten Einzelnachweise. Dieses Verfahren trägt auf quantifizierbare Weise den Beobachtungen Rechnung, daß das Versagen eines Gesamtsystems in den meisten Fällen auf den Ausfall mehrerer seiner Teilsysteme zurückzuführen ist, und ermöglicht mit der Nivellierung des Sicherheitsniveaus innerhalb des Systems den wirtschaftlichen Entwurf zuverlässiger Bauwerke.

Mittlerweile kann die Anwendung der Statistik und der Zuverlässigkeitstheorie im Grundbau schon auf eine gewisse Tradition zurückblicken. Seit den vierziger Jahren wurden im Erd- und Grundbau systematisch statistische Verfahren auf Baukontrollen angewandt (FLOSS, 1968, 1973) und Regressionsrechnungen zwischen den Ergebnissen verschiedener Feld- und Laborversuche durchgeführt.

Man suchte zunächst, die Verteilungstypen zu erkennen, Abhängigkeiten zwischen Mittelwerten, Standardabweichungen und Bodenklassifikationen zu finden und Regressionsgleichungen für Bodenkennwerte aufzustellen. Während sich Normal- und Lognormalverteilung generell als brauchbare Approximationen herausstellten, zeigten sich bei deren Parametern so große Streuungen, daß allenfalls noch die Variationskoeffizienten und einige wenige Regressionsbeziehungen als verallgemeinerbar (vgl. die Zusammenstellungen in HARR (1977), v. SOOS (1980) und ALBER/FLOSS (1983)) betrachtet werden können (Bild 1). Anwendungen dieser Ergebnisse in der Zuverlässigkeitstheorie wurden in größerem Umfang während der internationalen Konferenzen über die Anwendung von Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Grund- und konstruktiven Ingenieurbau (ICASP, 1971, 1975, 1979 und 1983) vorgestellt. Als größtes Problem zeigte sich dabei nicht die Schätzung von Mittelwerten und Standardabweichungen, welche aufgrund von Erfahrungen in Verbindung mit Stichproben geringen Umfanges ausreichend genau möglich ist, sondern die Autokorrelationsstruktur, über die bisher a priori wenig bekannt ist. Nachdem von Herrn Dipl.-Ing. Reitmeier und dem Verfasser im Rahmen verschiedener Forschungsprojekte am Institut für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik unter der Leitung von Herrn Prof. Dr.-Ing. Floss umfangreiche systematische Untersuchungen der Autokorrelationseigenschaften verschiedener Böden vorgenommen wurden (ALBER, REITMEIER, 1986), ergab sich die Notwendigkeit einer theoretischen Aufarbeitung und Interpretation der Versuchsergebnisse.

Bild 1 A-priori-Schätzwerte von Variationskoeffizienten V (%)

BODENART		$\sigma_{\text{tan}}$	$c'$	$c_u$	$q_u$	$w_n$	$n$	$ea$	$S_r$	$C_c$	$\delta_{\text{sd}}$	$S_{pr}$	$w_{opt}$	$D_{pr}$	$E_s$	$E_{v2}$	$k$	$w_p$	$w_l$	
KIES	KIES + SAND	6 13					10 19	13 30						3 6						
	GROB-SAND	7 10	(76)			(15)	(10)	(19)									(120)			
SAND	MITTEL-SAND	9 14	(86)			(14)	9 10	(18)						(2)			(150)			
	FEIN-SAND	7 14	(71)		(200)	(21)	8 11	(13)									(160)			
SCHLUFF	SAND + SCHLUFF	(14)					22 23													
	SCHLUFF	10 20	26 66		(130)		13 15	(22)								23 25	(300)			
TON	SCHLUFF + TON	7 29	26 31		40 49	30 46	10 15	17 32	9 19	25 47	(10)			(4)	21 40			(21)	(20)	
	LEICHT PLAST.	10 19	22 55	10	30	6	(21)	15	9	25	(3)						(10)	(6)		
	MITTEL PLAST.	10 26	(41)	25	40	14	(26)	21	10	39	(12)			(5)	(30)		(160)	(13)	(7)	
	AUSGEPR. PLAST.	10 20	15 56	63	51	100	(14)	32	13	52	(2)							(15)	(10)	
DÄMME	STRASSE				(37)						3	2	1	2		31		10	10	
	STAUD. KERN			17																
	STAUD. FILTER			23							5	5	2	5						

LEGENDE: (.) NUR EIN WERT ANGEGEBEN; | SPANNWEITE DER WERTE — MITTELWERT  
 - IN VERÖFFENTLICHUNGEN EMPFOHLENE WERTE

## 1.1 Literaturrückblick

Die Behandlung von Bodenkennwerten als Zufallsvariable wurde zuerst im Bereich des Straßen- und Dammbaus vorgenommen. Die Prüfung und Abnahme großer Erdbaulose stellt hohe Anforderungen an Aussagefähigkeit und Aufwand von Versuchen. So wurde während der fünfziger und sechziger Jahre eine Vielzahl von Untersuchungen mit dem Ziel durchgeführt, anhand rasch zu bestimmender Kenngrößen wie Dichte, Wassergehalt, Plastizität, Kornverteilung oder Verformungsmodul Aussagen über die nur mit hohem Aufwand zu ermittelnden Berechnungsgrößen wie z. B. Scherfestigkeit, Steifemodul oder Durchlässigkeit zu gewinnen. Anhand von Regressionsbeziehungen konnten diese Abhängigkeiten quantitativ beschrieben werden (FLOSS, 1970; SCHULTZE, 1968), doch zeigte es sich, daß die Regressionsparameter von Boden zu Boden - selbst innerhalb einer Klasse - verschieden waren, und daß allgemein formulierte funktionale Abhängigkeiten mit großen Unschärfen behaftet sind.

Im Gegensatz hierzu konnte sich bei Baukontrollen im Erdbau nur selten ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept durchsetzen. Zwar wurden bei wissenschaftlichen Untersuchungen (z. B. AASHO Road Test, 1962; SHERMAN/WATKINS/PRYSOCK, 1967; u.a.) statistische Verfahren benutzt, doch ist in der Praxis aus Zeit- und Kostengründen der Stichprobenumfang einzelner Lose viel zu gering, um mit üblichen Statistiken zu arbeiten (FLOSS, 1973). Ein Hilfsmittel wäre das sogenannte Bayesverfahren, das die Möglichkeit bietet, subjektive Erfahrungen zu quantifizieren und als priori-Information einer Stichprobe beizufügen (ALBER/FLOSS, 1984; HANISCH/STRUCK, 1985), doch ist es zur Zeit unter möglichen Anwendern weder weit genug bekannt, noch wird es allgemein akzeptiert.

Während sich noch Bodenmechanik und Erdbau der einfachen und leicht zugänglichen Verfahren der beschreibenden und beurteilenden Statistik bedienten, entstand die statistische Sicherheitstheorie, basierend

auf den bahnbrechenden Arbeiten von FREUDENTHAL (1947, 1956), die durch die Formulierung der operativen Versagenswahrscheinlichkeit von HASOFER/LIND (1974) verallgemeinert und praktisch anwendbar gemacht wurde.

Eine Darstellung der Möglichkeiten der Statistik im Bereich des gesamten Bauwesens enthalten die Lehrbücher von BENJAMIN/CORNELL (1979) und ANG/TANG (1984).

Eingang in die Geotechnik fand diese Entwicklung durch die Arbeiten von LUMB (1966, 1970) mit einer systematischen Untersuchung der Streuung von Bodenkennwerten, der Interpretation der Sicherheit als Versagenswahrscheinlichkeit und der Untersuchung der räumlichen Streuung von Bodenkennwerten mit Hilfe der Autokorrelationseigenschaften. Durch die von ihm initiierten Internationalen Konferenzen über die Anwendung von Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Grund- und Ingenieurbau (ICASP) wurde eine stürmische Entwicklung der statistischen Sicherheitstheorie innerhalb der Geotechnik eingeleitet.

Ein unbestreitbarer Vorteil dieses Sicherheitskonzepts ist die Äquivalenz seiner Ergebnisse: Eine operative Versagenswahrscheinlichkeit von z. B.  $10^{-6}$  für Grundbruch und Böschungsbruch ist aussagekräftiger und vergleichbarer als die entsprechenden deterministischen Sicherheiten von 2 und 1,3. Es bot sich daher an, die geplante Vereinheitlichung der Normung auf nationaler und internationaler Ebene auf der Grundlage des statistischen Sicherheitskonzepts durchzuführen (Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für Bauliche Anlagen, 1981; General Principles on Reliability for Structural Design, 1976; CEB-Bulletin Nr. 112, 1976).

In den "Grundlagen" sind Regeln für stochastische Nachweise genannt. Anhand von umfangreichen Berechnungen der Stufe II in der Formulierung von HASOFER/LIND können für beliebige Probleme Einflußwerte für

Kennwerte errechnet werden. Können Einwirkungen und Widerstände getrennt werden, und sind ihre Verteilungen unveränderlich, dann können aus den Einflußwerten Partialsicherheitsbeiwerte ermittelt werden, die den einfach zu führenden Nachweisen der Stufe I zugrunde gelegt werden können.

Zur Zeit wird versucht, ein stochastisches Bodenmodell zu entwickeln, priori-Informationen über die Parameter zusammenzustellen und für die Normung Partialsicherheitsbeiwerte abzuschätzen. Diese Arbeiten fanden ihren Ausgangspunkt in der Spezialsitzung "Sicherheit im Grundbau" bei der Baugrundtagung 1982 in Braunschweig. Hier wurden erstmals in geschlossener Form die Vorteile und Möglichkeiten des statistischen Sicherheitskonzepts einer breiteren deutschen Fachöffentlichkeit vorgestellt. V. SOOS (1982) erläutert die Grundlagen zur Ermittlung von Bodenkennwerten mit Berücksichtigung von Streuung und Korrelationen. Neben statistischen Definitionen werden wertvolle Hinweise auf die bodenmechanische Betrachtungsweise von Grundgesamtheit und Einzelwerten sowie über ihre Streuungen, Korrelationen und die Größenordnung von Versuchsfehlern gegeben. PEINTINGER (1982) erläutert den Einfluß der Autokorrelation, d.i. die gegenseitige statistische Abhängigkeit von Bodenkennwerten, meist nur eine Funktion ihres räumlichen Abstands, und RACKWITZ (1982) zeigt, wie mit Hilfe des Bayes-Verfahrens Vorinformationen, z. B. durch Klassifikation, in die Schätzung von Verteilungsparametern einfließen können. POTTHARST (1982) führt am Beispiel des Grundbruchs für ein quadratisches, vertikal zentrisch belastetes Fundament in nichtbindigem Boden eine statistische Sicherheitsanalyse durch und gibt abschließend für dieses Beispiel Partialsicherheitsbeiwerte an. GÄSSLER (1982) erläutert das Zusammenspiel von physikalischem Modell und Versagenswahrscheinlichkeit anhand vernagelter Wände. MEYERHOF (1982) vergleicht globale und partielle Sicherheitsdefinitionen und errechnet hieraus die Zuverlässigkeit im Erd- und Grundbau. Diesen Artikeln gemeinsam ist das Fehlen eines allgemein akzeptierten stochastischen Bodenmodells, das als Grundlage für sämtliche Berechnungen dienen kann.

Entsprechendes gilt auch für ein Symposium der ASCE (1984). Neben ausführlichen Berichten zum Stand der Technik wurden Anwendungen anhand von Fallstudien dargestellt. Zwar werden die theoretischen und praktischen Vorteile des statistischen Konzepts gezeigt, doch ist auch hier kein allgemeines Modell zugrunde gelegt, das für eine spezifische Problemstellung dann begründet vereinfacht werden könnte, beispielsweise wie die Elastizitätstheorie bei statischen Problemstellungen.

Die größte Schwierigkeit eines statistischen Sicherheitskonzepts der Geotechnik liegt in den von Baustelle zu Baustelle wechselnden Eigenschaften des Bodens. Da sowohl Mittelwert wie Varianz von Bodenkennwerten in weiten Grenzen streuen können, dazu noch die Möglichkeit lokaler Inhomogenitäten und Trends berücksichtigt werden muß und ein zufälliges Streuen einzelner, dicht nebeneinander liegender Proben nicht vorausgesetzt werden kann, sind die Ansprüche an ein stochastisches Modell des Bodens wesentlich höher zu setzen als beispielsweise für die Baustoffe Beton oder Stahl.

Nahezu alle statistischen Sicherheitstheorien basieren heute auf der "Methode der zweiten Momente", d.h. sie erfordern die Kenntnis sämtlicher erster und zweiter Momente, nämlich: Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsfunktion (vgl. z. B. BAECHER/VENEZIANO, 1981). Da dadurch Gauss-Prozesse vollständig beschrieben sind, und alle Bodenkennwerte zumindest näherungsweise auf eine Normalverteilung transformiert werden können, ist eine ausreichende Genauigkeit des Verfahrens gegeben.

Die Schätzung von Mittelwert und Varianz von Bodenkennwerten kann, wie in der Einleitung angesprochen, unter Zuhilfenahme einer Bodenklassifikation mit den daraus resultierenden Größenordnungen des Variationskoeffizienten erfolgen, muß aber an jeder Baustelle erneut vorgenommen werden. Zur Bestimmung der Autokorrelationsstruktur sind jedoch umfangreiche und teure Stichproben ( $N \geq 70$ ) erforderlich.

In vielen Untersuchungen (LUMB, 1974, 1975; ALONZO/KRIZEK 1974; MATSUO/ASAOKA 1977 und anderen), die die Existenz von Autokorrelationen bestätigen, durfte den Bodeneigenschaften ein zufälliges Streuen nicht mehr unterstellt werden. Aber noch ein weiterer Grund erfordert ihre Berücksichtigung. Nur so ist es überhaupt möglich, plausible Versagenswahrscheinlichkeiten zu errechnen. Die Bruchprobleme des Grundbaus setzen stets relativ große Bruchflächen oder -körper voraus. Näherungsweise ist für die Versagenswahrscheinlichkeit der Mittelwert innerhalb dieser Bruchzone und seine Varianz maßgebend. Ohne Autokorrelationsstruktur nähme die Varianz proportional zu  $1/n$  ab, wenn  $n$  die Anzahl der Reverenzvolumen der Bruchzone ist. Da die Größe des Reverenzvolumens näherungsweise der normalen Probengröße von 5 - 8 l entspricht, wäre die Varianz des Bruchzonenmittelwerts üblicher Probleme um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als die Varianz der Einzelproben, d.h. nahezu Null, und eine Versagenswahrscheinlichkeit wäre alleine auf eine Unsicherheit im Mittelwert zurückzuführen. Bei den ersten Arbeiten auf diesem Gebiet (z. B. CORNELL, 1971) wurde nur der ebene Fall untersucht, die Varianzreduktion infolge Mittelung einfach weggelassen und mit der Varianz der Einzelproben gerechnet, um brauchbare Resultate zu erzielen.

Nachdem die Arbeiten von VANMARCKE (1977a,b; 1979) mit ihrer systematischen Untersuchung verschiedener Autokorrelationstypen diese Problematik deutlich machten, wurden räumliche Untersuchungen, meist auf dem Gebiet der Böschungssicherheit, mit plausiblen, aber nie verifizierten Autokorrelationsfunktionen durchgeführt (VANMARCKE, 1977b, PEINTINGER/RACKWITZ, 1980 u.a.). Obwohl PEINTINGER/REITMEIER (1984) ausführen, daß die Kenntnis der Autokorrelationsfunktion gegenüber Informationen über Mittelwert und Varianz von untergeordneter Bedeutung ist, darf ihre Bedeutung nicht unterschätzt, und muß ihre eventuelle Vernachlässigung bei der statistischen Modellierung von Bodeneigenschaften begründet werden.

Durch ALBER/REITMEIER (1986) wurden eine Vielzahl von Aufzeichnungen von Bodenkennwerten untersucht und ausgewertet. Dabei konnte ein stochastisches Modell mit streuenden Parametern gefunden werden, das

eine genügend genaue Beschreibung ermöglichte. Aufgrund seiner Instationarität ist es jedoch nicht direkt in die schon existierenden Rechenverfahren übertragbar.

Um die vollständige Anwendbarkeit der statistischen Sicherheitstheorie in der Geotechnik zu ermöglichen, ist eine mathematische Formulierung des stochastischen Prozesses von Bodenkennwerten in einer Form erforderlich, die eine problemlose Einbindung in die bisher existierenden Rechenverfahren ermöglicht.

## 1.2 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit

Das Vorhaben dieser Arbeit ist es, aufbauend auf den Ergebnissen von ALBER/REITMEIER (1985), den für beliebige Kennwerte verschiedener Böden als Modell angenommenen instationären Prozeß (in der Box-Jenkins-Schreibweise als ARIMA (1,1,1)-Prozeß bezeichnet) theoretisch zu untersuchen und als wissenschaftliche Hypothese zu bestätigen.

Um die Anwendung und die Anwendbarkeit stochastischer Verfahren im Grundbau zu erleichtern und zu vereinfachen, soll die Möglichkeit gegeben werden, a priori Annahmen über die Autokorrelationsstruktur der Böden zu treffen, sowie schnelle und einfache Verfahren zum Beispiel für Mittelung und Korrelation bereitzustellen. Dazu müssen ein Formelapparat bereitgestellt, und für numerische Probleme Lösungen z. B. in Form von Tabellen erarbeitet werden,

Im Rahmen der Themenstellung wird das Hauptaugenmerk auf der Bereitstellung von Hilfsmitteln für Bruchprobleme der Bodenmechanik liegen. Darunter sind z. B. Böschungs- und Grundbruch zu verstehen, also Aufgabenstellungen, für die eine eindeutige Grenzzustandsfunktion existiert.

Daneben sollen als Marginalien einige Fragen der Vorhersage und Kontrolle im Erdbau behandelt werden.

Abschließend wird die Anwendung dieser Hilfsmittel anhand einiger einfacher Beispiele erläutert.

### 1.3 Bodenkennwerte als Zufallsvariable

In der mathematischen Statistik wird als Zufallsvariable eine Funktion bezeichnet, die einem Zufallsexperiment zugeordnet ist, deren Werte reelle Zahlen sind und deren Realisationen mit den Axiomen der Wahrscheinlichkeit in Einklang stehen. Eine Realisation ist ein fester, bestimmbarer Zustand oder Wert, den die Zufallsvariable annimmt, gemessen an einer Probe aus der ihr zugrundeliegenden Menge, der Grundgesamtheit.

Auf der Basis üblicher geotechnischer Aufgabenstellungen sei die Grundgesamtheit eines Bodenkennwerts definiert als Bodenschicht innerhalb der Grenzen des Untersuchungsgebiets, z. B. einer Baustelle. Sie ist aufgrund dieser Begrenzung eine endliche Menge. Da bodenmechanische Untersuchungen stets ein gewissen Probenvolumen benötigen, ist die Zufallsvariable an dessen Größe gebunden. Im Rahmen einer ingenieurmäßigen Betrachtung kann daher die Grundgesamtheit als diskret und abzählbar endlich mit dem Umfang von  $N$  nebeneinanderliegenden Einzelproben betrachtet werden. Da die Eigenschaften sämtlicher Proben von vornherein festliegen, und allenfalls - was hier aber ausgeschlossen sei - noch zeitlichen Veränderungen unterworfen sind, könnte durch eine Totalerhebung die Verteilung der Grundgesamtheit einschließlich aller statistischer Parameter exakt bestimmt werden.

Die Statistik von Bodenkennwerten zielt aufgrund der Problemstellung nicht ab auf die Beurteilung möglicher zukünftiger Realisation. Vielmehr entspricht sie vom Modell her eher der Untersuchung einer Anzahl von verdeckt ausgelegten Karten aus einem gemischten Kartenspiel.

So wenig wie es für das Mischen dieses Kartenspiels und das Auslegen der Karten ein physikalisches Modell gibt, ebensowenig existiert ein

solches für Bodenkennwerte und ihre räumliche Abfolge. Man ist daher genötigt, diesen Zufallsvariablen einen stochastischen Prozeß zu unterstellen und Aussagen aufgrund statistischer Verfahren zu treffen.

Untersucht man die Zuverlässigkeit eines Bodenkennwertes, der aus Versuchen gewonnen wurde, so muß folgenden Fragen nachgegangen werden:

- 1) Sind die Proben repräsentativ oder wurden sie an ausgewählten Stellen entnommen?
- 2) Sind die einzelnen Proben repräsentativ oder ist durch Entnahme, Transport, Lagerung und Einbau in das Versuchsgerät eine Änderung der ursprünglichen Eigenschaften anzunehmen?
- 3) Sind der Versuch selbst und seine Durchführung repräsentativ und der Aufgabenstellung angemessen?

Schätzt man die statistischen Parameter wie Mittelwert, Standardabweichung und Verteilungstyp eines Bodenkennwertes, so müssen alle diese Fragen bejaht werden können, um versuchsfehlerfreie Ergebnisse zu erhalten. Da dies meistens nicht möglich ist, sind die Schätzwerte mit systematischen und zufälligen Fehlern behaftet. Für Versuchsstreuungen von Laborversuchen gibt v. SOOS (1980) Variationskoeffizienten an, während die übrigen Einflüsse im jeweiligen Einzelfall abgeschätzt werden müssen.

Die Angabe von Fraktilwerten setzt die Annahme statistischer Verteilungen der Bodenkennwerte voraus. Üblicherweise wurden Normal-, Lognormal, in seltenen Fällen auch Beta-Verteilungen gewählt. In einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen (SCHULTZE, 1975; LUMB, 1966; RETHATI, 1983, THORNBURN/LARSEN, 1959; SHERMAN, WATKINS, PRY SOCK, 1976 u.a.) wurden Stichproben auf diese Verteilungen hin untersucht, und in der Mehrzahl, auch wegen ihrer Einfachheit, die Normalverteilung empfohlen (Bild 2), die sich bei Variationskoeffizienten unter 30% optisch kaum von der Normalverteilung unterscheidet (Bild 3).

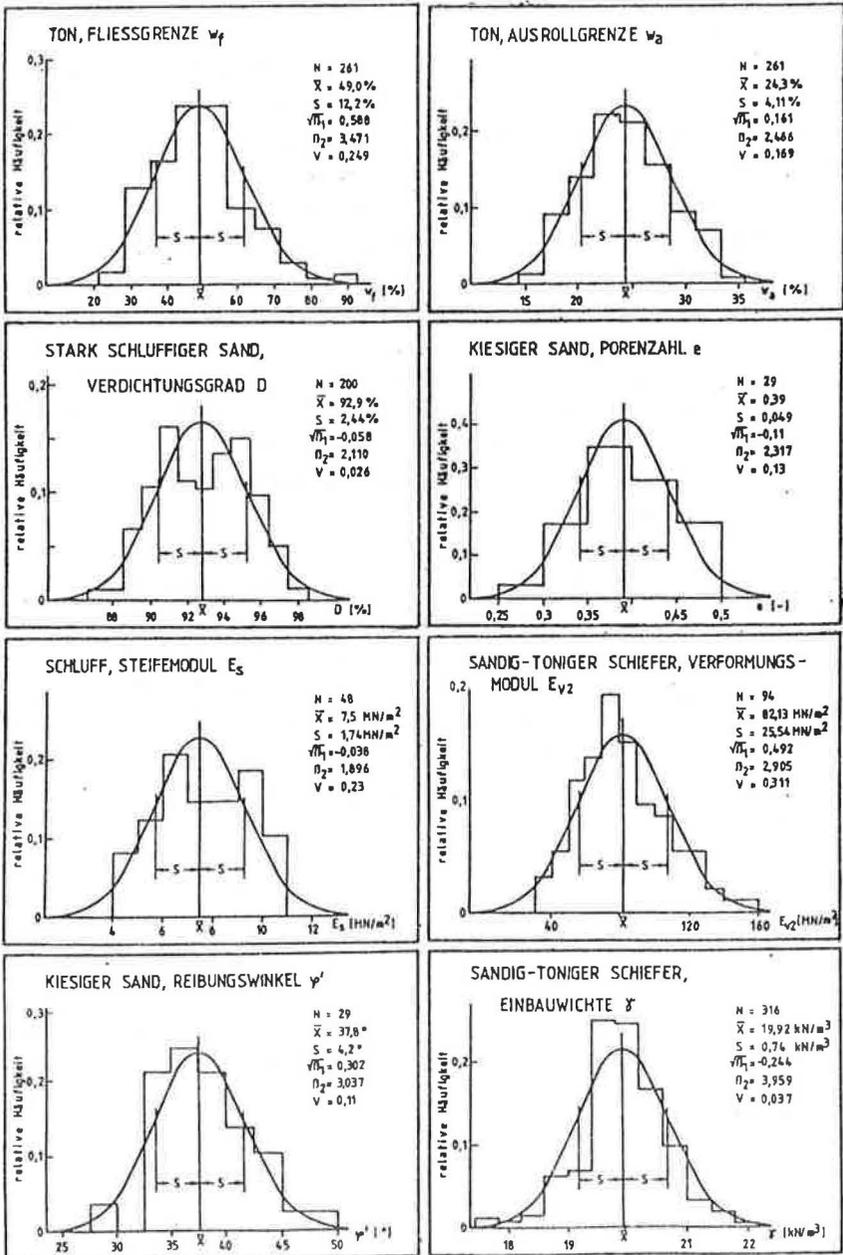


Bild 2 Anpassung der Normalverteilung der Histogramme von Bodenkennwerten

SANDIG-TONIGER SCHIEFER, VERFORMUNGSMODUL  $E_{v2}$

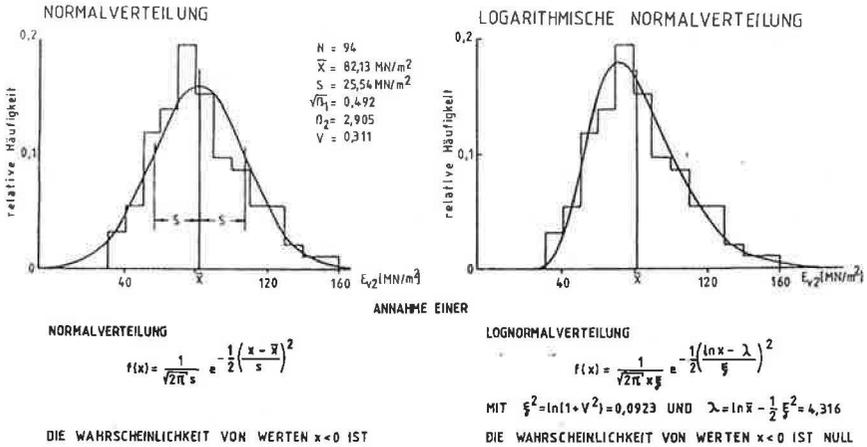


Bild 3 Vergleich der Anpassung von Normal- und Lognormal-Verteilung an das Histogramm einer Stichprobe mit großem Variationskoeffizient

Um diese Empfehlungen zu beurteilen und um a priori Verteilungen für Bodenkennwerte annehmen zu können, sollen hier einige ihrer Eigenschaften genannt werden:

Der Wertebereich der Normalverteilung reicht von  $-\infty$  bis  $+\infty$  während die Lognormalverteilung nur Werte von 0 bis  $+\infty$  zuläßt, wie es auch für die meisten Bodenkennwerte zutrifft. Ohnehin sind in der Mehrzahl die unteren Fraktile von Interesse, so daß vor allem in diesem Bereich eine Übereinstimmung im Wertebereich gesucht werden sollte.

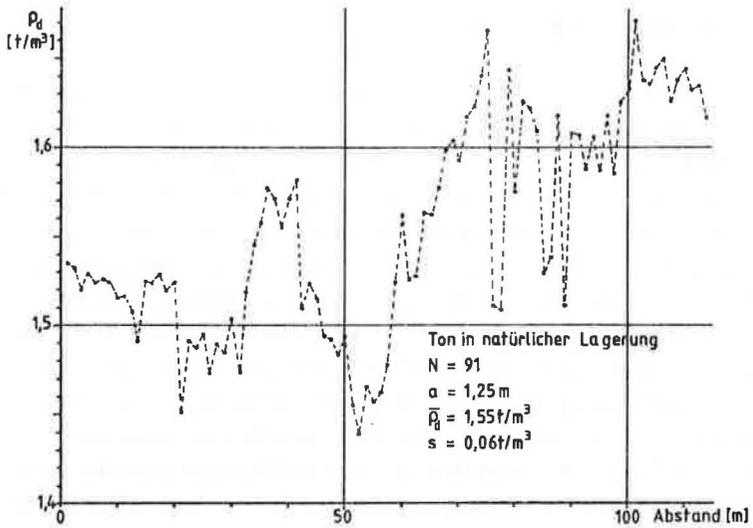
Vom statistischen Modell her entsteht eine Normalverteilung durch die additive Verknüpfung vieler streuender Einzeleinflüsse, während eine Lognormalverteilung durch deren multiplikative Verknüpfung entsteht (BENJAMIN/CORNELL, 1970). Die überwiegende Mehrheit der veröffentlichten Regressionsmodelle (SCHULTZE, 1966; v. SOOS, 1980; ICASP) zeigt multiplikativen Charakter, so daß als berechtigte Hypothese a priori eine Lognormalverteilung für Bodenkennwerte angenommen werden kann, die nur noch die Schätzung von Mittelwerten und Standardabweichung für die jeweilige Problemstellung erfordert.

Eine weitere Überlegung erfordert die räumliche Zuordnung der Bodeneigenschaften. Jeder Versuch wird an einem bestimmten Materialvolumen durchgeführt. Die statistischen Parameter einer Versuchsreihe sind an dieses Volumen gebunden, z. B. hängt die Streuung der Kornverteilung eines zum Entmischen neigenden, geschütteten Bodens sehr stark vom Prüfvolumen ab und dieses im wesentlichen vom Boden selbst und von der Aufgabenstellung. Zur Kontrolle der Filterstabilität anhand der Kornverteilung eines solchen Bodens ist es gewiß sinnvoller, kleinere Prüfvolumen zu verwenden als zur Kontrolle der Einbaudichte.

Ein bekanntes, wenn auch meist stillschweigend übergangenes Merkmal der Bodeneigenschaften ist ihre Instationarität. Erstreckt sich beispielsweise bei einer großen Untersuchungsfläche eine Bodenschicht über den gesamten Bereich, so werden die vorkommenden Inhomogenitäten des Bodens dadurch berücksichtigt, daß die Rechenwerte bereichsweise festgelegt werden. Daraus muß geschlossen werden, daß der Mittelwert zufälligen, großmaßstäblichen Änderungen unterliegen kann. Später wird gezeigt, daß diese zufälligen Trends durch die Autokorrelationsfunktion berücksichtigt werden können.

## 2. Stochastische Prozesse

Bei einer Betrachtung von Zufallsgrößen sind zwei Fälle zu unterscheiden. Einmal kann die Verteilungsfunktion als unveränderlich angenommen werden, wie es z. B. bei Roulette der Fall ist (oder zumindest sein sollte): Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Zahl gezogen wird, vollkommen unabhängig von den zuvor gezogenen. Andererseits gibt es aber auch Probleme, bei denen sich die Verteilungen (bzw. deren Parameter) von Messung zu Messung ändern. Ein Beispiel hierzu wäre die Wasserstandsmessung eines Flusses in nicht zu großen Zeitintervallen. Es ist ganz offensichtlich zu erwarten, daß zwei aufeinanderfolgende Messungen "ähnlichere" Werte zeigen, als zwei Werte in größerem räumlichen oder zeitlichem Abstand (Bild 4). In diesem Fall muß eine ganze Familie von Zufallsgrößen betrachtet werden, die von einem stetigen Parameter, der Orts- oder Zeitkoordinate abhängt, und als stochastischer Prozeß bezeichnet wird. Die meisten mathematischen und physikalischen Untersuchungen stochastischer Prozesse beschränkten sich auf solche Zeitreihen, deren einziger Parameter die Zeit ist. Als Beispiele seien hier die Brownsche Molekularbewegung oder Diffusionsprozesse genannt (PAPOULIS, 1965; ARNOLD, 1973). Die Behandlung saisonaler und zyklischer Einflüsse auf Zeitreihen tritt bei ökonomischen Problemen auf (FAHRMEIR, KAUFMANN, OST, 1981), während im Bereich der Elektrotechnik Zeitreihenuntersuchungen im Spektralbereich vorgenommen werden (JENKINS, WATTS, 1968; ACHILLES, 1978). Die Untersuchung stochastischer Prozesse im Bereich der Bodenmechanik fordert eine Erweiterung der Problemstellung: An die Stelle der Zeitachse treten nun ein, zwei oder drei räumliche Dimensionen. Zusammenfassende Darstellungen dieses Gebietes, überwiegend für stationäre stochastische Prozesse, auf allerdings hohem mathematischen Niveau finden sich bei MATERN, 1960 und MATHERON, 1971.



4a Trockendichten von Ton

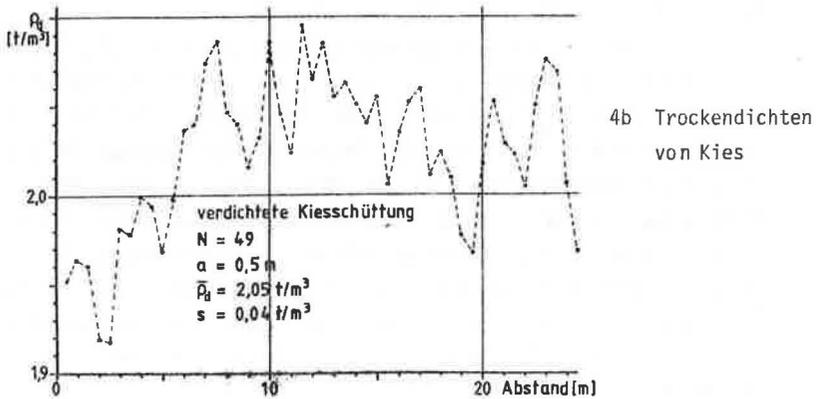


Bild 4 Systematische Stichproben von Bodenkennwerten

Zur Untersuchung stochastischer Prozesse werden meist unter Voraussetzung normalverteilter Zufallsvariablen nur die ersten beiden Momente herangezogen, das sind Mittelwert, Varianz und Kovarianz. Insbesondere sind bei stationären Gaußprozessen mit der Kenntnis von Mittelwert, Standardabweichung und Autokorrelationsfunktion bzw. spektraler Dichte alle Parameter des Prozesses bekannt.

An dieser Stelle sollen noch einige Anmerkungen über die Bedeutung stochastischer Prozesse innerhalb eines probabilistischen Sicherheitskonzepts im Grundbau gemacht werden. Zunächst zur Frage der Kontrolle, wie sie beispielsweise im Erd- und Dammbau für die Abnahme einzelner Flächen vorgenommen wird: Zum Nachweis ausreichender Verdichtung wird ein Fraktilwert vorgegeben und dessen Einhaltung anhand einer Stichprobe überprüft. Nur bei vollkommen zufälligem, regellosem Streuen (white noise-Prozeß) gelten die üblichen statistischen Beziehungen zur Ermittlung von Annahme-Kennlinien. Da jedoch unmittelbar einsichtig ist, daß die Eigenschaften zweier eng nebeneinander entnommenen Bodenproben einander "ähnlicher" sind als die zweier weit voneinander entfernter, daß sie also nicht einem white noise-Prozeß folgen, erheben sich Konsequenzen für die Art der Stichprobennahme und für die Auswertung. Denn je höher die erwartete Korrelation eines neuen Stichprobenwertes mit einem schon bekannten Wert ist, um so weniger "lohnt" es sich, diesen Wert zu erheben und in die Stichprobe einzugliedern, da er kaum neue Informationen enthält.

## 2.1 Verfahren zur Untersuchung stochastischer Prozesse

Stochastische Prozesse werden in der mathematischen Statistik erst seit relativ kurzer Zeit untersucht. Nur wenige Publikationen sind älter als 30 Jahre. Am umfangreichsten behandelt und dokumentiert sind die sogenannten Markov-Prozesse. Deren Abhängigkeitsstruktur wird durch die "Markov-Eigenschaft" beschrieben:

Der zukünftige Prozeßverlauf hängt nur von dem momentanen (bekannten) Wert ab und nicht vom vergangenen Prozeßverlauf. Ihre Formulierung geschieht meist anhand von Verteilungsfunktionen, die aus Übergangswahrscheinlichkeiten der Zustände (meist als Grenzverteilungen) ermittelt werden. Für kontinuierliche Zustands- und Parameterräume werden stochastische Differentialgleichungen herangezogen, für deren Lösung das Itô -Integral als stochastische Verallgemeinerung des Lebesgue-Stieltjes-Integrales verwendet wird. Dieses Kalkül erfordert beträchtliche Kenntnisse aus der Maßtheorie und geht weit über den Rahmen einer ingenieurmäßigen Betrachtung hinaus. Zur Behandlung der stochastischen Eigenschaften von Bodenkennwerten werden daher Verfahren der angewandten Statistik herangezogen, ohne auf deren Grundlagen näher einzugehen.

Die größte Tradition in der statistischen Analyse stochastischer Prozesse haben Ökonomie und Elektrotechnik. Während sich erstere mit Problemen wie Warteschlangen, Lagerhaltung, Wachstumsprozessen, Zeitreihenanalysen und Qualitätskontrolle beschäftigt, treten in der Elektrotechnik Aufgaben wie das Erkennen und Filtern von Störungen, die Ermittlung von Übertragungsfunktionen auf. Bedingt durch die Problemstellung wird in der Ökonomie vorwiegend im Zeitbereich, in der Elektrotechnik vorwiegend im Frequenzbereich gearbeitet.

Die Wahl des Verfahrens zur Schätzung eines stochastischen Bodenmodells muß unter folgenden Gesichtspunkten geschehen:

- Seitens der zur Verfügung stehenden Stichproben müssen unterschiedliche Aufzeichnungslängen (von 25 m bis ca. 4000 m), unterschiedliche Probenfrequenzen (Probenabstand 0,1 bis ca. 350 m) von unterschiedlichen Bodenarten und -parametern verarbeitet werden können.
- Das Modell soll analytisch beschreibbar sein, möglichst für alle Stichproben gelten und nur wenige streuende Parameter aufweisen.
- Das Modell soll, ausgehend vom eindimensionalen Fall der Stichproben, auf drei Dimensionen erweiterbar sein.

Aus diesen Gründen wird das Zeitreihenverfahren von BOX/JENKINS (1976) verwendet, das zur Beschreibung einer großen Gruppe stationärer und in-stationärer Prozesse geeignet ist und ihre analytische Formulierung er-möglicht.

## 2.2 Schreibweise und Nomenklatur des BOX-JENKINS-Verfahrens

In diesem Abschnitt werden in gedrängter Form einige Definitionen und Er-läuterungen zu der Darstellung von Zeitreihen im BOX-JENKINS-Verfahren gegeben. Eine ausführliche Behandlung wird in allgemeiner Art von BOX/JENKINS (1976) und bezogen auf die vorliegende Problemstellung von ALBER/REITMEIER (1986) gegeben. Die hier gewählten Bezeichnungen weichen ge-ringfügig von denen BOX-JENKINS' ab.

Es sei  $y$  eine Zufallsvariable mit unendlicher Grundgesamtheit. Eine Stichprobe bestehe aus  $N$  aufeinanderfolgenden, in einem beliebigen Maß-stab äquidistanten, beobachteten Realisationen  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Weiter-hin sei ein Mittelwert  $\mu$  bekannt, der bei stationären Prozessen dem wahren Ensemble-Mittelwert  $E(y)$ , bei nichtstationären Prozessen einem Maß für das momentane Niveau entspreche. Mit  $z_t = y_t - \mu$  erhält man eine zen-trierte Zeitreihe, d.h.  $E(z_t | t = 1, \dots, N) = 0$ . Im folgenden werden, sofern nicht ausdrücklich erwähnt, nur zentrierte Zeitreihen behandelt, und vereinfachend nicht mehr zwischen Zufallsvariablen und ihrer Realisation unterschieden.

Um eine Beziehung zwischen einer Zufallsvariablen  $z_t$  und ihren "Vorgän-geren"  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$  zu erhalten, werden folgende Operatoren verwendet:

Der Differenzenoperator  $\nabla$ :

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} \quad (2.1)$$

Der "Backshiftoperator"  $B$ :

$$B^k z_t = z_{t-k} \quad (2.2)$$

Der autoregressive Operator  $\Phi(B)$  der Ordnung  $p$ :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p \quad (2.3)$$

Der "moving average" Operator  $\Theta(B)$  der Ordnung  $q$ :

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q \quad (2.4)$$

Das BOX-JENKINS-Modell betrachtet eine diskrete Zeitreihe  $z_t$  und definiert sie entsprechend einem Markov-Prozeß als abhängig von einer Anzahl von Zufallszahlen  $a_{t-k}$ ,  $k \geq 0$ . Weiterhin wird vorausgesetzt, daß  $a$  einer bestimmten Verteilung unterliegt, üblicherweise eine Normalverteilung mit dem Mittelwert Null und der Varianz  $\sigma_a^2$ . Als lineares Modell wird  $z_t$  als gewichtete Summe dieser Zufallszahlen angenommen:

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} + \dots \quad (2.5)$$

Wie oben erwähnt, wird der Mittelwert  $\mu$  im Folgenden zu Null gesetzt und weggelassen.

Wenn die (endliche oder unendliche) Folge  $\psi_1, \psi_2, \dots$  konvergiert, ist der Prozeß  $z_t$  stationär.

Hierauf aufbauend lassen sich zwei spezielle Prozesse bilden.

a) Der autoregressive (AR) Prozeß der Ordnung  $p$ :

Die Beobachtungen  $z_t$  und  $z_{t-k}$ ,  $1 \leq k \leq p$ , seien korreliert. In diesem Fall kann eine Regression von  $z_t$  bezüglich  $z_{t-k}$  durchgeführt werden, die zu folgender Gleichung führt:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t \quad (2.6a)$$

bzw. mit dem autoregressiven Operator  $\Phi(B)$  der Ordnung  $p$ :

$$\Phi(B) z_t = a_t \quad (2.6b)$$

Die  $\Psi$ -Werte erhält man aus der Inversion

$$\Psi(B) = \frac{1}{\Phi(B)} \quad (2.7)$$

b) Der "moving-average" (MA) Prozeß der Ordnung  $q$ :

Die Beobachtung  $z_t$  sei die linear abhängige von der endlichen Anzahl  $q$  früherer Zufallszahlen  $a$ :

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \theta_3 a_{t-3} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.8a)$$

oder kürzer

$$z_t = \Theta(B) a_t \quad (2.8b)$$

Die  $\Psi$ -Werte erhält man hier direkt aus  $\Theta(B)$ .

Den allgemeinen linearen Prozeß erhält man durch Kombination von autoregressiven und "moving average"-Prozeß:

$$\Phi(B) z_t = \Theta(B) a_t \quad (2.9a)$$

oder ausführlicher:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.9b)$$

mit den  $\Psi$ -Werten

$$\Psi(B) = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \quad (2.10)$$

Wie oben angeführt, müssen bei einem stationären Prozeß die  $\Psi_t$  konvergieren. Instationäre Prozesse entstehen bei nicht invertierbaren autoregressiven Operatoren. Um ihre Behandlung zu vereinfachen, werden sie durch das Produkt eines stationären AR-Operators mit einem Differenzenoperator ersetzt.

Die allgemeine Schreibweise eines beliebigen instationären (Markov-) Prozesses lautet damit

$$\Phi(B) \nabla^d z_t = \Theta(B) a_t \quad (2.11)$$

$\nabla^d z_t$  entspricht einer  $d$ -maligen Differenzbildung der Zeitreihen. Dieser differenzierte Prozeß kann nun als stationärer behandelt werden. Um

wiederum die ursprüngliche Zeitreihe  $z_t$  zu erhalten, muß  $\nabla^d z_t$  d-mal summiert bzw. integriert werden. Daher nennt man diese allgemeinen Prozesse der Form (2.11) autoregressive integrierte moving average Prozesse der Ordnung  $p, d, q$  oder kurz ARIMA ( $p, d, q$ ) Prozesse.

### 3. Zeitreihenanalyse von Bodeneigenschaften

Die Durchführung der Zeitreihenanalyse ist ausführlich bei ALBER/REITMEIER (1986) beschrieben. Daher werden an dieser Stelle nur kurz Art und Umfang der Zeitreihen und die benutzte Nomenklatur dargestellt um ihre Einordnung zu ermöglichen.

Die gesamte Anzahl aller an einer (Bau)Stelle bestimmter Bodenkennwerte wird als Stichprobe bezeichnet. Im Idealfall wurden die einzelnen Proben entlang einer Geraden in konstanten Abständen entnommen, und an ihnen verschiedene Bodenkennwerte bestimmt. Für die so entstandenen Folgen von Werten wird die in der Statistik übliche Bezeichnung Zeitreihen verwendet, obwohl sie einer Orts-, nicht einer Zeitkoordinate zuzuordnen sind. Der Koordinatenindex wird im linearen Fall - ebenfalls in Übereinstimmung mit den in der Statistik üblichen Bezeichnungen - mit  $t$  bezeichnet. Eine Stichprobe besteht somit aus verschiedenen, aber an denselben Stellen bestimmten Reihen von Bodenkennwerten  $x(t), y(t), \dots; t = 1, 2, \dots, N$ , wobei  $N$  den Umfang sowohl der Stichprobe als auch der Zeitreihe angibt. Da jeweils nur eine Zeitreihe betrachtet wird, genügt zu ihrer Bezeichnung  $z_t; t = 1, \dots, N$ .

Die untersuchten Stichproben selbst sind in Tabelle 1 beschrieben. Sofern sie mit einem signifikanten deterministischen Trend behaftet waren, wurde dieser von der Zeitreihenanalyse entfernt. Reihen mit einem Variationskoeffizienten über 30 % wurden logarithmiert, was allerdings ohne größeren Einfluß auf die Schätzung des Prozesses und seiner Parameter blieb.

Als gemeinsames stochastisches Modell aller Stichproben konnte ein in-stationärer Prozeß, in der BOX/JENKINS-Schreibweise ARIMA (1,1,1) genannt, identifiziert werden. Für über 95 % aller Zeitreihen konnten die Tests der Residuen auf dem 10 % Niveau geführt werden, für ca. 98 % auf dem 1 % Niveau. Auch die rein optische Überprüfung von

Histogrammen und Autokorrelationen, sowie von aus Zufallszahlen erzeugten Zeitreihen, die mögliche Verläufe von Bodenkennwerten simulieren sollten, ergab befriedigende Ergebnisse. Damit war der ARIMA (1,1,1) Prozeß als Hypothese nicht abgelehnt und konnte weiteren Arbeiten als Grundlage dienen.

Schwierigkeiten bei der Auswertung bereiteten nur einige sehr kleine Stichproben mit Umfängen von etwa 50 Werten, Hier war es kaum möglich, stationären und instationären Anteil zu trennen, die Parameter des Prozesses waren hoch korreliert,

Weiterhin zeigte sich, daß die Autokorrelationen verschiedener Bodenkennwerte einer Probenserie einander sehr ähnlich waren. Daher konnte angenommen werden, daß sie alle demselben Prozeß mit denselben Parametern unterliegen. Für einige Serien wurden diese Parameter durch eine geeignete Mittelung der einzelnen Schätzungen bestimmt und anschließend alle Zeitreihen einer Probenserie nochmals mit diesem gemeinsamen Modell gefiltert. Auch hier konnten die Residuals die optische Überprüfung bestehen, Signifikanztests wurden nur noch in Einzelfällen durchgeführt und brachten ebenfalls keine Ablehnung der Hypothese. Somit konnte angenommen werden, daß die untersuchten Bodenkennwerte einer klassifizierten Schicht innerhalb eines Baustellenbereiches alle demselben stochastischen Prozeß mit konstanten Parametern folgen. Obwohl für sicherheitsrelevante Bodenkennwerte wie Scherfestigkeit, Steifemodul oder Porenwasserdrücke kaum Untersuchungen vorliegen, kann wegen der vielfältigen Korrelationen aller Bodenkennwerte untereinander begründet angenommen werden, daß auch diese Werte demselben Prozeß folgen.

### 3.1 Zusammenstellung der Ergebnisse von ALBER/REITMEIER (1986)

Die Arbeiten wurden im Rahmen verschiedener Forschungsprojekte durchgeführt. Dabei wurden an geschütteten Böden die umfangreichen regelmäßig und sorgfältig durchgeführten Baukontrollen an den Kern- und Filterzonen der Trinkwassertalsperre Mauthaus sowie eine kleinere Stichprobe innerhalb einer Bodenaustauschmaßnahme bei Regensburg untersucht. An natürlichen Böden wurden je eine Stichprobe aus einer Sand- und einer Tongrube untersucht. In diesen Stichproben ist nahezu das gesamte Spektrum möglicher Böden - natürlich, geschüttet, bindig und nichtbindig - enthalten. Die untersuchten Bodenkennwerte waren überwiegend leicht und schnell zu bestimmende Größen: Wassergehalte, Dichten, Kornverteilungen, Fließ- und Ausrollgrenzen, Plastizitäts- und Konsistenzzahlen. Als ihnen allen gemein konnte auf hohem Signifikanzniveau ein ARIMA (1,1,1)-Prozeß angenommen werden. Ein Beispiel der Auswertung zeigt Bild 5. Bezeichnet man mit  $a_t$  die  $(0, \sigma_a^2)$  normalverteilte Zufallsvariable, die an der Stelle  $t$  auf den Prozeß als stochastische Störung einwirkt, dann kann er in der BOX/JENKINS-Schreibweise dargestellt werden als

$$(1-B)(1-\Phi B)z_t = (1-\Theta B)a_t \quad (3.1a)$$

oder

$$z_t - (1+\Phi)z_{t-1} + \Phi z_{t-2} = a_t - \Theta a_{t-1} \quad (3.1b)$$

mit den zu bestimmenden Parametern  $\sigma_a$ ,  $\Theta$  und  $\Phi$ .

Infolge des Differenzenoperators  $(1-B)$  ist der Prozeß  $z_t$  instationär, der durch einmaliges Differenzieren von  $z_t$  entstehende Prozeß  $w_t = z_t - z_{t-1}$  dagegen stationär. Der Begriff der Stationarität bedeutet in der Statistik, daß sämtliche Verteilungen eines solchen Prozesses invariant gegen zeitliche bzw. räumliche Verschiebungen sind. Im Rahmen der Theorie der 2. Momente folgt daraus im wesentlichen, daß der Mittelwert eines stationären Prozesses nicht von einem jeweiligen Ort abhängt, und die Autokovarianz der Werte an zwei Stellen nur von deren gegenseitigem Abstand.

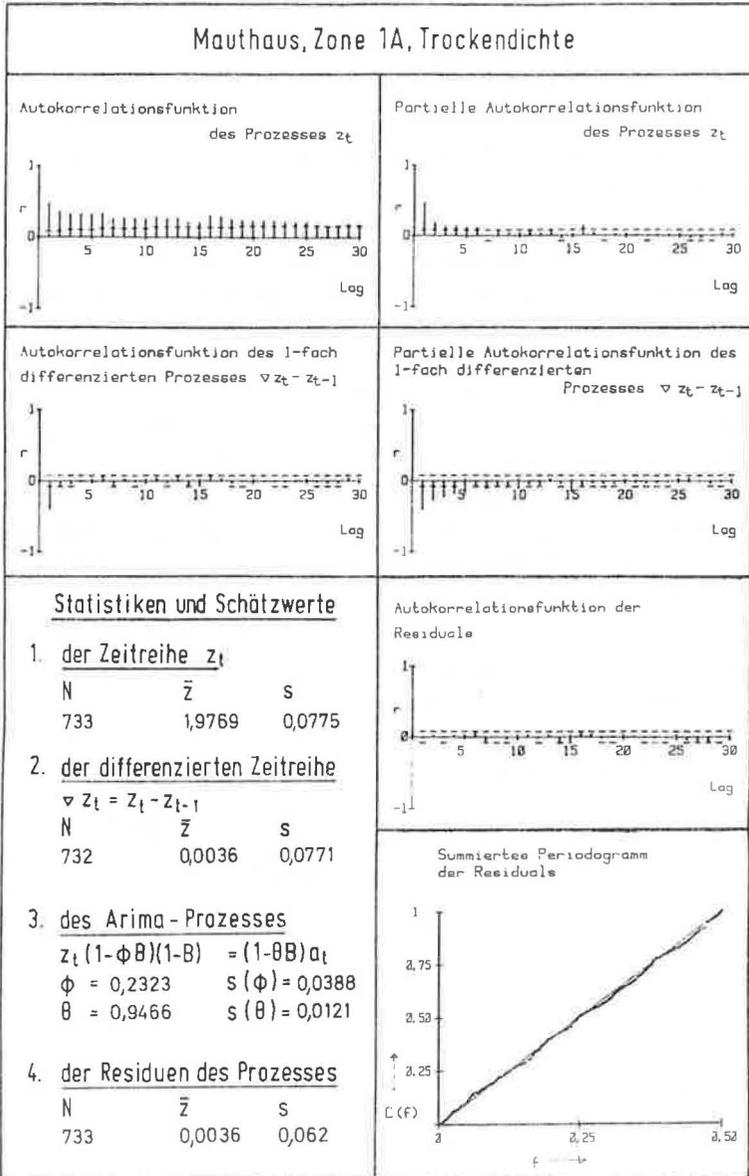


Bild 5 Auswertung von Zeitreihen

Wie später gezeigt wird, existiert für den Prozeß (3.1) ein lokal veränderlicher Mittelwert. Da solche Prozesse schwierig zu handhaben sind, werden sie beim BOX/JENKINS-Verfahren solange differenziert, bis sie ein stationäres Verhalten zeigen, und der so entstandene neue Prozeß wird dann analysiert. Die Autokovarianzen des differenzierten Prozesses  $w_t$  lauten nach BOX/JENKINS:

$$\gamma_w(0) = \frac{1 + \theta^2 - 2\phi\theta}{1 - \phi^2} \sigma_a^2 \quad (3.2)$$

$$\gamma_w(k) = \frac{(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)}{1 - \phi^2} \phi^{k-1} \sigma_a^2, \quad k \geq 1 \quad (3.3)$$

und die Autokorrelationen

$$\rho(0) = 1 \quad (3.4)$$

$$\rho(k) = \frac{(1 - \phi\theta)(\phi - \theta)}{1 + \theta^2 - 2\phi\theta} \phi^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (3.5)$$

Berechnet man die Autokorrelationen einer Zeitreihe  $w_t = z_t - z_{t-1}$

$$\text{mit } \rho_w(k) = E[r_w(k)] \approx \frac{N_w - 1}{N_w} \frac{\sum_{i=1}^{N_w - k} (w_i - \bar{w})(w_{i+k} - \bar{w})}{\sum_{i=1}^{N_w} (w_i - \bar{w})^2}, \quad k \geq 1$$

so lassen sich erste Schätzwerte für  $\phi$  und  $\theta$  aus (3.4) und (3.5) ermitteln mit

$$\phi \approx \frac{r_w(k+1)}{r_w(k)}, \quad k \geq 1 \quad (3.6)$$

und  $\theta$  als Lösung der quadratischen Gleichung

$$\frac{\theta}{1 + \theta^2} \approx \frac{r_w^2(2) - r_w(1)}{2r_w(1)r_w(2) - r_w(1) - r_w(2)} \quad (3.7)$$

Die besten Schätzwerte für  $\phi$  und  $\theta$  wurden mit dem EDV-Statistikprogramm BMDP nach den bei BOX/JENKINS beschriebenen Verfahren "Maximum Likelihood" und "Backcasting Estimation" ermittelt. Die Aus-

wertung der Zeitreihen geschieht nach den Parametern  $\Delta$  und  $p$ , wobei (vgl. Abschn. 4, Gl. 4.28, 4.35)

$$\Delta = - \frac{\ln \Phi}{l} \qquad p = \frac{N}{6} \frac{(1-\theta)^2 (1-\Phi^2)}{(1-\Phi\theta)(\theta-\Phi)}$$

und der Wert  $\frac{p}{p+1}$  den Anteil des instationären lokalen Mittelwerts an der Gesamtvarianz  $\sigma_z^2$  angibt.

Eine Erläuterung des Parameters  $p$  wird in Abschn. 4.1 im Zusammenhang mit seiner formelmäßigen Ableitung gegeben.

### 3.2 Weitere Zeitreihen und Autokorrelationsfunktionen aus der Literatur

Nachdem der Typ des stochastischen Prozesses feststand, konnten weitere Zeitreihen aus der Literatur, deren Art und Herkunft nicht immer ausreichend erläutert waren, ausgewertet werden. Soweit die Möglichkeit bestand, wurden digitale Zeitreihen aus Bildern von analog dargestellten Verläufen von Bodenkennwerten mittels eines elektronischen Digitalisiertablets gewonnen. In Fällen, in denen nur eine Auswertung in Form von Autokorrelationsfunktionen vorlag, wurden die Anfangsschätzwerte verwendet. Für  $\Delta$  konnte auf (3.6) zurückgegriffen werden, während man für  $p$  mit (4.25), (4.33), vgl. Abschn. 4.1 erhält:

$$z_t = \frac{b_t}{1-\Phi B} + \sum_{i=1}^t m_i$$

$$E[w_t^2] = E[(z_t - z_{t-1})^2] = \frac{2\sigma_b^2}{1+\Phi} + \sigma_m^2$$

da  $\sigma_w^2 \gg \sigma_m^2$

$$\sigma_w^2 \approx \frac{2\sigma_z^2 (1-\Phi)}{p+1}$$

und damit 
$$p = 2 \frac{\sigma_z^2}{\sigma_w^2} (1-\Phi) - 1 \qquad (3.8)$$

Für  $\Phi$  erhält man aus (3.5) und da bei allen untersuchten Zeitreihen

$$(1-\theta)^2 \ll \Phi \quad \text{ist}$$

$$\Phi \approx 2r_w(1) + 1 \quad (3.9)$$

Die noch erforderliche Beziehung zwischen  $\sigma_z^2$  und  $\sigma_w^2$  sowie zwischen  $r_z$  und  $r_w$  erhält man durch Einsetzen von  $w_t$  in die Schätzfunktion für die Autokovarianz. Man erhält

$$\sigma_w^2 = 2\sigma_z^2(1 - r_z(1)) \quad (3.10)$$

$$r_w(k) \approx \frac{r_z(k)}{1 - r_z(1)} - \frac{1}{2} \frac{r_z(k-1) + r_z(k+1)}{1 - r_z(1)}, \quad k \ll N \quad (3.11)$$

damit lauten die Schätzfunktionen

$$\Phi \approx \frac{r_z(1) - r_z(2)}{1 - r_z(1)} \quad (3.12)$$

und

$$\rho \approx \frac{r_z(2) - r_z^2(1)}{(1 - r_z(1))^2} \quad (3.13)$$

Die Schätzwerte der aus der Literatur entnommenen Zeitreihen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Histogramme der Prozeßparameter aller Zeitreihen, aufgeschlüsselt nach bindig, nichtbindig, horizontaler und vertikaler Richtung zeigt Bild 6.

Bei einzelnen Zeitreihen wurde die Modelladäquatheit optisch und durch Tests an den Residuals überprüft. Eine Darstellung der Prozesse durch das ARIMA (1,1,1)-Modell war stets gegeben, wenn auch in wenigen Fällen durch andere Modelle eine etwas bessere Anpassung möglich war.

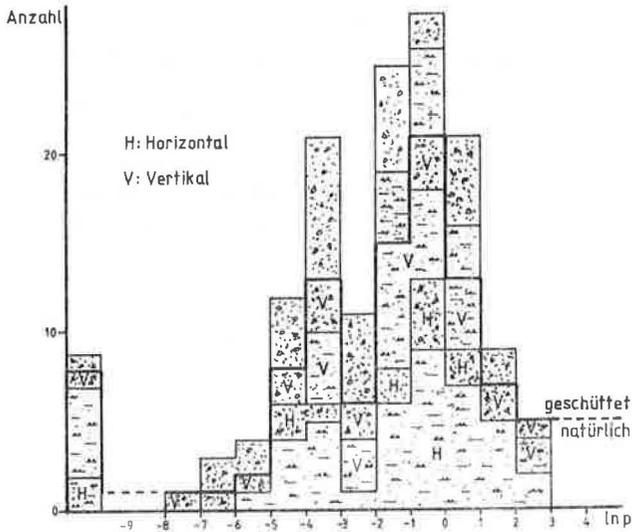
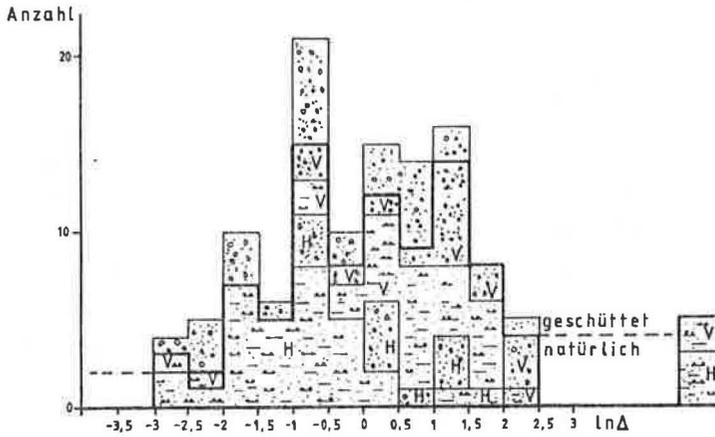


Bild 6 Histogramme der Schätzwerte der Prozeßparameter

### 3.3 Ergebnisse der Zeitreihenanalysen

Weder für verschiedene Bodenklassen, Bodenkennwerte noch für horizontale oder vertikale Richtungen waren Häufungen der Prozeßparameter um einen Wert signifikant. Dagegen schien es an jedem Entnahmeort einen Mittelwert zu geben, um den die Parameter der verschiedenen Zeitreihen streuten. Die Auswertung wurde daher so vorgenommen, daß jeweils pro Entnahmeort Mittelwerte für  $p$  und  $\Delta$  mit der zugehörigen Varianz geschätzt wurden. Anschließend wurde mit dem Bayes-Verfahren globale Mittelwerte der Parameter und die Streuungen ihrer Realisationen an den einzelnen Entnahmeorten berechnet. Als nichtinformative Prioriverteilung der Prozeßparameter wurden lognormale Verteilungen angenommen. Bild 7 zeigt ein Histogramm der geschätzten Werte an den verschiedenen Entnahmeorten. Die Dichten ihrer Verteilungen lauten

$$f(\Delta) = \frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln\Delta)^2} \quad (3.14)$$

$$f(p) = \frac{1}{p\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1+\ln p)^2} \quad (3.15)$$

und ihre Modellierungen als Zufallsvariable kann mit den  $(0,1)$  normalverteilten Zufallsvariablen  $u_p$  und  $u_\Delta$  mit

$$\Delta = e^{u_\Delta} \quad [m^{-1}] \quad (3.16)$$

$$p = e^{u_p - 1} \quad (3.17)$$

vorgenommen werden. Zu beachten ist, daß  $\Delta$  dimensionsgebunden mit der Einheit  $m^{-1}$  ist.

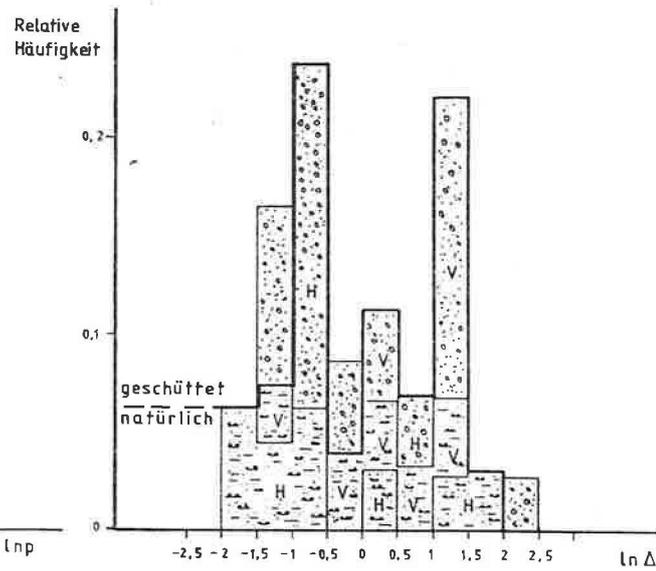
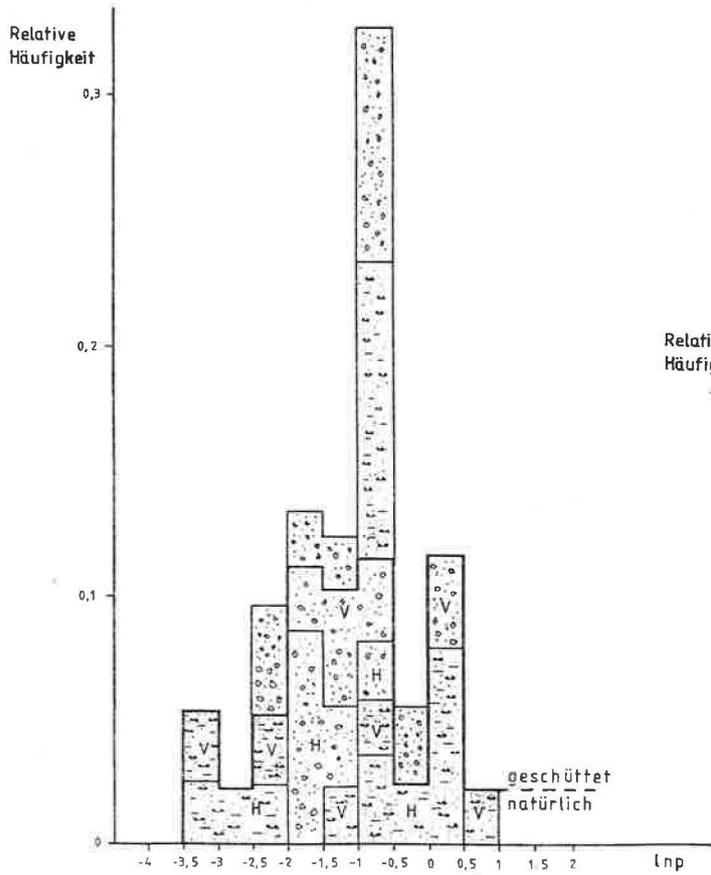


Bild 7 Histogramme der gewogenen Baustellenrealisationen

#### 4. Theoretische Ergebnisse für den linearen Fall

Die Annahme eines ARIMA (1,1,1)-Prozesses zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten der Streuung von Bodenkennwerten wirft folgende Fragen auf:

- Wie kann die Nichtstationarität, die sich als stete Änderung des lokalen Mittelwerts manifestiert, Eingang in die Berechnung finden?
- Wie sind lineare und periodische Trends zu behandeln?

Es ist offensichtlich, daß beide Probleme sich überschneiden, denn ein Trend ist nichts anderes als eine Änderung des Mittelwerts entlang einer Strecke. Hier muß nun zwischen deterministischen und stochastischen Trends unterschieden werden.

Als deterministische Trends sollen solche bezeichnet werden, die aufgrund bekannter Einflüsse auf den Boden entstanden sind, deren Verlauf a priori bekannt ist und deren numerische Beschreibung entweder ebenfalls a priori oder aufgrund einer Stichprobe ausreichend genau möglich ist. Als Beispiele können die lineare Zunahme der undränierten Kohäsion  $c_u$  mit der Tiefe unter OK Gelände (vgl. Bild 8 aus MATSUO/KURUODA/ASAOKA 1973) oder der Anstieg der Schlagzahlen einer Rammsondierung mit der Tiefe infolge der zunehmenden Gestängemasse genannt werden. Selbstverständlich müssen diese deterministischen Trends bei der Ermittlung von Mittelwerten und Varianzen berücksichtigt werden.

Grundsätzlich anders zu beurteilen sind stochastische Trends. In Bild 9 aus ALBER/REITMEIER (1986) ist der Verlauf der Wassergehalte von äquidistantentnommenen Proben eines Tons dargestellt und folgt näherungsweise einem sinusförmigen Trend. Da im Regelfall jedoch nicht Proben in so engem Abstand genommen werden, und in einem beliebigen anderen Fall auch ein anderer Verlauf des Trends zu erwarten ist, müssen diese lokalen Änderungen des Mittelwerts als zufällig betrachtet werden und bleiben Gegenstand der Untersuchung.

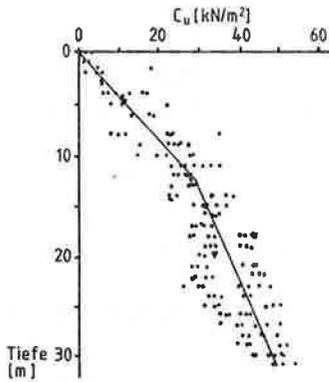


Bild 8 Linearer Trend der  
undrÄnirten  
KohÄsion mit  
der Tiefe

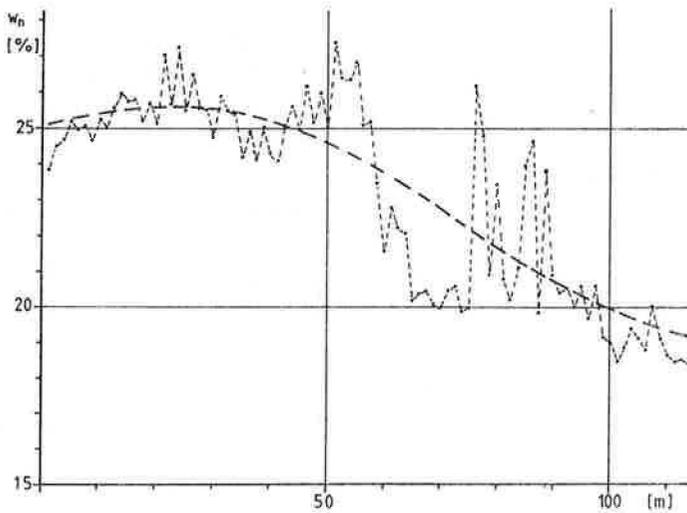


Bild 9 Wassergehalte von in horizontaler Richtung entnommenen Tonproben

Die Beschreibung einer stationären Zufallsvariablen kann vollständig durch ihre sämtlichen Momente geschehen. Im Ingenieurwesen hat sich als praktikables Verfahren die unvollständige Beschreibung durch die ersten beiden Momente, die sogenannte Methode der 2. Momente durchgesetzt. Hierbei wird nur die Kenntnis von Mittelwert, Varianz und Autokorrelationsstruktur verlangt. Um nutzbare Ergebnisse zu erhalten, muß der instationäre ARIMA (1,1,1)-Prozeß in einen quasi stationären übergeführt werden. Führt man sich dazu nochmals das Ziel dieser Arbeit vor Augen: Es soll eine Aussage über die räumliche Streuung von Bodenkennwerten zur Beurteilung der Sicherheit eines bestimmten Bauwerks gewonnen werden und die Aussage soll nur auf dieses Bauwerk begrenzt sein. Es bedarf keiner weiteren Begründung, daß nur die Bodeneigenschaften, formuliert als Zufallsvariable, innerhalb des Gebiets interessieren, den das Bauwerk einnimmt. Das heißt, der Zufallsprozeß wird nur innerhalb eines begrenzten Bereiches betrachtet. Damit nun ein endlicher ARIMA (1,1,1)-Prozeß als quasi stationär betrachtet werden kann, müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

Invarianz der Verteilung der Zufallsvariable gegen zeitliche Verschiebungen

$$F_{t+t_1}(z) = F_t(z) \quad (4.1)$$

Daraus folgt insbesondere für die ersten beiden Momente der Verteilung:

Existenz eines konstanten Mittelwerts

$$E[z] = \mu = \text{konstant} \quad (4.2)$$

Invarianz der Kovarianzmatrix gegen zeitliche Verschiebungen:

$$\text{Cov}[z_t, z_{t+k}] = \gamma(|k|) \quad (4.3)$$

Positive Semidefinitheit der Kovarianzmatrix:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_i l_j \gamma(|i-j|) \geq 0, \quad l_k \in \mathbb{R}; \quad k=1, \dots, N \quad (4.4)$$

Wären nun alle Werte der Zufallsvariablen  $z_t$  innerhalb des Bereiches  $1 \leq t \leq N$  bekannt, so kann ein Mittelwert  $\mu$ , die mittlere quadratische Abweichung  $\sigma^2$  des Prozesses von diesem Mittelwert und die mittlere gemeinsame Abweichung  $\gamma(k)$  zweier Realisationen  $z_t$  und  $z_{t+k}$  von  $\mu$  folgendermaßen definiert werden:

$$\mu := \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t \quad (4.5)$$

$$\sigma^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (z_t - \mu)^2 \quad (4.6)$$

$$\gamma(k) := \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu) \quad (4.7)$$

Diese Beziehungen (4.5) bis (4.7) entsprechen den erwartungstreuen Schätzfunktionen für Mittelwert, Varianz und Kovarianz bei stationären Prozessen, und werden daher als sinnvolle Schätzungen für die oben angegebenen Eigenschaften eingeführt. Allerdings müssen eben wegen der Begrenzung  $1 \leq t \leq N$  asymptotische Ergebnisse (d.h. für  $N \rightarrow \infty$ ) mit Vorsicht betrachtet werden, da  $N$  stets eine endliche Größe ist.

Das stochastische Modell in Abschn. 3 lautet in ausführlicher Schreibweise

$$z_t - z_{t-1} = \frac{a_t}{1-\Phi B} - \theta \frac{a_{t-1}}{1-\Phi B}$$

mit  $\lambda = 1 - \theta$  (4.8) wird

$$(1-\Phi B)(z_t - z_{t-1}) = \theta(a_t - a_{t-1}) + \lambda a_t \quad (4.9)$$

Die Autokovarianzen des differenzierten Prozesses  $w_t = z_t - z_{t-1}$  sind

$$\gamma_w(0) = \frac{1 + \theta^2 - 2\Phi\theta}{1 - \Phi^2} \sigma_a^2 \quad (3.2)$$

$$\gamma_w(k) = \frac{(1 - \Phi\theta)(\Phi - \theta)}{1 - \Phi^2} \Phi^{k-1} \sigma_a^2, \quad k \geq 1 \quad (3.3)$$

Dieser ARIMA (1,1,1)-Prozeß ist hinsichtlich der Autokovarianzen von  $z_t$  sehr unhandlich zu bearbeiten. Infolge seiner Instationarität besitzt  $z$  keinen konstanten Mittelwert, und seine Varianz wächst proportional zu  $t$ . Es ist jedoch möglich, ihn durch einen stationären AR (1)-Prozeß (ein Sonderfall des stationären Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses) mit unabhängigen, einem Random walk folgenden Mittelwertprozeß identisch zu ersetzen. Hierzu wird daran erinnert, daß die Zeitreihenanalyse die Hypothese auf normalverteilte Residuals nicht ablehnte, und daher sowohl  $w_t$  wie  $z_t$  Gauß-Prozesse sind, welche vollständig durch die ersten beiden Momente definiert sind,

Mit dem Ansatz

$$y_t = \frac{b_t}{1-\psi B} + \mu_t \quad (4.10)$$

$$\mu_t = \frac{m_t}{1-B} \quad (4.11)$$

wobei

$$E[b_t b_k] = \begin{cases} \sigma_b^2 & \text{für } t = k \\ 0 & \text{für } t \neq k \end{cases} \quad (4.12)$$

$$E[m_t m_k] = \begin{cases} \sigma_m^2 & \text{für } t = k \\ 0 & \text{für } t \neq k \end{cases} \quad (4.13)$$

$$E[b_t m_k] = 0 \quad \text{für alle } t, k \quad (4.14)$$

die Varianzen der  $(0, \sigma)$  normalverteilten Zufallsvariablen  $b, m$  sind, wird der differenzierte Prozeß  $v_t = y_t - y_{t-1}$  zu

$$y_t - y_{t-1} = \frac{b_t}{1-\psi B} - \frac{b_{t-1}}{1-\psi B} + m_t \quad (4.15)$$

Die Kovarianzen erhält man durch Einsetzen der Erwartungswerte mit

$$E\left[\frac{b_t}{1-\psi B} \frac{b_{t+k}}{1-\psi B}\right] = \frac{\psi^{|k|}}{1-\psi^2} \sigma_b^2 \quad (4.16)$$

zu

$$\gamma_v(0) = \frac{2\sigma_b^2}{\psi+1} + \sigma_m^2 \quad (4.17)$$

$$\gamma_v(k) = \frac{\psi-1}{\psi+1} \psi^{k-1} \sigma_b^2 \quad (4.18)$$

Man bemerkt die formale Obereinstimmung mit (3.2) und (3.3),

Für das 1. Moment gilt  $E(y) = 0$ , da  $b$  und  $m$  wie  $a$  ( $0, \sigma^2$ ) normalverteilt angenommen wurden. Setzt man die Kovarianzen von  $w_t$  und  $v_t$  gleich, so ergibt sich aus (3.2), (3.3), (4.17), (4.19)

$$\psi = \phi \quad (4.19)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{(1-\theta)\phi(\theta-\phi)}{(1-\phi)^2} \sigma_a^2 \quad (4.20)$$

$$\sigma_m^2 = \frac{(1-\theta)^2}{(1-\phi)^2} \sigma_a^2 \quad (4.21)$$

wobei stets gelten muß

$$\theta \geq \phi \quad (4.22)$$

Überträgt man den stochastischen Prozeß in einen kontinuierlichen Ereignisraum und ersetzt den Differenzenoperator  $\nabla = 1 - B$  durch ein Differential  $\frac{d}{dt}$ , so entsteht die stochastische Differentialgleichung für  $z$

$$\phi \frac{d^2 z}{dt^2} + (1-\phi) \frac{dz}{dt} = \theta \frac{da}{dt} + \lambda a \quad (4.23)$$

und für  $y$

$$\psi \frac{d^2 y}{dt^2} + (1-\psi) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (b + \psi m) + (1-\psi) m \quad (4.24)$$

Auch hier erhält man aus den ersten und zweiten Momenten der Störglieder die Gleichungen (4.19) bis (4.22). Da somit die differenzierten Prozesse  $w$  und  $v$  vollkommen identisch sind, sind es, bis auf die frei

wählbaren Konstanten auch  $z$  und  $y$ . Diese Konstanten geben das jeweilige Startniveau der Prozesse an und werden im Weiteren ohne Verlust an Allgemeingültigkeit zu Null gesetzt und weggelassen. Im folgenden wird mit  $z$  der AR(1)-Prozeß mit Random-Walk-Mittelwert bezeichnet.

#### 4.1 Varianz und Autokorrelationsfunktion

Der Prozeß (4.10) läßt sich schreiben

$$z_t = \frac{b_t}{1-\Phi_B} + \sum_{i=1}^t m_i \quad (4.25)$$

Teilt man den Prozeß auf in den instationären und den stationären Anteil

$$z_t = x_t + y_t \quad (4.26)$$

mit  $x_t = \sum_{i=1}^t m_i \quad (4.26a)$

$$y_t = \frac{b_t}{1-\Phi_B} \quad (4.26b)$$

so lassen sich beide Anteile, da unkorreliert, hinsichtlich der Momente getrennt untersuchen.

Für den AR(1) Anteil  $y$  erhält man (vgl. BOX/JENKINS, 1976):

$$E[y] = 0$$

$$\gamma_y(k) = \frac{\phi^{|k|}}{1-\phi^2} \sigma_b^2 \quad (4.27)$$

oder in der entsprechenden kontinuierlichen Formulierung wenn  $l$  der Abstand zwischen zwei Punkten  $k, k+1$  ist und  $d$  ein kontinuierlicher Längenmaßstab.

$$\gamma_y(d) = \frac{\sigma_b^2}{1-\phi^2} e^{-\Delta|d|} \quad \Delta = -\frac{\ln \phi}{l} \quad (4.28)$$

Für die Untersuchung des instationären Prozesses  $x_t$ , auch Random Walk oder Wiener Prozeß genannt, müssen noch einige Vorüberlegungen angestellt werden.

Betrachtet werden eine Realisation des Mittelwertsprozesses entlang einer endlichen Strecke wie z. B. ein Straßenbauolos. Bei einer Totalerhebung, die die gesamte diskrete Grundgesamtheit erfaßt, gilt für den Zählerindex  $t$  dieser theoretischen Stichprobe

$$1 \leq t \leq N \quad (4.29)$$

Damit ist es möglich, für diese Grundgesamtheit einen Mittelwert und eine Kovarianz entsprechend (4.5) bis (4.7) zu definieren. Als Erwartungswert kann wegen (4.29)

$$E[x^k] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t^k$$

verwendet werden. Im Folgenden werden für diese Grundgesamtheit die Erwartungswerte von Mittelwert, Varianz und Kovarianz anhand der theoretischen Formulierung des Prozesses (4.26a) berechnet, wobei als vereinfachte Schreibweise für alle Parameter  $g = E(g)$  verwendet wird.

Für den Mittelwert gilt

$$\mu = E[\mu] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t\right] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^t E[m_i] = 0$$

Zur Berechnung der Kovarianz muß von (4.26a) ausgegangen werden, da für einen instationären Prozeß die Yule-Walker-Gleichungen nicht existieren.

Die Berechnung wird für den diskreten Zustandsraum durchgeführt, da sie so wesentlich leichter nachzuvollziehen ist, und auf die Verwendung des Kalküls der Itô-Integralen verzichtet werden kann.

Der Mittelwert hat zwar den Erwartungswert Null, nicht aber seine mittlere quadratische Abweichung von Null. Mit Hilfe von

$$E[\mu] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^t m_i\right] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (N+1-t) E[m_t]$$

wird

$$E\{\mu^2\} = \frac{1}{N^2} E\left[\sum_{t=1}^N (N+1-t)m_t\right] \left[\sum_{s=1}^N (N+1-s)m_s\right]$$

mit (4.13) erhält man

$$E\{\mu^2\} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N} \sigma_m^2$$

Im Folgenden werden stets kleinere Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, dann ist

$$E\{\mu^2\} = \frac{N}{3} \sigma_m^2 \quad (4.30)$$

Die Varianz wird mit

$$E\{x^2\} = \frac{1}{N} \frac{N}{\sum_{t=1}^N} \left(\sum_{t=1}^t m_t\right)^2$$

$$E\{x^2\} = \frac{N}{2} \sigma_m^2.$$

zu 
$$Y_x(0) = E\{(x-\mu)^2\} = E\{x^2\} - E\{\mu^2\}$$

$$Y_x(0) = \frac{N}{6} \sigma_m^2 \quad (4.31)$$

Typisch für instationäre Prozesse ist das Anwachsen der Varianz mit dem Stichprobenumfang  $N$  bei gleicher Schrittweite

Damit ist die Gesamtvarianz des Prozesses  $z$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_b^2}{1-\phi^2} + \frac{N}{6} \sigma_m^2 \quad (4.32)$$

Teilt man die Varianzen des stationären und des instationären Anteils im Verhältnis von  $\frac{1}{p+1}$  zu  $\frac{p}{p+1}$  auf, d.h.

$$\frac{\sigma_z^2}{1+p} = \frac{\sigma_b^2}{1-\phi^2} \quad \frac{p}{1+p} \sigma_z^2 = \frac{N}{6} \sigma_m^2 \quad (4.33)$$

dann ist

$$p = \frac{N}{6} \frac{\sigma_z^2}{\sigma_b^2} (1 - \phi^2) \quad (4.34)$$

und mit (4.20), (4.21)

$$p = \frac{N}{6} \frac{(1-\Theta)^2(1-\Phi^2)}{(1-\Phi\Theta)(\Theta-\Phi)} \quad (4.35)$$

wobei wieder  $\Theta > \Phi$  sein muß.

Damit kann der stochastische Prozeß (4.26) mit

$$z_t = \frac{\sigma_z}{\sqrt{p+1}} (y_t + \sqrt{p} x_t) \quad (4.36)$$

geschrieben werden, wobei  $x_t, y_t$  die Varianz 1 haben,  $y_t$  einem AR (1) Prozeß und  $x_t$  einem Random walk folgt.

Aus Gleichung (4.34) könnte geschlossen werden, daß bei zunehmendem Stichprobenumfang, d.h. wachsender Länge der Aufzeichnung der Wert  $p$  proportional zu  $N$  ebenfalls ohne Beschränkung wachsen würde. Damit wäre bei einer längeren Strecke der instationäre Anteil größer als bei einer kürzeren. Bei einer Verwendung des Prozesses (4.36) im Bereich des Erd- und Grundbaus ist das jedoch nicht der Fall. Durch die Klassifikation der Böden innerhalb einer Baustelle wird die mögliche Streuung innerhalb einer Klasse beschränkt. Wandert der lokale Mittelwert aus dem für diese Klasse festgelegten Bereich hinaus, dann liegt ein anderer Bodentyp vor, für den die aufgestellten Beziehungen nicht mehr gelten. Außerdem wurden sie nur für den durch (4.29) beschränkten Bereich aufgestellt, so daß Grenzwertbetrachtungen für  $N \rightarrow \infty$  nicht mehr im Definitionsbereich des Prozesses liegen. Innerhalb des betrachteten Gebietes sind die Inhomogenitäten und Instationaritäten durch die geologische Vorgeschichte bedingt und tragen mit dem so definierten Anteil  $\frac{p}{p+1}$  zur Gesamtvarianz bei. Der instationäre Mittelwertprozeß modelliert daher einen unbekanntem, großmaßstäblichen Trend des Mittelwerts, der wegen der im Bauwesen üblichen geringen Zahl der Aufschlüsse nicht erkannt werden kann und als Zufallsanteil in die statistische Betrachtung übernommen wird. Er findet daher auch seinen Niederschlag in den Autokovarianzen des Bodenmodells.

Sie werden mit

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N+k} (x_t - \mu) (x_{t+k} - \mu) \quad (4.37)$$

geschätzt. Diese Schätzfunktion weist zwar einen systematischen Bias auf gegenüber dem Erwartungswert (4.7) mit der Wichtung  $N-k$ , ihre Varianz ist jedoch geringer (JENKINS/WATTS, 1968).

Man erhält nach der Ableitung im Anhang für den Mittelwertanteil

$$Y(k) = \sigma_m^2 \frac{N}{6} \left[ 2 \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)^3 - \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \right] \quad (4.38)$$

Die Autokorrelationsfunktion wird mit (4.34) zu

$$\rho(k) = \frac{1}{p+1} \left[ \phi^k + p \left( 2 \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)^3 - \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \right) \right] \quad (4.39)$$

und für den kontinuierlichen Fall mit der Aufzeichnungslänge  $L$  und (4.29)

$$\rho(d) = \frac{1}{p+1} \left[ e^{-\Delta|d|} + p \left( 2 \left(1 - \frac{|d|}{L}\right)^3 - \left(1 - \frac{|d|}{L}\right) \right) \right] \quad (4.40)$$

$$-L \leq d \leq L$$

Im stationären Anteil muß  $\Delta$  groß genug sein, um ein genügend rasches Abklingen zu erlauben, insbesondere muß das Integral

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{e^{-\Delta|\xi|}}{p+1} d\xi \ll 1$$

sein, um Stationarität zu gewährleisten.

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) ist stetig in  $d$ , insbesondere für  $d = 0$  und nimmt dort den Wert 1 an.

In Bild 10 ist eine AKF dargestellt und ihre einzelnen Anteile erläutert. In Bild 11 sind die ersten Werte einer aus Zeitreihen geschätzter AKF im Vergleich mit der theoretischen AKF mit aus der Zeitreihenanalyse gewonnenen Parametern, dargestellt.

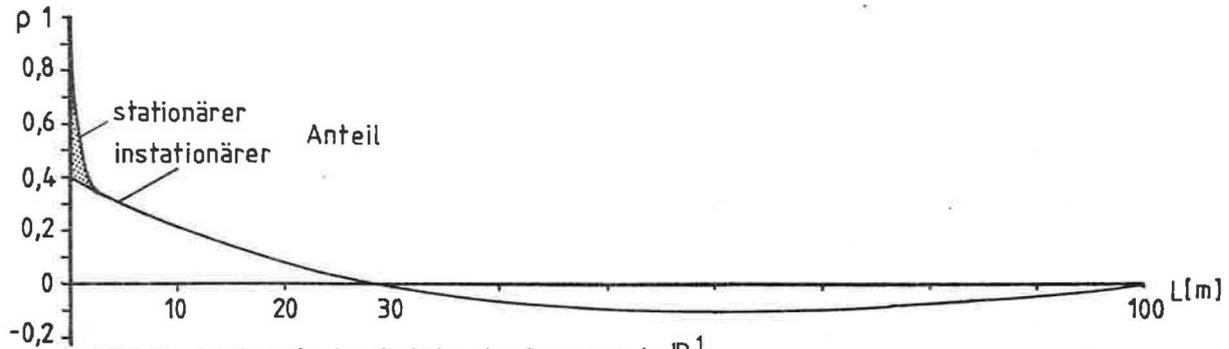


Bild 10 Autokorrelationsfunktion des Prozesses im  $IR^1$

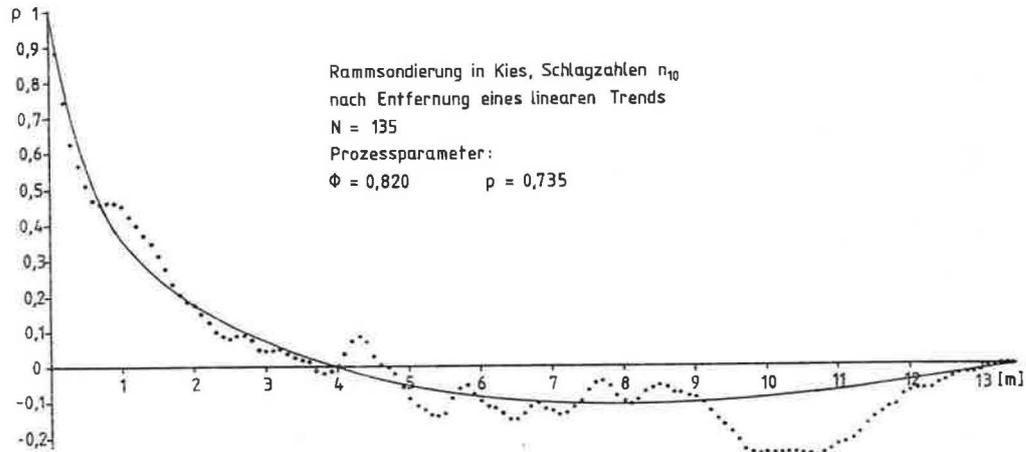


Bild 11 Theoretischer und tatsächlicher Verlauf der Autokorrelationen von Bodenproben

## 4.2 Spektrale Dichte des Prozesses

Die Spektraldichte erhält man aus der Wiener-Chintchin Berechnung mit

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \rho(t) dt$$

als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion. Da die Autokorrelationsfunktion eine gerade Funktion ist, kann  $S(\omega)$  auch in der reellen Form geschrieben werden:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \rho(\xi) \cos \omega \xi d\xi \quad (4.41)$$

Für den AR-Anteil

$$\rho_{AR} = \frac{e^{|\xi| \ln \phi}}{1 + \rho}$$

erhält man

$$S_{AR}(\omega) = \frac{2|\ln \phi|}{(|\ln \phi|^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{1 + \rho} \quad (4.42)$$

während für den Mittelwertanteil

$$\rho_{\mu} = \frac{\rho}{1 + \rho} [2(1 - \xi)^3 - (1 - \xi)]$$

wird

$$S_{\mu}(\omega) = \frac{2L}{\rho + 1} \left[ 12 \frac{\cos \omega L - 1 + \frac{(\omega L)^2}{2}}{(\omega L)^4} + \frac{\cos \omega L - 1}{(\omega L)^2} \right] \quad (4.43)$$

damit ist, (4.44)

$$S(\omega) = \frac{2}{1 + \rho} \frac{-\ln \phi}{(|\ln \phi|^2 + \omega^2)} + \frac{2L\rho}{1 + \rho} \left[ 12 \frac{\cos \omega L - 1 + \frac{(\omega L)^2}{2}}{(\omega L)^4} + \frac{\cos \omega L - 1}{(\omega L)^2} \right]$$

In Bild 12 sind einige typische Verläufe von  $S_{AR}(\omega)$  und  $S_{\mu}(\omega)$  dargestellt.  $S$  durchläuft ein Maximum für

$$\omega L \cong 4.58$$

das bedeutet, daß der lokale Mittelwert vorwiegend Perioden um näherungsweise 1,4 L folgt.

Da die spektrale Dichte stets größer gleich Null ist, ist nach dem Theorem von BOCHNER (vgl. LARSON/SHUBERT, 1979) jede anhand der AKF ermittelte Kovarianzmatrix positiv semidefinit, die AKF ist demnach uneingeschränkt brauchbar.

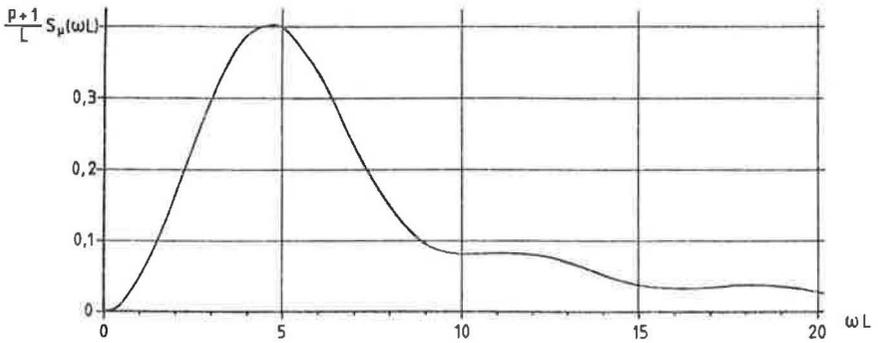
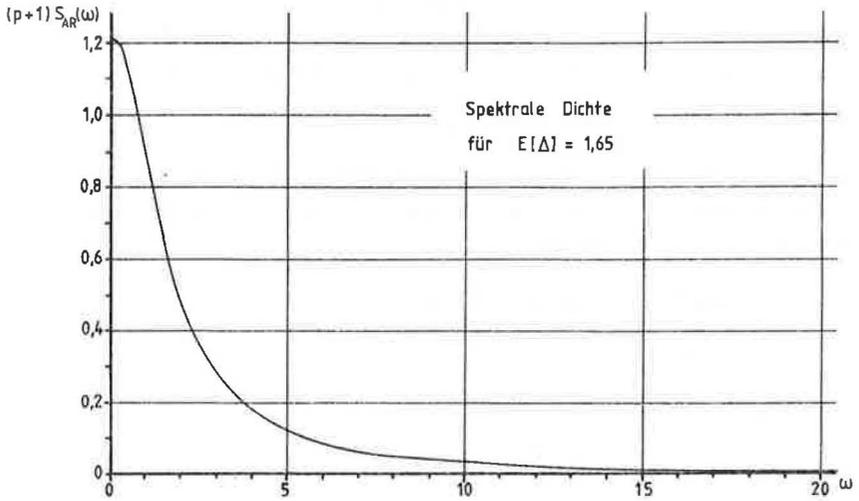


Bild 12 Spektrale Dichten von autokorreliertem und Mittelwertsprozeß

### 4.3 Einflüsse des Probenabstandes

Eine Veränderung des Abstandes der einzelnen Werte des Prozesses  $z_t = y_t + \mu_t$  läßt sich am einfachsten in den Differenzen berücksichtigen:

Abstand 1:  $z_t - z_{t-1} = y_t - y_{t-1} + m_t$

Abstand h:  $z_t - z_{t-h} = z_t - z_{t-1} + z_{t-1} - z_{t-2} + \dots + z_{t-h+1} - z_{t-h}$

$$= y_t - y_{t-h} + \sum_{j=t-h+1}^t m_j$$

Der Typ des Prozesses ist derselbe, die Parameter ändern sich aber

mit  $z_t - z_{t-h} = y_t^{(h)} - y_{t-h}^{(h)} + m_t^{(h)}$

wird

$$E(y_t^{(h)} y_{t-h}^{(h)}) = E\left[\frac{b_t}{1-\Phi B} \frac{b_{t-h}}{1-\Phi B}\right] = \frac{\Phi^h}{1-\Phi^2} \sigma_b^2$$

$$(\sigma_y^{(h)})^2 = \Phi^h \sigma_y^2$$

$$(\sigma_m^{(h)}) = h \sigma_m^2$$

$$\rho^{(h)} = \left(\frac{\sigma_m^{(h)}}{\sigma_b^{(h)}}\right)^2 \frac{N^{(h)}}{6} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_b^2} h \cdot \frac{N/h}{6} = \text{konst} \quad (4.45a)$$

Damit ist die logische Forderung erfüllt, daß sich bei einer Änderung des Probenabstandes weder die auf L normierte Autokorrelationsfunktion (4.40), noch die spektrale Dichte (4.44) des Prozesses ändern dürfen. Dagegen müssen sich die anhand eines ARIMA (1,1,1)-Prozesses

geschätzten Parameter näherungsweise wie folgt ändern:

$$\phi^{(h)} = \phi^h \quad (4.45b)$$

$$\lambda^{(h)} \equiv \lambda \sqrt{h \frac{(1-\phi)(1+\phi^h)}{(1+\phi)(1-\phi^h)}} \quad (4.45c)$$

$$\theta^{(h)} = 1 - \lambda^{(h)} \quad (4.45d)$$

#### 4.4 Varianzreduktion gleitender Mittelwerte

Eine umfangreiche Untersuchung der Varianzreduktion gleitender Mittel für verschiedene Autokorrelationsfunktionen wurde von VANMARCKE (1977a, 1979) veröffentlicht. Mit der Einführung der Varianzreduktionsfunktion für gleitende Mittelwerte der Länge  $w$

$$\Gamma_{(w)}^2 = \frac{\sigma_{\mu_w}^2}{\sigma_z^2} \quad (4.46)$$

mit

$$\mu_w = E \left[ \frac{1}{w} \sum z \right]$$

leitet er ein einfach zu handhabendes Berechnungsverfahren zur Bestimmung von Varianz und Autokorrelation gleitender Mittel ab. Es basiert im wesentlichen auf der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen der Geometrie, der Autokorrelation und der Varianz gleitender Mittel.

Für den hier untersuchten Prozeß (4.36) kann jeweils getrennt für den autoregressiven Prozeß  $y$  und den Mittelwertprozeß  $x$  die Varianzreduktionsfunktion  $\Gamma^2(w)$  berechnet werden.

Für den AR(1)-Anteil erhält man im diskreten Zustandsraum für ein Mittelungsintervall der Größe  $w$  mit

$$\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{1}{w} \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{w-1} \left( 1 - \frac{i}{w} \right) \rho_{AR}(i) \right)$$

unter Vernachlässigung kleinerer Glieder höherer Ordnung

$$\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{N-w}{Nw} \frac{1+\phi-2\phi^w}{1-\phi} \quad (4.47a)$$

bzw.  $\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{1}{w} \frac{1+\phi}{1-\phi}$  für  $\phi^w \ll 1$  (4.47b)

Im kontinuierlichen Zustandsraum mit

$$\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{2}{w} \int_0^w \left(1 - \frac{\xi}{w}\right) \rho_{AR}(\xi) d\xi$$

$$\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{2}{\Delta w} \left[1 - \frac{1-e^{-\Delta w}}{\Delta w}\right] \quad (4.48a)$$

bzw.

$$\Gamma_{AR}^2(w) = \frac{2}{\Delta w} \quad \text{für } \Delta w \gg 1 \quad (4.48b)$$

Die Varianzreduktionsfunktion des Mittelwertprozesses kann nach

$$\Gamma_{\mu}^2(w) = \frac{1}{w} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^w \left(1 - \frac{i}{w}\right) \rho_{\mu}\right) \quad (4.49a)$$

über den Erwartungswert

$$E[\Gamma_{\mu}^2(w)] = \frac{1}{\sigma_{\mu}^2} E[(\mu_w - \mu)^2] \quad (4.49b)$$

berechnet werden. Aus (4.28a) erhält man

$$\Gamma_{\mu}^2(w) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{w}{N}\right) \left(3 - \frac{w}{N}\right) \quad (4.50a)$$

während aus (4.29b) nach etwas aufwendiger Rechnung

$$\Gamma_{\mu}^2(w) = \left(1 - \frac{w}{N}\right)^2 \quad \text{wird.} \quad (4.50b)$$

Die Unterschiede zwischen (4.49a) und (4.49b) liegen in der Berücksichtigung des Mittelwertes  $\mu_w$  begründet. Während bei (4.49a)

$$E[\mu^2] = E[\mu_w^2] = E[\bar{\mu}_w^2]$$

angenommen wird, was bei stationären Prozessen richtig ist, in diesem Fall aber auf  $\Gamma_{\mu}^2$  bezogen auf

$$\bar{\mu}_w = \frac{1}{N-w} \sum_{i=1}^{N-w} \mu_w$$

führt, liefert (4.50b)  $\Gamma_w^2$  bezogen auf das Stichprobenmittel  $\mu$ . Da in der Anwendung stets mit  $\mu$  gearbeitet wird und  $\mu_w$  fast nie bekannt ist, wird im Folgenden stets Gl. (4.50b) verwandt.

Die Varianzreduktionsfunktion des gesamten Prozesses lautet damit im diskreten Zustandsraum

$$\Gamma^2(w) = \frac{1}{p+1} \left( \frac{N-w}{Nw} \frac{1+\phi-2\phi^w}{1-\phi} + p \left(1 - \frac{w}{N}\right)^2 \right) \quad (4.51a)$$

und im kontinuierlichen Zustandsraum

$$\Gamma^2(w) = \frac{1}{p+1} \left[ \frac{2}{\Delta w} \left(1 - \frac{1-e^{-\Delta w}}{\Delta w}\right) + p \left(1 - \frac{w}{L}\right)^2 \right] \quad (4.51b)$$

In Bild 13 sind einige Verläufe von  $\Gamma_w$  aufgetragen, der Abnahme der Standardabweichung gleitender Mittel. Deutlich zu erkennen ist der rasche Abfall der Kurven schon bei kleinen Mittelungslängen, bedingt durch den stationären AR(1)-Anteil und die anschließende nahezu lineare Abnahme infolge des instationären Mittelwerts. Damit ist zusätzlich ein einfaches indirektes Schätzverfahren für den Prozeßparameter  $p$  gegeben: bei ausreichend großen Stichprobenumfang entspricht die auf  $w/N$  bezogene Steigung im linearen Bereich von  $\Gamma_w$  dem Wert  $\sqrt{\frac{p}{p+1}}$ .

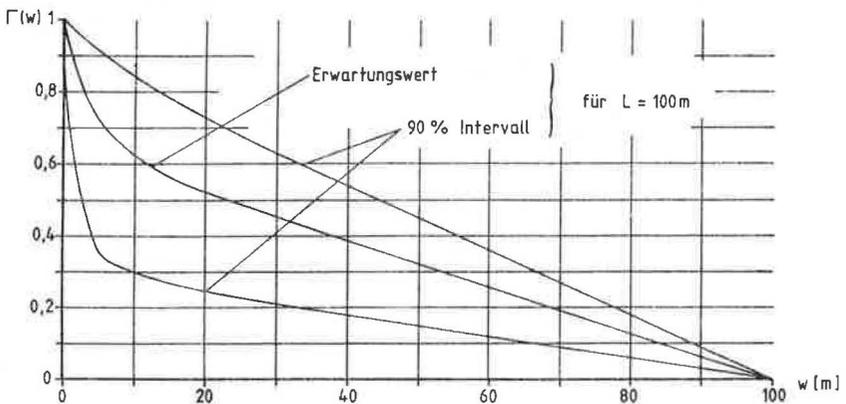


Bild 13 Reduktion der Standardabweichung durch gleitende Mittel

Die gleitenden Mittel folgen nicht demselben stochastischen Prozeß wie die Einzelwerte, wie aus ihren Autokorrelationsfunktionen in Bild 14 zu entnehmen ist.

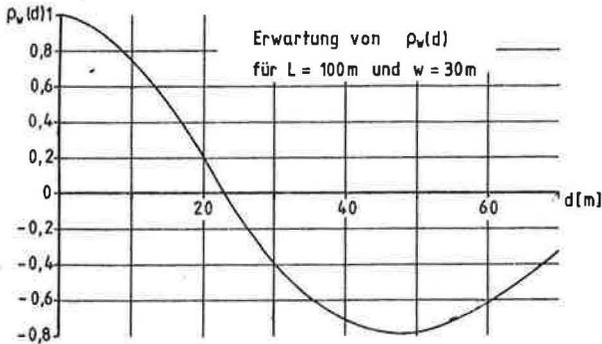
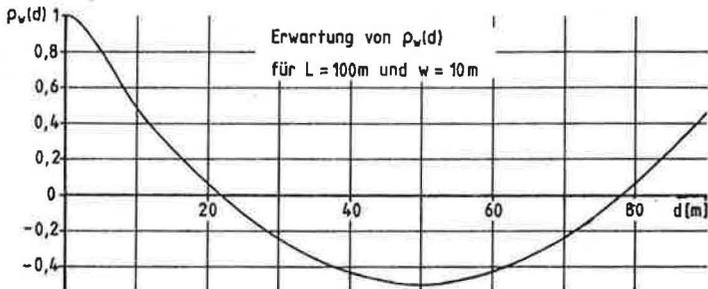


Bild 14 Autokorrelationsfunktionen gleitender Mittelwerte,  
berechnet nach VANMARCKE

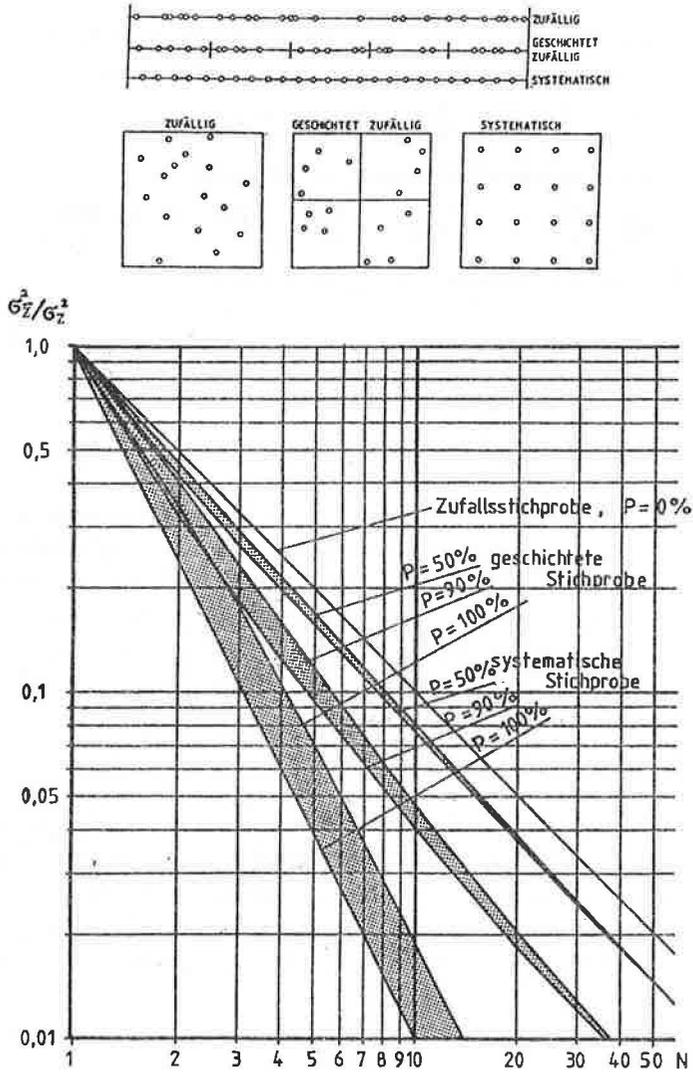


Bild 15 Varianz des geschätzten Mittelwertes bei verschiedenen Stichprobenverfahren

Der Prozeß (4.25) läßt sich umschreiben in

$$z_{t+1} = (1 + \phi) z_t - \phi z_{t-1} + y_{t+1} - y_t + m_{t+1} - \phi m_t \quad (4.55)$$

Befindet man sich an der Stelle  $t$  und sucht einen Schätzwert  $\hat{z}_{t+1}$  für  $z_{t+1}$ , so können die noch unbekanntes Zufallsvariablen  $y_{t+1}$ ,  $m_{t+1}$  durch ihre Erwartungswerte ersetzt werden:

$$E[y] = E[m] = 0$$

Damit ist 
$$\hat{z}_{t+1} = (1 + \phi) z_t - \phi z_{t-1} - (y_t - \phi m_t)$$

und für  $i \geq 2$ : 
$$\hat{z}_{t+i} = (1 + \phi) \hat{z}_{t+i-1} - \phi \hat{z}_{t+i-2}$$

als Rekursionsbeziehung.

Aus der allgemeinen Lösung der Gleichung

$$\hat{z}_{t+i} (1 - \phi B) (1 - B) = 0$$

mit 
$$\hat{z}_{t+i} = c_{t,0} + c_{t,1} \phi^i$$

wird durch Einsetzen für  $i = 1, 2$

$$c_{t,0} = z_t - \frac{\phi}{1-\phi} (z_t - z_{t-1}) - \frac{1}{1-\phi} (b_t + \phi m_t)$$

$$c_{t,1} = -\frac{\phi}{1-\phi} (z_t - z_{t-1}) + \frac{1}{1-\phi} (b_t + \phi m_t)$$

und als Schätzwert

$$\hat{z}_{t+1} = z_t + \phi \frac{1-\phi^1}{1-\phi} (z_t - z_{t-1}) - \frac{1-\phi^1}{1-\phi} (b_t + \phi m_t)$$

Die unbekanntes Zufallsvariablen werden eliminiert mit

$$b_t + \phi m_t = z_t - \phi z_{t-1} - (1 - \phi) \mu_t$$

wobei  $\mu_t$  der lokale Mittelwert an der Stelle  $t$  ist. Er kann wegen des dominanten Anteils niedrigfrequenter Schwingungen (vgl. die spektrale Dichte) als gleitendes Mittel der letzten  $n$ -Werte geschätzt werden:

$$\mu_t \approx \bar{z}_{t,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=t-n+1}^t z_j$$

Bei optimaler Größe des gleitenden Mittels erhält man aus dessen Varianz

$$\text{Var}(\bar{z}_{t,n}) = E[(\bar{z}_{t,n} - \mu_t)^2] \cong \frac{\sigma_b^2}{1-\phi^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\phi-2\phi^n}{1-\phi} - \frac{\sigma_m^2}{6} \cdot \frac{2n^2-3n+1}{t}$$

und mit (4.33)

$$\text{Var}(\bar{z}_{t,n}) = \frac{\sigma_z^2}{p+1} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\phi-2\phi^n}{1-\phi} + p \cdot \frac{2n^2-3n+1}{nt} \right) \quad (4.56)$$

Die optimale Mittelungslänge für die kleinste Varianz wird zu

$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1+\phi}{1-\phi} \frac{t-1}{2p}} \approx \sqrt{t} \quad (4.57)$$

Der "beste" Vorhersagewert ist

$$\hat{z}_{t+1} = \phi^t z_t + (1-\phi^t) \frac{1}{n_{\text{opt}}} \sum_{i=t+1-n_{\text{opt}}}^t z_i \quad (4.58)$$

mit einer Varianz von

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{z}) &= E[(\hat{z} - z)^2] \\ &\cong \frac{\sigma_z^2}{1+p} [1 - \phi^{2t} + p \frac{6t}{N}] + \text{Var}(\bar{z}_{t,n}) \end{aligned}$$

In Bild 16 ist das Beispiel einer Vorhersage anhand der Trockendichten einer verdichteten Kiesschüttung; das Prüfgerät war eine Isotopensonde, der Probenabstand beträgt 0,5 m. Die aus der Zeitreihe geschätzten Prozeßparameter können dem Bild entnommen werden. Wie man sieht, sind die Vorhersagemöglichkeiten bei diesem Prozeß ausgesprochen schlecht, selbst bei einem Probenabstand von nur 0,5 m. In der Praxis ist die Vorhersage daher nicht anwendbar.

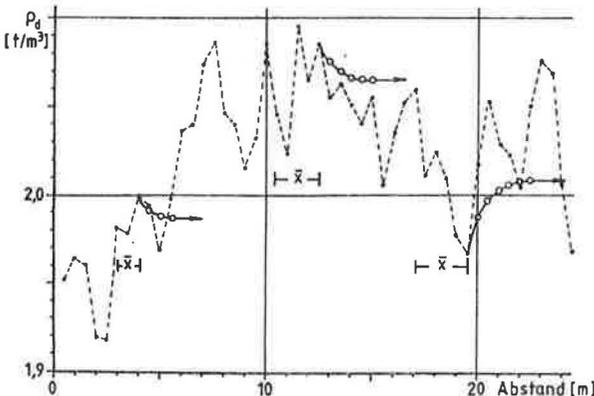


Bild 16  
Vorhersage von  
Bodeneigen-  
schaften

Im Erdbau wird anhand von Baukontrollmaßnahmen über die Abnahme von eingebauten Flächen entschieden. Folgt man den Regeln der ZTVE-StB 76, daß innerhalb gleitender Mittelwerte einer Stichprobe höchstens einer von 5 aufeinanderfolgenden Werten unterhalb eines Schwellenwertes  $\bar{z}^*$  liegen darf, und daß ein Mindestwert  $z^*$  von keinem Wert unterschritten wird, dann können die Auswirkungen dieses Prüfverfahrens auf den Prozeß überprüft werden. Vorausgesetzt wird hierbei, daß die Einzelwerte in so großem gegenseitigen Abstand entnommen werden, daß ihre Korrelation über den stationären AR(1)-Prozeß vernachlässigbar ist, also  $l \geq 20 + 30 m$ . Dann wird durch den Schwellenwert an den lokalen Mittelwert die Anforderung gestellt, daß  $\mu_1$  weit genug über  $\bar{z}^*$  liegen muß, damit er nur von 20 % der um  $\mu_1$  streuenden Werte des AR(1)-Prozesses unterschritten wird. Ohne auf die Häufigkeit von Extremen des AR(1)-Prozesses einzugehen (vgl. Abschn. 7.2), und Normalverteilung von  $z$  durch eine eventuelle Transformation der Werte vorausgesetzt, beträgt die 20 %-Fraktile des AR(1)-Prozesses

$$u_{20\%} = \frac{\bar{z}^* - \mu_1}{\sigma_{(AR)}} \leq -0,842$$

damit wird

$$\mu_1 \geq \bar{z}^* + 0,842 \frac{\sigma_z}{p+1} \quad (4.59)$$

Auf dem im Bauwesen üblichen 5 % Niveau kann unter Berücksichtigung der Verteilung von  $p$  für den lokalen Mittelwert

$$\mu_1 \geq \bar{z}^* + 0,29 \sigma_z \quad (4.60)$$

abgeschätzt werden.

Nimmt man als Obergrenze des Mindestwerts  $z^*$  näherungsweise die 5 % Fraktile der Verteilung der Kennwerte an, da die Erfahrung zeigt, daß dieser Wert bei Stichproben nur höchst selten unterschritten wird, so ist

$$u = \frac{z^* - \mu}{\sigma_z} \geq u_{5\%} = -1,645$$

und daraus

$$\sigma_z \leq \frac{\mu - z^*}{1,645} \quad (4.61)$$

Betrachtet man näherungsweise (4.60) als 5 % Fraktile des lokalen Mittelwerts  $\mu_i$ , so gilt für den Mittelwert

$$\frac{\mu_i - \mu}{\sigma_\mu} \approx u_{5\%} = -1,645$$

und man erhält mit der zweiseitigen 5 % Fraktile von p

$$\mu = \bar{z}^* + 0,9 + 1,3 \sigma_z \quad (4.62)$$

und im Mittel

$$\mu_x \approx \bar{z}^* \sigma_z$$

Eingesetzt in (4.61) kann die Standardabweichung abgeschätzt werden zu

$$\sigma_z = 1,3 + 2,9 (\bar{z}^* - z^*) \quad (4.63)$$

und im Mittel

$$\sigma_z \approx 1,5 (\bar{z}^* - z^*)$$

Die somit erhaltenen Beziehungen (4.62) und (4.69) ergeben durchaus zutreffende Größenordnungen. Hierbei wird allerdings angenommen, daß nur durch die Kontrolle erzwungen wird, daß die geforderten Fraktile eingehalten werden. Ist das Bodenmaterial so "gut", daß der Mittelwert  $\mu$  erheblich größer als  $\bar{z}^*$  ist, dann ist nach (4.61) eine wesentlich (für Bodenkennwerte etwa bis zu 2 Mal) größere Standardabweichung als nach (4.62) möglich. Um ein möglichst gleichmäßiges Material zu erhalten, sollte daher  $\bar{z}^*$  nur etwa mit einem Wert in der Größenordnung von  $\sigma_z$  unterhalb des erwarteten Mittelwertes  $\mu$  festgelegt werden. Mit den hier angegebenen Grenzen können die Abnahmebedingungen im Erdbau so abgeschätzt werden, daß ein geforderter Mittelwert und eine geforderte Standardabweichung näherungsweise erreicht werden.

#### 4.7 Extremwerte des Prozesses

Zur Abschätzung der Verteilung von Extremwerten des Prozesses werden in den klassischen Lösungen von RICE (1944) die zweiten Momente des ein- und zweimal differenzierten Prozesses benötigt. Als Forderung an den Prozeß muß dabei die Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel erfüllt

sein, was durch

ausgedrückt werden kann. Da der Prozeß, vor allem aufgrund seines stationären AR(1)-Anteiles, diese Forderung nicht erfüllt, kann das Verhalten von Extremwerten nur mit Näherungen abgeschätzt werden.

RICE (1944) fand für die mittlere Anzahl der "Überquerungen" des Mittelwerts durch einen differenzierbaren Prozeß die Beziehung

$$v_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_z}{\sigma_z} \quad (4.64)$$

Hierbei ist  $\sigma_z$  die Standardabweichung des differenzierten Prozesses. Die Einheit von  $v_0$  ist die Inverse des Längen- oder Zeitmaßstabes.

Für den hier untersuchten stochastischen Prozeß wurde die Beziehung  $\sigma_z^2/\sigma_z^2$  in Gleichung (3.8) näherungsweise ermittelt. Hieraus erhält man die nicht dimensionsreine Beziehung

$$v_0 \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \frac{1-e^{-\Delta}}{1+p}} \quad [m^{-1}] \quad (4.65)$$

Eine Überprüfung anhand der vorliegenden Stichproben machte die Einführung eines empirischen Korrekturfaktors  $\alpha$  für Bodenproben üblicher Größe erforderlich. Mit

$$v_0 = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{2 \frac{1-e^{-\Delta}}{1+p}} \quad [m^{-1}] \quad (4.66)$$

$$\bar{\alpha} = 0,8 \quad s_{\alpha} = 0,22 \quad (4.67)$$

wurde eine hinreichende Übereinstimmung gefunden.

Die Häufigkeit, mit der der Prozeß ein vorgegebenes Niveau  $a$  überquert, ergibt sich dann nach RICE zu

$$v_a = v_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (4.68)$$

Die Häufigkeit mit der dieses Niveau nur nach oben überschritten wird, ergibt sich zu

$$v_a^*(\mu_w) = \frac{1}{2} v_a(\mu_w) \quad (4.69)$$

Für die Unterschreitung eines Niveaus gelten dieselben Beziehungen.

Der mittlere Abstand dieser Überschreitungsbereiche ergibt sich näherungsweise zu

$$\frac{1}{2 v_a(\mu_w)}$$

## 5. Erweiterung auf ebene und räumliche Probleme

Der in Abschn. 4 formulierte stochastische Prozeß ist zunächst nur entlang von Geraden gültig, und kann anhand der vorliegenden Stichproben auch nur für diesen Fall verifiziert werden. Die für eine praktische Anwendung notwendige Erweiterung auf Ebene und Raum sollte auf möglichst wenigen antizipierenden Annahmen beruhen und zu einer konsistenten Formulierung führen.

Als Referenzmaß im linearen Fall wurde die Gesamtlänge der untersuchten Strecke verwendet. Um den Bezug zu grundbaulichen Fragestellungen beizubehalten, werden im ebenen Fall Rechtecke und im räumlichen Quader benutzt.

### 5.1 Der stationäre, autoregressive Prozeß

Für diese Komponente ist im Rahmen der bekannten Theorie eine Verallgemeinerung ohne weitere Probleme möglich. Der AR-Prozeß ist in jeder beliebigen Dimension zulässig (vgl. BAECHER/VENEZIANO, 1981). Seine Autokorrelationsfunktion lautet

$$\rho_{AR}(\underline{d}_1, \underline{d}_2) = e^{-\Delta|\underline{d}_2 - \underline{d}_1|} \quad (5.1)$$

wenn  $\underline{d}_1, \underline{d}_2$  Ortsvektoren und  $|\underline{d}_2 - \underline{d}_1|$  die euklidische Norm ihrer Differenz ist. Der Parameter  $\Delta$  bleibt unverändert; der AR-Prozeß ist weiterhin stationär.

### 5.2 Varianz des instationären Mittelwertprozesses

Aufgrund der Instationarität dieser Komponente ist zu erwarten, daß eine Veränderung der Größe des Referenzgebietes auch zu einer Veränderung seines Anteils an der Gesamtvarianz führt. Zu seiner Berechnung wird analog zum Random walk des linearen Falles angenommen:

- Die Differenz zweier benachbarter Mittelwerte  $m_i = \mu_{i+1} - \mu_i$  ist unabhängig von ihrer Lage zueinander eine  $(0, \sigma_m)$  normalverteilte Zufalls Variable. Über ihre gegenseitigen Abhängigkeiten (Autokorrelation) kann, ausgehend vom linearen Fall nur gesagt werden, daß die Differenzen entlang einer Geraden unabhängig voneinander sind.

Betrachtet man zwei beliebig lokale Mittelwerte  $\mu_i$  und  $\mu_k$  als Anfangs- und Endpunkt einer Kurve, so kann  $\mu_k$  als Summe von  $\mu_i$  und allen auf dieser Kurve liegenden  $m_n$  errechnet werden.

Führt man einen Grenzübergang vom diskreten in den kontinuierlichen Ereignisraum durch, so ist.

$$\mu_k - \mu_i = \int_{\xi=i}^{\xi=k} d\mu(\xi) = \int_{\xi=i}^{\xi=k} m(\xi) d\xi \quad (5.2)$$

Dieses stochastische Integral kann mit der Definition des Itô-Integrals erklärt werden. Aber unabhängig von seiner stochastischen Interpretation hat es den Charakter eines Kurvenintegrals, dessen Wert nur von den Integrationsgrenzen bestimmt wird, d.h. wegunabhängig ist. Werden aus diesem Grund die lokalen Mittelwerte, die von nun an mit  $\mu_i$  anstelle von  $x_t$  wie in Abschn. 4 bezeichnet werden, als Potential des stochastischen Feldes  $m$  betrachtet, dann können die Wegintegrale mit den üblichen Beziehungen der Feldtheorie berechnet werden. Im Folgenden werden wieder der besseren Übersicht halber Summen und Differenzen statt Integralen und Differentialen benutzt. Bezeichnet man die Differenzen des Mittelwertprozesses in Richtung der kartesischen Koordinaten  $i, j, k$  mit

$$\left. \begin{aligned} m_i(i, j, k) &= \mu(i+1, j, k) - \mu(i, j, k) \\ m_j(i, j, k) &= \mu(i, j+1, k) - \mu(i, j, k) \\ m_k(i, j, k) &= \mu(i, j, k+1) - \mu(i, j, k) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

entsprechend den Richtungsableitungen von Potentialen, dann ist

$$\mu(i_b, j_b, k_b) - \mu(i_a, j_a, k_a) = \sum_{i_a}^{i_b} m_i(i, j, k) + \sum_{j_a}^{j_b} m_j(i, j, k) + \sum_{k_a}^{k_b} m_k(i, j, k) \quad (5.4)$$

Wird die oben formulierte Annahme dahingehend ergänzt, daß Differenzen entlang orthogonaler Richtungen unabhängig seien, d.h.

$$E[m_n(i,j,k) m_l(u,v,w)] = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_m^2 \text{ für } n=l, i=u, j=v, k=w \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

dann können ebene und räumliche Probleme auf den linearen Fall zurückgeführt werden.

Für den Mittelwert eines Quaders mit den Seitenlängen A, B und C erhält man, wenn zur Vereinfachung wieder  $\mu(0,0,0) = 0$  angenommen wird:

$$\mu = \frac{1}{ABC} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^C \left( \sum_{r=1}^i m_i(r,j,k) + \sum_{s=1}^j m_j(i,s,k) + \sum_{t=1}^k m_k(i,j,t) \right)$$

und

$$E[\mu^2] = \frac{\sigma_m^2}{3} (A+B+C) \quad (5.6)$$

sowie für die Einzelwerte

$$\mu(i,j,k) = \sum_{r=1}^i m_i(r,j,k) + \sum_{s=1}^j m_j(i,s,k) + \sum_{t=1}^k m_k(i,j,t)$$

und

$$E[\mu(i,j,k)^2] = \frac{\sigma_m^2}{2} (A+B+C)$$

Die Varianz des mehrdimensionalen Mittelwertprozesses beträgt damit

$$\text{Var}(\mu_i) = \frac{\sigma_m^2}{6} (A+B+C) \quad (5.7)$$

Wie zu erwarten, nimmt die Varianz des instationären Mittelwertprozesses mit der Größe des Untersuchungsbereiches zu. Der Prozeßparameter  $p$  muß demnach durch

$$p \Rightarrow p \left( 1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \quad (5.8)$$

ersetzt werden. Damit ist für die Varianz ein konsistenter Übergang zwischen linearem und mehrdimensionalem Fall erreicht.

### 5.3 VANMARCKES Varianzreduktionsfunktion

Für den stationären AR-Prozeß gibt VANMARCKE (1977a) eine Approximation der Varianzreduktion eines Quaders mit den Seitenlängen a, b, c an mit

$$\Gamma_{AR}^2(x) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta x} & \text{für } x \geq \frac{\Delta}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.9)$$

zu

$$\Gamma_{AR}^2(a,b,c) \cong \Gamma_{AR}^2(a) \Gamma_{AR}^2(b) \Gamma_{AR}^2(c) \quad (5.10)$$

Im Anhang wurde die Varianzreduktionsfunktion des instationären Mittelwertprozesses abgeleitet zu

$$\Gamma_{\mu}^2(a,b,c) \cong \left(1 - \frac{a+b+c}{A+B+C}\right)^2 \quad (5.11)$$

Die Varianzreduktion eines Quaders mit den Seitenlängen a, b, c für den Gesamtprozeß, betrachtet in einem Quader mit den Seiten A, B, C lautet damit

$$\Gamma^2(a,b,c) = \frac{1}{1+p\left(1+\frac{B+C}{A}\right)} \left[ \Gamma_{AR}^2(a) \Gamma_{AR}^2(b) \Gamma_{AR}^2(c) + p\left(1+\frac{B+C}{A}\right) \left(1 - \frac{a+b+c}{A+B+C}\right)^2 \right] \quad (5.12)$$

### 5.4 Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion für den stationären AR-Prozeß lautet mit dem räumlichen Abstand d:

$$\rho_{AR} = e^{-\Delta d} \quad (5.13)$$

Der Mittelwertprozeß hatte im eindimensionalen Fall die erwartungstreue Autokorrelationsfunktion

$$\rho_{\mu}(d) = 2\left(1 - \frac{d}{L}\right)^2 - 1$$

mit der zugehörigen Varianzreduktion  $\Gamma_{\mu}^2 = \left(1 - \frac{d}{L}\right)^2$ . Da zwischen beiden Funktionen eine eindeutige statistische Relation besteht, kann für den mehrdimensionalen Fall aus  $\Gamma_{\mu} = \left(1 - \frac{a+b+c}{A+B+C}\right)$  auf die erwartungstreue Autokorrelationsfunktion

$$\rho_{\mu}(d) = 2 \left( 1 - \frac{a+b+c}{A+B+C} \right)^2 - 1 \quad (5.14)$$

geschlossen werden. Im linearen Fall erhielt man eine bessere Schätzfunktion mit geringerer Varianz (aber biasbehaftet) durch Multiplikation mit  $(1 - \frac{d}{L})$ . Dieser Faktor entsteht aus den Summationsgrenzen und wird als geometrisches Kovariogramm  $g$  bezeichnet.

Unter anderem für Kreis und Kugel wurden die geometrischen Kovariogramme von ZUBRZYCKI (1957, Zit. in MATERN, 1960) abgeleitet. Für die Dimension  $n$  lautet sie mit

$$\xi = \frac{d}{d_{\max}}$$

zu

$$\text{Gerade} \quad n = 1 \quad g_I = 1 - \xi \quad (5.15 a)$$

$$\text{Kreis} \quad n = 2 \quad g_{II} = 1 - \frac{2}{\pi} [ \xi \sqrt{1 - \xi^2} + a \sin \xi ] \quad (5.15 b)$$

$$\text{Kegel} \quad n = 3 \quad g_{III} = 1 - \frac{3}{2} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \quad (5.15 c)$$

Bei Rechtecken und Quadern hängt das geometrische Kovariogramm außer von ihren Abmessungen noch von Annahmen über die Verteilung der Richtungen von  $d$  ab. Um eine isotrope Formulierung zu erreichen, wird näherungsweise angenommen, daß Kreis und Quadrat sowie Kugel und Würfel dieselben Kovariogramme aufweisen. Für Rechtecke sollte  $g$  zwischen  $g_I$  und  $g_{II}$  verlaufen, für Quader zwischen  $g_I$  und  $g_{III}$ . Als Approximation wird

$$g = 1 - \xi \left[ 1 - \frac{B+C}{4A} (1 - \xi^2) \right] \quad (5.16)$$

mit  $\xi = \frac{d}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  verwendet.

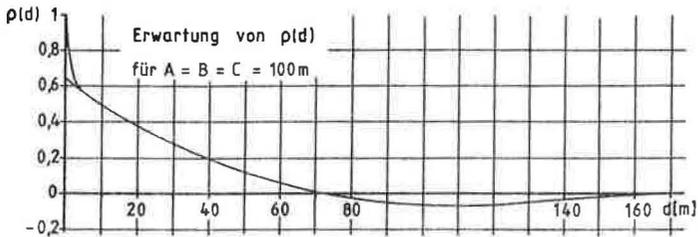
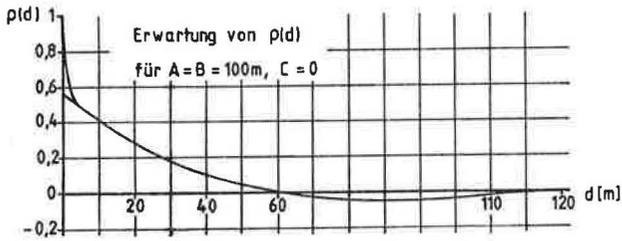
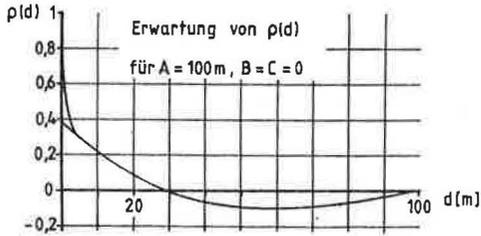


Bild 17 Autokorrelationsfunktion des Prozesses  
für Gerade, Quadrat und Würfel

Die Schätzfunktion mit der näherungsweise kleinsten Varianz für den Mittelwertprozeß lautet damit

$$\rho_{\mu}(d) = \left[ 2 \left( 1 - \frac{d}{A+B+C} \right)^2 - 1 \right] \left[ 1 - \frac{d}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left( 1 + \frac{B+C}{4A} \left( 1 - \frac{d^2}{A^2+B^2+C^2} \right) \right) \right] \quad (5.17)$$

und die Autokorrelationsfunktion des Gesamtprozesses wird zu

$$\rho(d) = \frac{1}{1 + \rho \left( 1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right)} \left[ \rho_{AR}(d) + \rho \left( 1 + \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \right) \rho_{\mu}(d) \right] \quad (5.18)$$

Für Gerade, Quadrat und Würfel und die Erwartungswerte von  $\rho$  und  $\Delta$  ist ihr Verlauf in Bild 17 dargestellt. Ohne näher auf die Zulässigkeit der Autokorrelationsfunktion einzugehen, sei hier angemerkt, daß sie die statistischen Anforderungen aus der Mehrdimensionalität erfüllt, wie z. B.

$$\rho(d) < 1 \quad \text{für } d \neq 0$$

$$n = 2 \quad \rho(d) \geq -0,403$$

$$n = 3 \quad \rho(d) \geq -0,218 \quad (\text{Matérn 1960})$$

Der Nachweis der position Semidefinitheit kann im mehrdimensionalen Fall nicht mehr so einfach geführt werden, wie im linearen. Einige Anmerkungen dazu werden im nächsten Kapitel gemacht.

## 5.5 Spektrum

Die spektrale Dichte des AR-Prozesses bleibt wie dessen Autokorrelationsfunktion unverändert und lautet

$$S(\underline{\omega}) = \frac{2\Delta}{\Delta^2 + |\underline{\omega}|^2} \quad (5.19)$$

wobei

$$\underline{\omega} = (\omega_i, \omega_j, \omega_k)^T$$

Für den Mittelwertprozeß ist eine so allgemeine Formulierung nicht mehr möglich. Durch eine Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion kann ihr Spektrum entlang einer Geraden ermittelt werden.

In Bild 18 sind Verläufe für Quadrate ( $A = B, C = 0$ ) und Würfel ( $A = B = C$ ) dargestellt. Ohne näher auf Fouriertransformationen in höhere Dimensionen einzugehen, können durch folgende Beziehungen von PANCHEV (1971) und TSUJI (1955), zitiert in BACHER/VENEZIANO (1981) die spektralen Dichten in höhere Dimensionen umgerechnet werden:

$S_{\mu I}(\omega)$  bezeichnen die spektrale Dichte des Mittelwertprozesses entlang einer Geraden und  $S_{\mu n}(\omega) = f_{\underline{y}}(\omega \underline{y}_0)$  mit  $\underline{y}_0$  als beliebigem Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$  die spektrale Dichte des isotropen Zufallsfelders im  $\mathbb{R}^n$  dann ist

$$S_{\mu II}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega_1} \left[ \frac{1}{\omega_1} \frac{dS_{\mu I}(\omega)}{d\omega_1} \right] \sqrt{\omega_1^2 - \omega^2} d\omega_1 \quad (5.20)$$

$$S_{\mu III}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\omega} \frac{dS_{\mu I}(\omega)}{d\omega} \quad (5.21)$$

Die numerische Lösung dieser Beziehung zeigt Bild 18. Wie man erkennt, sind für den Würfel und außer für kleine  $\omega$  auch für das Quadrat die Spektren stets positiv semidefinit. Die negativen Werte des Spektrums für das Quadrat sind ohne weitere Bedeutung. Da unter Berücksichtigung der Abmessung die größte Periodenlänge gleich der doppelten Länge der Diagonalen mit  $2A\sqrt{2}$  ist und dafür ist das Spektrum bereits positiv. Umgekehrt kann daraus gefolgert werden, daß die Autokorrelationsfunktion im Allgemeinen nur innerhalb des definierten Bereiches zulässig ist und daß sie nicht darüber hinaus, z. B. mit

$$P(|x| > \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}) = 0$$

erweitert werden darf.

Nachdem es auch bei den bisherigen Anwendungen dieser Autokorrelationsfunktion keine Probleme mit der positiven Semidefinitheit gab, kann sie der hier entwickelten funktionalen Beziehung zumindest in einem großen Bereich realistischer Anwendungen unterstellt werden.

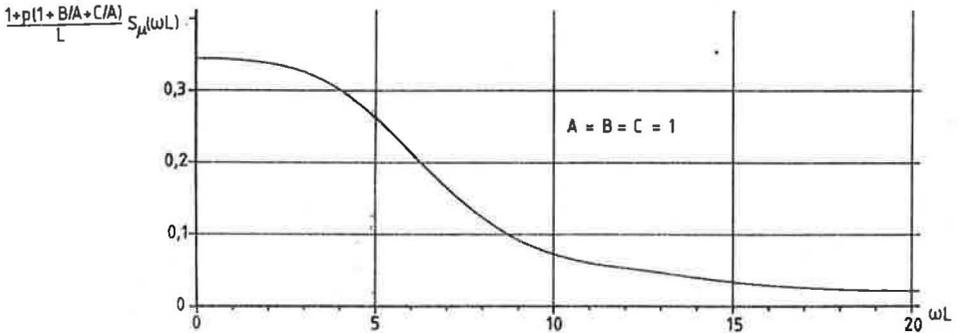
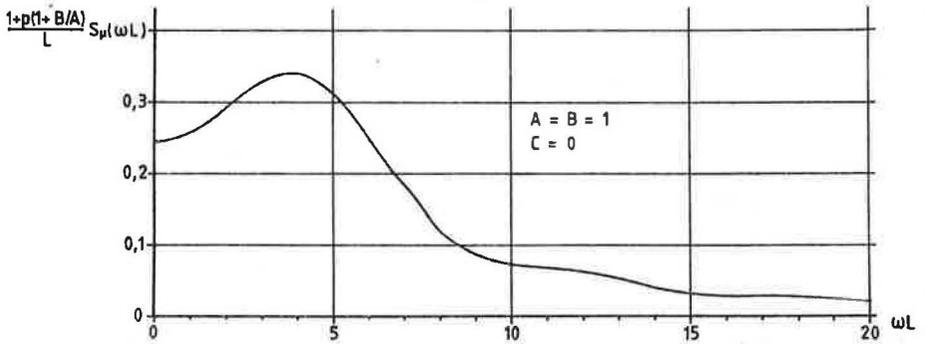
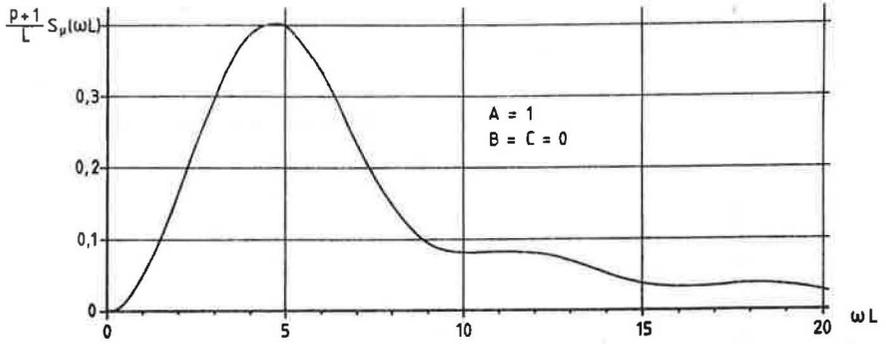


Bild 18 Spektrale Dichte des Mittelwertprozesses  
im  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$

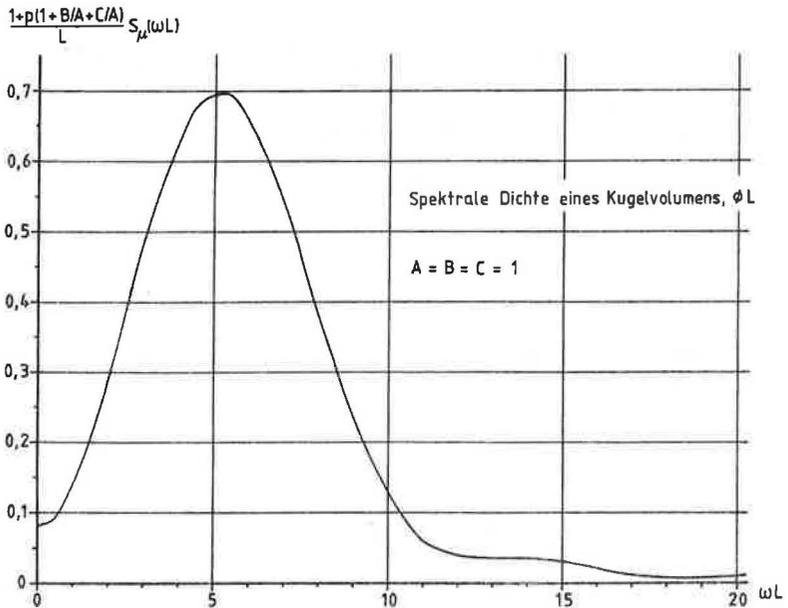
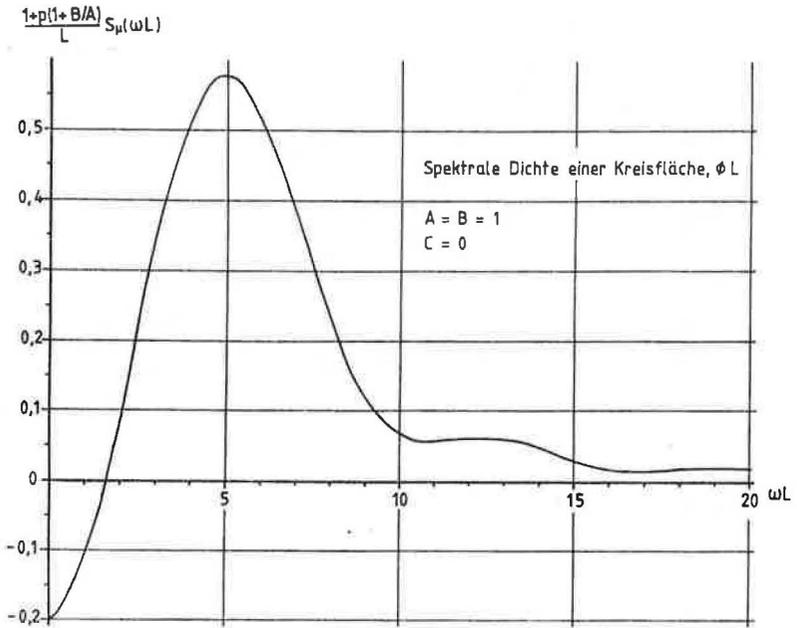


Bild 18 Spektrale Dichte des Mittelwertprozesses  
im  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$

## 6. Hilfsmittel für die Anwendung

Bisherige Berechnungen haben gezeigt, daß eine Abschätzung von  $p$  und  $\Delta$  mit ca.  $0,4\beta$  im Rahmen des statistischen Sicherheitskonzepts ausreichend ist, wobei  $\beta$  für die erforderliche operative Versagenswahrscheinlichkeit eingesetzt werden kann. Nach den "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen" ergibt sich:

Sicherheitsklasse	Sicherheitsindex*	ungünstig für Versagenswahrscheinlichkeit wenn Autokorrelation			
		groß		klein	
-		$\Delta$ [ $m^{-1}$ ]	$p$	$\Delta$ [ $m^{-1}$ ]	$p$
1	2,5	0,37	1,00	2,72	0,14
	4,2	0,49	2,00	5,36	0,07
2	3,0	0,30	1,22	3,32	0,11
	4,7	0,15	2,41	6,55	0,06
3	3,5	0,26	1,43	3,90	0,09
	5,2	0,12	2,94	8,00	0,05

\* obere Zeile: Grenzzustand der Gebrauchsfähigkeit  
 untere Zeile: Grenzzustand der Tragfähigkeit

Wie man sieht, ändern sich die Fraktilwerte zwischen den einzelnen Sicherheitsklassen nur gering, so daß im Rahmen einer statistischen Sicherheitsberechnung eine Iteration nach ihrem Einflußwert  $\alpha$  im allgemeinen entfallen kann.  $\Delta$  und  $p$  können näherungsweise je nach nachzuweisendem operativem Sicherheitsindex  $\beta$  obiger Tabelle entnommen werden. Der Nachweis wird dann auf der "sicheren Seite" liegend geführt.

### 6.1 Varianzreduktion bei Mittelung

Die Formeln für die Varianzreduktion der Streuung der Einzelwerte sind in den Abschn. 4,3 und 5,3 genannt. Während der instationäre Anteil

$$\Gamma_{\mu}^2 = \left(1 - \frac{a+b+c}{A+B+C}\right)^2$$

ausreichend genau ist und leicht berechenbar, sind die VANMARCKESchen Abschätzungen für den AR-Anteil mit

$$\Gamma_{AR}^2 = \frac{2}{\Delta d} \leq 1$$

vor allem im Bereich von  $d \approx 1/\Delta$  nur grobe Approximationen. Deshalb wurde für verschiedene Werte von  $\Delta$  für Flächen und Kuben  $\Gamma_{AR}^2$  durch numerische Faltung berechnet und in den Tabellen im Anhang dargestellt.

Autokorrelationen zwischen gleitenden Mitteln können mit den Beziehungen von VANMARCKE (1977a) abgeschätzt werden,

## 6.2 Anisotrope Baugrundverhältnisse

Homogene stationäre Prozesse werden als anisotrop bezeichnet, wenn ihre Autokovarianzen nicht mehr allein vom räumlichen Abstand, sondern auch von der Richtung dieses Abstandes abhängig sind. Im Boden ist dies vor allem bei fluviatilen oder tidal beeinflussten Sedimenten der Fall, die vorwiegend in Linsen oder in näherungsweise parallelen Schichten abgelagert werden. Da im Bauwesen im Gegensatz zur Geologie nur eine sehr grobe Klassifizierung verwendet und im allgemeinen zwischen diesen einzelnen Schichten nicht unterschieden wird, muß diese Anisotropie innerhalb des stochastischen Bodenmodells Berücksichtigung finden. Durch den instationären Mittelwertsanteil kann das nicht ermöglicht werden, da er vorwiegend langwellige Schwingungen erzeugt (vgl. Bild 12) und einen unbekanntem Trend modelliert. Dagegen kann Anisotropie mit dem stationären AR(1)-Anteil leicht erzeugt werden. Nimmt man an, daß diese Linsen oder Schichten vorwiegend horizontal liegen, so kann durch die Wahl unterschiedlicher Parameter  $\Delta_h$  für horizontale und  $\Delta_v$  für vertikale Richtungen ein anisotropes Verhalten erzeugt werden. Den stationären Autokorrelationsanteil erhält man dann in einem Koordinatensystem mit z als vertikaler Achse für einen Abstand d mit den Komponenten  $d_x$ ,  $d_y$  und  $d_z$  in den Koordinatenrichtungen zu

$$\rho_{AR}(d) = e^{-\sqrt{(d_x^2 + d_y^2) \Delta_h^2 + d_z^2 \Delta_v^2}}$$

Aufgrund der Ergebnisse der Zeitreihenanalysen kann für  $\Delta_h$  dieselbe Verteilung wie für  $\Delta$  angenommen werden mit

$$\Delta_h = \Delta = e^{u_h}$$

während in vertikaler Richtung  $\Delta_z$  von der Dicke und der Gleichmäßigkeit der einzelnen Schichten abhängt. Seine Größenordnung kann näherungsweise durch die geschätzte Häufigkeit der Querungen des Mittelwerts in horizontaler und vertikaler Richtung ermittelt werden. Bezeichnet man sie entsprechend Abschn. 4.7 mit  $V_{0,h}$  und  $V_{0,v}$ , so ergibt sich für kleine Prozeßparameter  $\Delta$  aus (4.66) und (4.67)

$$\frac{\Delta_v}{\Delta_h} \approx \left( \frac{V_{0,v}}{V_{0,h}} \right)^2$$

Ein möglicher Einfluß der Anisotropie auf den Prozeßparameter  $p$  kann aufgrund der vorliegenden Zeitreihenanalysen nicht ermittelt werden. Als Schätzwert muß daher derselbe Wert wie im homogenen Feld verwendet werden.

Damit sind Beziehungen gegeben, die es ermöglichen, auch anisotrope Böden mit dem stochastischen Bodenmodell zu beschreiben.

## 7. Anwendung auf bodenmechanische Probleme

Mit dem unter 6. dargestellten Bodenmodell wurden einige anwendungsorientierte Berechnungen durchgeführt. Das Ziel war, die Plausibilität des Modells zu untermauern und den Streubereich der Parameter einzugrenzen. Weiterhin sollte untersucht werden, ob Aussagen über die Einflüsse der verschiedenen Parameter möglich sind. Zur leichteren Interpretation der Ergebnisse wurde der Mittelwert stets als bekannt vorausgesetzt.

### 7.1 Grundbruch

Am Beispiel des Grundbruchs in nichtbindigem Boden wurde die Größenordnung der Varianzreduktion abgeschätzt. Dazu wurde für vorgegebene operative Versagenswahrscheinlichkeiten mit  $\beta = 4,2, 4,7$  und  $5,2$  die Grundbruchgleichung ausgewertet und entlang der vom Bemessungswert abhängigen theoretischen Bruchfuge numerisch die Varianzreduktion ermittelt. Dabei wurde der mit der Bruchnormalspannung gewogene Mittelwert benutzt. Iteriert wurde nach der kleinstmöglichen vertikalen Fundamentbelastung. Zur Untersuchung des Einflusses von Horizontalkräften wurde die Resultierende mit  $0^\circ, 10^\circ$  und  $20^\circ$  Neigung angesetzt. Als Parameter des lognormalverteilt angenommenen Reibungswinkels wurde der Mittelwert jeweils mit  $\mu = 22,5^\circ, 30^\circ$  und  $37,5^\circ$  angesetzt, der Variationskoeffizient mit  $3, 7,5$  und  $15\%$  angenommen. Die Fundamente waren quadratisch mit Flächen von  $0,5 \text{ m}^2$  bis  $100 \text{ m}^2$ . Als Bezugsvolumen wurden Bodenquader mit Abmessungen von  $37,5 \times 37,5 \times 5 \text{ m}$  bis  $1000 \times 1000 \times 10 \text{ m}$  untersucht. Ein merklicher Einfluß dieses Volumens auf die Varianzreduktion war erst an einem Verhältnis Fundament/Baufläche  $\geq 0,001$  zu bemerken und kann im weiteren auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt werden. Bei den Berechnungen realisieren sich  $p$  und  $\Delta$  im Bereich von  $\max(u_p; -u_\Delta) \approx 0,4\beta$ , wobei je nach Größe der Fundamentfläche  $\Delta$  oder  $p$  maßgebend waren. In Bild 19 ist der Verlauf der Einflußwerte  $\alpha$  des Reibungswinkels multipliziert mit dem Reduktionsfaktor der Standardabweichung  $\Gamma$ , in Abhängigkeit von der Fundamentfläche aufgetragen.

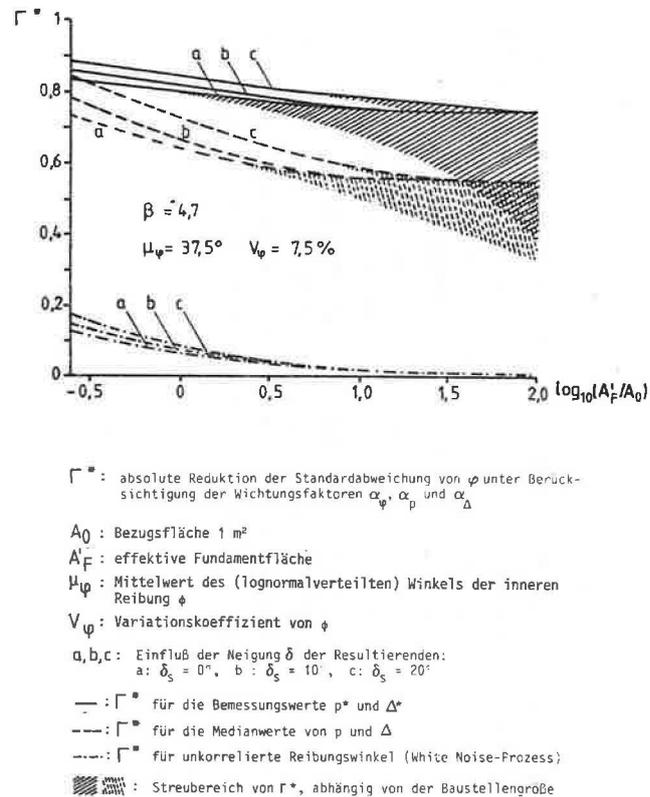
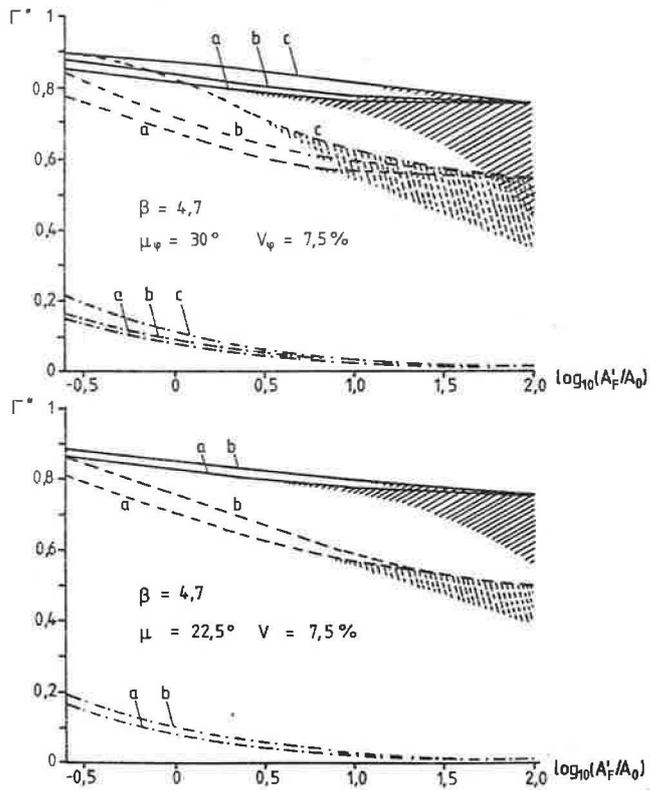


Bild 19 Reduktion der Standardabweichung von Bodenkennwerten für den Grundbruch

Diese Werte lassen sich direkt als Reduktion der Standardabweichung der Scherfestigkeit interpretieren. Werden sie daher mit  $\Gamma^*$  bezeichnet, so kann bei einem gewöhnlichen Standsicherheitsnachweis die anhand von Versuchen und aus der Erfahrung geschätzte Standardabweichung von Reibungswinkel und Kohäsion mit  $\Gamma^*$  reduziert werden. Es fällt auf, daß die Reduktion nur sehr gering ist, verglichen mit den Werten für einen unkorrelierten, zufällig und regellos streuenden Prozeß. Daß dies durchaus plausibel ist, kann auch an den deterministischen Sicherheitsbeiwerten für den Grundbruch erkannt werden, die mit  $\eta = 2$  (LF1) bzw.  $\eta = 1,5$  (LF2) für den Bereich des Grundbaus relativ hoch liegen (vergleichen z. B. mit der Sicherheit gegen Böschungsbruch von  $\eta = 1,3$ ).

Diese geringe Varianzreduktion hat auch ihre Auswirkungen auf die Schätzung der statistischen Parameter der Grundgesamtheit. Bei einer üblichen Baugrunderkundung ist die Streuung des Mittelwerts (bedingt durch die Unkenntnis seines exakten Wertes) beträchtlich kleiner als die Streuung der Einzelwerte. Von der Varianzreduktion wird aber nur letztere betroffen. Ist nun diese Reduktion gering, so bleibt die Streuung der Einzelwerte weiterhin größer als die des Mittelwerts und hat den größeren Einfluß auf die Versagenswahrscheinlichkeit. Dieser Fall ist bei den hier betrachteten Fundamenten gegeben. Mithin kann bei einer überschlägigen Betrachtung unter Einhaltung der hier genannten Voraussetzungen die Mittelwertsstreuung und die Varianzreduktion vernachlässigt werden, da sie sich in ihren Einflüssen näherungsweise aufheben, wodurch sich statistisches Bodenmodell und Berechnung stark vereinfachen.

Eine überschlägige Abschätzung der Varianzreduktion für Grundbruch gibt die Beziehung

$$\Gamma^* \approx \frac{2 - \log_{10}(A_F/A_0)}{16(1+0,5 \tan \delta_{\text{eff}})} + 0,92 \frac{\beta}{\beta+1}$$

mit  $A'_F/A_0 < 100$  als Fundamentersatzfläche,  $\delta_{\text{eff}}$  als effektivem Einfallswinkel der Gleitfuge unter den Fundamenten und  $\beta$  als nachzuweisendem

operative Sicherheitsindex. Stichprobenartig wurde diese Beziehung auch an nicht quadratischen Fundamenten überprüft, wobei kein nennenswerter Einfluß der Fundamentform festzustellen war. Dennoch kann (8.1) für beliebige Fundamentgrundrisse oder extreme Baugrundverhältnisse nicht als gesichert angesehen werden.

## 7.2 Böschungsbruch

Die meisten Publikationen über Anwendungen der statistischen Sicherheitstheorie beschäftigen sich mit dem Böschungsbruch. Um zu prüfen, ob mit dem stochastischen Bodenmodell plausible Ergebnisse möglich sind, wurde ein statistisches Böschungsbruchprogramm auf der physikalischen Grundlage des Gleitkreisverfahrens von KREY/BISHOP verwendet.

Das Programm verwendet sichere (konstante) Mittelwerte und berücksichtigt den lagenweisen Einbau beim Schütten. Die Kovarianzmatrix wird durch numerische Faltung der Autokorrelationsfunktion über die einzelnen Lamellen gebildet. Die Suche nach dem Kreis mit der größten Versagenswahrscheinlichkeit geschieht aus Gründen der Rechenzeiterparnis anhand einer Taylorentwicklung der Grenzzustandsfunktion vor Einsetzen der jeweiligen Bemessungswerte. Diese Methode konvergiert stets nach drei bis vier Schritten, wenn nur ein Maximum der Versagenswahrscheinlichkeit existiert, ansonsten besteht die Möglichkeit, daß lediglich ein lokales Maximum gefunden wird. Die Richtungs cosine der einzelnen Zufallsvariablen im  $u$ -Raum werden auf Einflußwerte des Reibungswinkels und der Kohäsion umgerechnet, um anhand dieser Gewichte die mittleren Schichtbemessungswerte zu bestimmen.

Bei den Beispielen wurde auf eine möglichst einfache Geometrie Wert gelegt, um die Ergebnisse leichter überprüfen zu können. Es wurde eine Böschung mit der Neigung 1:2 und einer Höhe von 20 m gewählt, ein Grundwasserspiegel aus den oben genannten Gründen nicht angesetzt. Als Zufallsvariable wurden die Bodenkennwerte Reibungswinkel und Kohäsion betrachtet,

während die Wichte näherungsweise als konstant angenommen wurde. Die Kreismittelpunkte wurden in den Schnittpunkten eines quadratischen Rasters untersucht, die Radien durch die Vorgabe von vier Festpunkten an der Böschungsoberkante variiert.

### Beispiel 1

Sämtliche Angaben zu Geometrie, Bodenkennwerten und Ergebnissen sind in Bild 20 dargestellt.

Wie bei deterministischen Berechnungen von Böschungen aus schwach bindigen Böden war auch hier der oberflächennächste Fußkreis von allen berechneten der ungünstigste. Der Verlauf der Isoasphalien der operativen Versagenswahrscheinlichkeit ist denjenigen einer deterministischen Rechnung ähnlich, abgesehen von den Zahlenwerten. Eine Versagenswahrscheinlichkeit von  $1 \cdot 10^{-8}$  scheint unter den getroffenen Annahmen allerdings etwas gering. Doch aufgrund der Annahme von Lognormalverteilung für  $\tan\varphi$  und  $c$  und der nicht unerheblichen Kohäsion ergeben sich als Bemessungswerte  $\varphi = 17,9^\circ$  und  $c = 8,7 \text{ kN/m}^2$  mit den zugehörigen Einflußwerten  $\alpha_\varphi = 0,997$  und  $\alpha_c = 0,079$ . Auch hier ist der dominierende Einfluß der inneren Reibung bei schwach bindigen Böden deutlich zu erkennen, die übliche Praxis, eine kleine Kohäsion bei der Berechnung garricht erst zu berücksichtigen, wird hierdurch gerechtfertigt. Da die Varianz der Lamellenmittelwerte nur unwesentlich kleiner ist, als die Varianz der Einzelwerte (bei einer mittleren Lamellenlänge von 5,1 m ist  $\Gamma \approx 0,92$ ), kann bei ausreichend genau bekanntem Mittelwert ( $\sigma_\mu/\sigma_x \leq 0,2$ ) überschlägig (und auf der unsicheren Seite liegend) vernachlässigt werden.

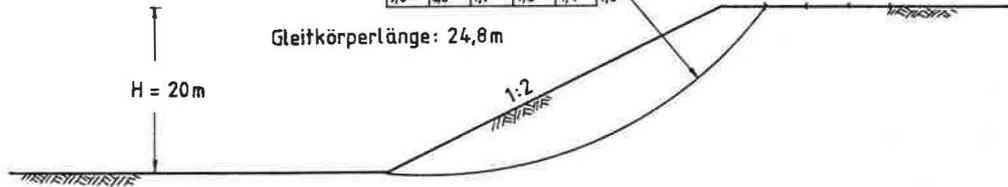
## Beispiel 1

Länge der Böschung: 2000 m  
 Parameter der  
 Autokorrelationsfunktion:  
 $\rho = 1,90$      $\Delta = 0,30 \text{ m}^{-1}$   
 $A = 2000 \text{ m}$     $B = 100 \text{ m}$     $C = 30 \text{ m}$

6,7	5,6	5,9	6,4	7,0	7,6
7,3	6,0	5,8	6,3	6,7	7,3
7,9	6,6	5,8	6,0	6,4	7,3
7,9	7,0	6,2	6,2	6,4	6,8
8,3	7,1	6,0	6,1	6,4	6,8
8,9	7,9	6,8	6,6	6,7	6,9
9,6	8,8	7,9	7,3	7,4	7,6

$$\beta = 5,62$$

$$P_V = 10^{-8}$$



Bodenkennwerte:  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$      $\rho_{\tan\varphi, c} = -0,3$   
 $\mu_{\tan\varphi} = 0,6$      $\sigma_{\tan\varphi} = 0,075$   
 $\mu_c = 25 \text{ kN/m}^2$      $\sigma_c = 15 \text{ kN/m}^2$  }  $\Rightarrow$  {  $\alpha = 0,997$   
 $\alpha = 0,079$

Bild 20 Beispiel 1 zum Böschungsbruch

## Beispiel 2

In diesem Beispiel eines Dammes wurde vom selben Boden wie in Beispiel 1 ausgegangen. Doch hier wurde nur das Dammauflager als natürlicher Boden betrachtet, während der Damm als in Höhen von 0,5 m geschüttet in Rechnung gestellt wurde, wobei die äußeren Abmessungen denen des ersten Beispiels gleich sind (Bild 21).

Das Ergebnis der Berechnung wirkt auf den ersten Blick erstaunlich. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist mit  $1,8 \cdot 10^{-48}$  ca  $10^{4,0}$  mal kleiner als im vorigen Beispiel, innerhalb der Schüttung selbst beträgt  $\beta = 22,7$ , eine Versagenswahrscheinlichkeit hierzu ist nicht mehr anzugeben und der zugehörige ungünstigste Gleitkreis verläuft tief in der Dammgründung. Die Begründung dafür ist aus den Reduktionsfaktoren der Standardabweichung abzulesen: Im Bereich des natürlichen Bodens ist  $\Gamma \approx 0,92$  wie in Beispiel 1, im Bereich der Dammschüttung dagegen ist  $\Gamma \approx 0,04$ . Dieser kleine Wert entsteht dadurch, daß der Gleitkreis durch sämtliche Schüttlagen des Dammes verläuft. Selbst wenn einige Lagen schlecht verdichtet oder Reibungswinkel und Kohäsion dort aus anderen Gründen sehr niedrig wären, und nicht durch Baukontrollen entdeckt, hätte dies auf die Böschungsbruchsicherheit innerhalb der Schüttung keinen Einfluß. Denn in anderen Lagen müßte die Scherfestigkeit entsprechend höher liegen, damit der angegebene Mittelwert erreicht wird. Das bedeutet, daß innerhalb des Dammes im Mittel über alle Lamellen und Schüttlagen sich mit großer Wahrscheinlichkeit eine Scherfestigkeit nahe bei ihrem Mittelwert realisiert, lokale Schwächezonen bleiben auf einzelne Schüttlagen begrenzt und die Versagenswahrscheinlichkeit innerhalb des Dammes ist nahezu Null - vorausgesetzt der Mittelwert ist exakt bekannt und ohne Unsicherheit. Dadurch wird zwangsläufig der ungünstigste Gleitkreis in die in natürlicher Lagerung anstehende Dammgründung gezogen, bei der großräumig lokale Schwächezonen erheblich wahrscheinlicher sind. Das heißt, daß für den sicheren Bau von Dämmen die Kenntnis des Mittelwertes von Reibungswinkel und Kohäsion des Schüttmaterials von wesentlich größerer Bedeutung sind als bei natürlichen Böden und daß diese auch bei deterministischen Berechnungen ohne Sicherheitsabschlag in Rechnung gestellt werden können.

## Beispiel 2

Länge der Böschung: 2000 m

Parameter der

Autokorrelationsfunktion:

Damm:  $\rho = 1,50$   $\Delta = 0,50 \text{ m}^{-1}$

A = 2000 m B = 50 m C = 20 m

Untergrund:  $\rho = 1,90$   $\Delta = 0,30 \text{ m}^{-1}$

A = 2000 m B = 150 m C = 20 m

16,9	16,9	22,5	22,0	24,0	27,0
16,5	15,6	16,7	24,0	23,3	25,9
16,8	15,6	15,1	18,1	25,5	25,0
16,2	15,2	15,0	15,2	24,9	24,6
15,6	15,4	14,6	14,6	16,5	26,8
16,1	16,0	14,6	14,5	15,3	21,9
16,3	16,3	14,9	14,7	15,6	19,2

Gleitkörperlänge: 66,1 m

$$\beta = 14,5$$

$$P_v \approx 10^{-48}$$

Für Gleitkreise in der

Dammschüttung:  $\beta = 22,7$

$$P_v \approx 0$$

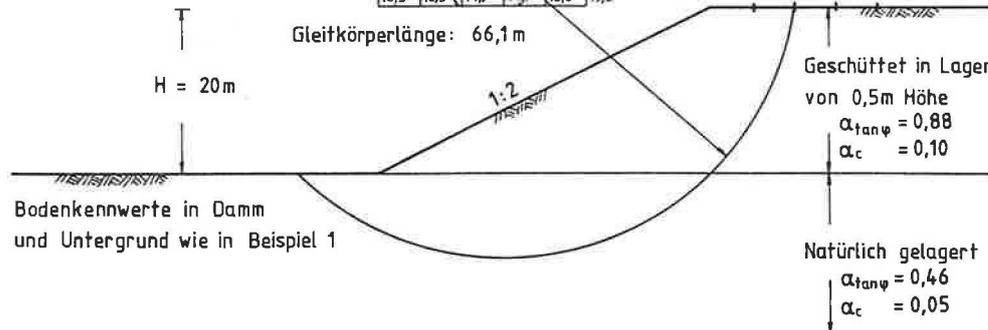


Bild 21 Beispiel 2 zum Böschungsbruch

### Beispiel 3

Länge der Böschung: 2000m

Parameter der

Autokorrelationsfunktion:

Böschung:  $\rho = 1,90$   $\Delta = 0,30\text{m}^{-1}$

A = 2000m B = 50m C = 20m

Untergrund:  $\rho = 1,90$   $\Delta = 0,30\text{m}^{-1}$

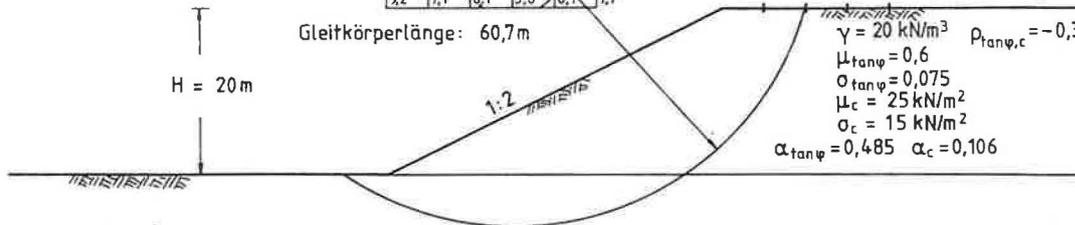
A = 2000m B = 100m C = 20m

6,7	5,6	5,9	6,4	6,9	10,6
6,6	6,0	5,8	6,3	6,7	10,6
6,7	6,1	5,8	6,0	6,6	10,5
6,8	6,1	5,7	5,8	6,7	10,3
6,2	6,2	5,7	5,6	6,4	9,7
7,7	6,4	5,6	5,8	5,9	8,8
9,2	7,1	6,1	5,8	6,1	7,7

$$\beta = 5,56$$

$$P_V = 1,4 \cdot 10^{-8}$$

Gleitkörperlänge: 60,7m



Bodenkennwerte im Untergrund:

$$\gamma = 17 \text{ kN/m}^3 \quad \rho_{\tan\varphi, c} = -0,5$$

$$\mu_{\tan\varphi} = 0,3 \quad \sigma_{\tan\varphi} = 0,075$$

$$\mu_c = 70 \text{ kN/m}^2 \quad \sigma_c = 42 \text{ kN/m}^2$$

$$\alpha = 0,862$$

$$\alpha = 0,101$$

Bild 22 Beispiel 3 zum Böschungsbruch

Von mindestens ebensogroßer Bedeutung ist die Erkundung der Dammgründung, da die Wahrscheinlichkeit eines Dammbrechens indiziert durch eine großräumige Schwächezone im Untergrund maßgebend ist. Zu der geringen Versagenswahrscheinlichkeit ist zu bemerken, daß eine Berechnung mit unsicheren Mittelwerten zu einem wesentlich kleineren  $\beta$ , etwa in derselben Größenordnung wie im Beispiel 1, führen würde, zum anderen wurden hier keine Berechnungsungenauigkeiten und unsicheren Annahmen, z. B. über Grundwasserspiegel oder Porenwasserdrücke angesetzt. Weiterhin kann in dem mechanischen Modell nicht berücksichtigt werden, daß eine Lage eingebaut wird, die erheblich von der angenommenen Grundgesamtheit abweicht und eine vorgegebene Gleitschicht bilden kann. Derartige Fälle können nur durch ausreichende Baukontrollmaßnahmen verhindert werden.

### Beispiel 3

In diesem Beispiel wurde für dieselbe äußere Geometrie der Fall untersucht, daß die natürliche Böschung mit denselben Bodenkennwerten wie in Beispiel 1 und 2 über einer stark bindigen Schicht liegt (Bild 22). Auch hier verläuft der Gleitkreis tief in der Dammgründung, die Versagenswahrscheinlichkeit ist etwa gleichgroß wie in Beispiel 1 mit rund  $1 \cdot 10^{-8}$ . Das Ergebnis liegt somit im Rahmen dessen, was auch bei einer deterministischen Berechnung zu erwarten ist. Die Reduktion der Standardabweichungen entspricht mit  $\Gamma \approx 0,93$  denjenigen der Beispiele 1 und 2 für natürliche Böden. Damit kann auch für diesen Fall eine Mittelwertunsicherheit überschlägig vernachlässigt werden, sofern sie klein genug ist (vgl. Beispiel 1). Auch in diesem Beispiel zeigt sich wieder der überragende Einfluß des Winkels der inneren Reibung mit  $\alpha$ -Werten von 0,49 und 0,86, während die Kohäsion mit  $\alpha = 0,1$  für beide Schichten wegen ihrer großen Streuung nur geringe Bedeutung hat.

### Einfluß der Länge des Gleitkörpers

Bei allen drei Beispielen wurde noch die Länge des Gleitkörpers variiert, da das Programm den Einfluß der Endflächen nicht berücksichtigt. Die

vorgegebene Länge beeinflusst somit nur die Kovarianzmatrix, im wesentlichen nur die Varianzen. Unabhängig von der Länge war in allen Fällen die Form des ungünstigsten Kreises und die Zunahme der Sicherheit mit zunehmender Länge war vernachlässigbar gering (Bild 23). Daher kann in einer statistischen Böschungsbruchuntersuchung a priori die Länge des Gleitkörpers vorgegeben werden, ein plausibler Wert ist das 2- bis 4-fache der größten Tiefe des Gleitkörpers unter OK Böschung.

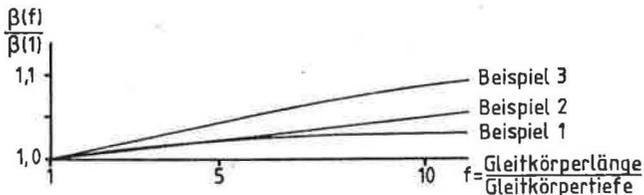


Bild 23 Einfluß der Gleitkörperlänge auf den operativen Sicherheitsindex

### Zusammenfassung

Die statistische Standsicherheitsuntersuchung von Böschungen ermöglicht die quantitative Ermittlung von Einflußwerten verschiedener streuender Parameter, sie macht somit Parameterstudien überflüssig. Darüber hinaus kann beurteilt werden, ob die aus der Baugrunderkundung gewonnenen Kenntnisse je nach Problemstellung ausreichend sind oder ob zusätzliche Informationen beschafft werden müssen.

Da der Aufwand für solche Berechnungen zur Zeit noch erheblich ist, wird ihre Anwendung in naher Zukunft auf wissenschaftliche Bereiche und auf wenige kritische praktische Probleme von hoher Schwierigkeit und Komplexität begrenzt bleiben.

## 8. Zusammenfassung

Ausgangspunkt waren Zeitreihenanalysen an Stichproben von Bodenkennwerten nach dem Box/Jenkins-Verfahren. Mit dem dort ermittelten ARIMA(1,1,1)-Modell konnte eine hinreichende Anpassung an die Aufzeichnungen erreicht werden.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich der ARIMA(1,1,1)-Prozeß durch einen äquivalenten interpretierbaren Prozeß ersetzen läßt. Dieser besteht aus der additiven Verknüpfung zweier unabhängiger stochastischer Prozesse: Einem stationären autoregressiven Prozeß erster Ordnung und einem instationären Random Walk bzw. Wiener-Prozeß. Letzterer simuliert einen lokalen, veränderlichen Mittelwert, welcher als langwelliger stochastischer Trend betrachtet werden kann.

Dieses stochastische Modell für die Streuung von Bodenkennwerten wurde an 324 Aufzeichnungen mit insgesamt über 30.000 Einzelwerten von 27 verschiedenen Baustellen überprüft und ausgewertet. Obwohl hierbei hauptsächlich Klassifikationskenngrößen wie Dichte, Wassergehalt, Kornverteilung usw. vorlagen, kann wegen der vielfältigen Korrelationen von Bodenkennwerten untereinander die Übertragbarkeit auf statisch relevante Festigkeits- und Verformungskenngrößen postuliert werden. Mit dieser Auswertung liegen ausreichende a priori Informationen über die Verteilung der Prozeßparameter vor, um praktische Anwendungen ohne ergänzende (a posteriori) Informationen vornehmen zu können.

Die theoretische Untersuchung des stochastischen Bodenmodells wurde vor allem im Hinblick auf die Autokorrelationseigenschaften und die Variationskoeffizienten bei gleitender Mittelung vorgenommen. Um die Instationarität des Modells zu beherrschen, war eine Begrenzung des Gültigkeitsbereiches auf die Größe der betrachteten Baustelle erforderlich, die durch ein Quader modelliert wird. Mit der Erweiterung des stochastischen Prozesses von der Geraden in die Ebene und in den Raum war es somit möglich, die Autokorrelationsfunktion und die Varianzreduktionsfunktion in Abhängigkeit von den Prozeßparametern und der Baustellen-

größe anzugeben. In Tafel 1 ist das stochastische Bodenmodell mit einer Ergänzung zur Berücksichtigung von Schätzungenauigkeiten nach Rackwitz/Peintinger dargestellt.

Weiterhin sind neben Hilfsmitteln für die Anwendung und Abschätzungen für anisotrope Böden einige Beispiele stochastischer Standsicherheitsuntersuchungen anhand von Grund- und Böschungsbruch zusammengestellt.

Hiermit wird erstmals ein verifiziertes stochastisches Bodenmodell vorgestellt, das in beliebigen Dimensionen gültig ist und brauchbare, plausible Ergebnisse innerhalb des statistischen Sicherheitskonzepts liefert. Seine Anwendungsmöglichkeiten erstrecken sich über den gesamten Bereich der Geotechnik, sei es im Rahmen des statistischen Sicherheitskonzepts, bei Setzungsabschätzungen, bei der Baugrunderkundung oder bei Baukontrollprüfungen im Erdbau.

Tafel 1

Zusammenstellung des stochastischen Bodenmodells für isotropen Boden

$$X(\underline{\xi}) = X_1 + X_2(\underline{\xi})$$

$X(\underline{\xi})$ : (logarithmierte) Bodeneigenschaft an der Stelle  $\underline{\xi}$

$$\text{mit } \underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{l} 0 \leq \xi_1 \leq A \\ 0 \leq \xi_2 \leq B \\ 0 \leq \xi_3 \leq C \end{array} \quad A \geq B, C$$

$X_1$ : Zufallsvariable, die den Mittelwert des betrachteten Bereiches (A,B,C) und seine Unsicherheit repräsentiert

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu + \sigma_1 u_1 & \mu &= \bar{x}: \text{Schätzwert des Mittelwertes} \\ & & \sigma_1^2 &= s_1^2: \text{Schätzwert der Varianz von } \bar{x} \\ & & u_1 &: (0, 1) \text{ normalverteilte ZV} \end{aligned}$$

$X_2(\underline{\xi})$ : Zufallsvariable, die die Streuung um den Mittelwert  $\mu$  repräsentiert

$$\begin{aligned} X_2(\underline{\xi}) &= \sigma_2^2 u_2(\underline{\xi}) & \sigma_2^2 &= s_2^2: \text{Schätzwert der Varianz von } X_2(\underline{\xi}) \\ & & u_2(\underline{\xi}) &: (0, 1) \text{ normalverteiltes Zufalls-} \end{aligned}$$

feld mit einer Autokorrelationsfunktion der Form

$$\rho(\underline{\xi}) = \frac{1}{1+p(1+\frac{B}{A}+\frac{C}{A})} [\rho_{AR}(\underline{\xi}) + p(1+\frac{B}{A}+\frac{C}{A}) \rho_{\mu}(\underline{\xi})]$$

$$\rho_{AR}(\underline{\xi}) = e^{-\Delta|\underline{\xi}|}$$

$$\rho_{\mu}(\underline{\xi}) = [2(1 - \frac{|\underline{\xi}|}{A+B+C})^2 - 1][1 - \frac{|\underline{\xi}|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(1 + \frac{B+C}{4A})(1 - \frac{\xi^2}{A^2+B^2+C^2})]$$

$p$  und  $\Delta$  sind wie der Mittelwert  $\mu$  innerhalb des betrachteten Bereiches (A,B,C) konstant, a priori können sie als lognormalverteilte Zufallsvariable abgeschätzt werden mit

$$p = e^{u_p - 1} \quad \Delta = e^{u_{\Delta}}$$

wobei  $u_p, u_{\Delta}$  (0,1) normalverteilte Zufallsvariable sind.

Im allgemeinen können die Varianzen von  $x_1$  und  $x_2$  hinreichend genau ermittelt werden. Besteht aufgrund mangelnder Information eine Unsicherheit über ihren wahren Wert, so können sie durch  $\chi_{\nu}^2$  verteilte Zufallsvariable mit  $\nu$  Freiheitsgraden ersetzt werden.

## 9. Anhang

### 9.1 Ableitung der Autokovarianzfunktion des Mittelwertprozesses im $\mathbb{R}^1$

Die erwartungstreue Schätzfunktion ist

$$\hat{Y}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})$$

mit den Teilsummen

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( \sum_{j=i}^i m_j \right) \left( \sum_{l=1}^{i+k} m_l \right) \\ &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \sum_{j=1}^i \sigma_m^2 = \frac{\sigma_m^2}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (N-k+1-i) \\ &= \sigma_m^2 \frac{N-k}{2} \end{aligned}$$

bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i \bar{x} = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( \sum_{j=1}^i m_j \right) \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_{n=1}^N m_n \\ &= \frac{1}{N-k} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (N-k+1-i) m_i \sum_{l=1}^N (N+1-l) m_l \\ &= \frac{\sigma_m^2}{N-k} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (N-k+1-i) (N+1-i) \\ &= \frac{\sigma_m^2}{N} \left[ \frac{N(N-k)}{2} - \frac{(N-k)^2}{6} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III &= \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_{i+k} \bar{x} = \frac{1}{N-k} \left( \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\
 &= \frac{\sigma_m^2}{N-k} \cdot \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N (N+1-i)(N+1-i) - \sum_{i=1}^{k-1} (k-i)(N+1-i) \right] \\
 &= \frac{\sigma_m^2}{N-k} \cdot \frac{1}{N} \left[ \frac{N^3}{3} - \frac{k^2 N}{3} + \frac{k^3}{6} \right]
 \end{aligned}$$

$$IV = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \bar{x}^2 = \sigma_m^2 \frac{N}{3}$$

$$\gamma'(k) = I - II - III + IV$$

$$\gamma(k) = \sigma_m^2 \frac{N}{6} \left[ 2 \left( 1 - \frac{k}{N} \right)^2 - 1 \right]$$

Die zugehörige Schätzfunktion mit der kleinsten Varianz erhält man durch Wichtung mit dem geometrischen Kovariogramm  $g_1$  im  $\mathbb{R}^1$

$$g_1 = \frac{N-k}{N}$$

$$\gamma(k) = g_1 \gamma'(k) = \sigma_m^2 \frac{N}{6} \left[ 2 \left( 1 - \frac{k}{N} \right)^3 - \left( 1 - \frac{k}{N} \right) \right]$$

Die kontinuierliche Form der Autokovarianzfunktion erhält man durch Ersetzen von  $k$  und  $N$  durch die Größen  $|d|$  und  $L$ , wobei  $d$  der Abstand zweier Punkte und  $L$  die Gesamtlänge ist

$$\gamma(d) = \sigma_m^2 \frac{N}{6} \left[ 2 \left( 1 - \frac{|d|}{L} \right)^3 - \left( 1 - \frac{|d|}{L} \right) \right]$$

9.2 Ableitung der Varianzreduktionsfunktion des Mittelwertprozesses für Geraden, Rechtecke und Quader

Berechnet wird die Varianz eines Quaders mit den Seiten a, b und c innerhalb der interessierenden, ebenfalls quaderförmigen Gebietes mit den Seitenlängen A, B und C. Es ist

$$0 \leq a \leq A$$

$$0 \leq b \leq B$$

$$0 \leq c \leq C$$

Mit 
$$x_{i,j,k} = \sum_{r=1}^i m_r(n,j,k) + \sum_{s=1}^j m_j(i,s,k) + \sum_{t=1}^k m_k(i,j,t)$$

ist 
$$\mu_{i,j,k}(a,b,c) = \frac{1}{a b c} \sum_{r=1}^{i+a-1} \sum_{s=j}^{j+b-1} \sum_{t=k}^{k+c-1} x_{r,s,t}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{r=1}^{i+a-1} \sum_{n=1}^r m_r(n,j,k) + \frac{1}{b} \sum_{s=j}^{j+b-1} \sum_{v=1}^s m_j(i,v,k)$$

$$+ \frac{1}{c} \sum_{t=k}^{k+c-1} \sum_{w=1}^t m_k(i,v,w)$$

Die Varianzreduktionsfunktion  $\Gamma^2(a,b,c)$  erhält man aus

$$\text{Var}(x) \Gamma^2(a,b,c) = E[\mu(a,b,c) - \mu]^2$$

Die Einzelsummen der rechten Seite der Gleichung sind

$$I = \frac{1}{(A-a)(B-b)(C-c)} \sum_{i=1}^{A-a} \sum_{j=1}^{B-b} \sum_{k=1}^{C-c} [\mu_{i,j,k}(a,b,c)]^2$$

wegen  $E[m_1(i,j,k) m_n(u,v,w)] = \begin{cases} \sigma_m^2 & \text{für } (i=n, j=u, k=v, w) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

braucht nur jeweils ein Summand der Teilsummen betrachtet werden

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{A-a} \sum_{i=1}^{A-a} \left( \frac{1}{a} \sum_{r=i}^{i+a-1} \sum_{s=1}^r m_1(s,j,k) \right) \left( \frac{1}{a} \sum_{v=i}^{i+a-1} \sum_{w=1}^v m_1(w,j,k) \right) \\ &= \frac{1}{a^2(A-a)} \sum_{i=1}^{A-a} \left[ \sum_{r=1}^{i+a-1} (i+a-r) m_r - \sum_{r=1}^{i-1} (i-r) m_r \right]^2 \\ &= \frac{\sigma_m^2}{a^2(A-a)} \sum_{i=1}^{A-a} \left[ \left( \sum_{r=1}^{i+a-1} (i+a-r) \right)^2 - \sum_{r=1}^{i-1} (i-r)(i+a-r) + \sum_{r=1}^{i-1} (i-r)^2 \right] \\ &= \frac{\sigma_m^2}{a^2(A-a)} \sum_{i=1}^{A-a} \left[ \frac{(i+a)^3}{3} - 2 \left( \frac{i^3}{3} + a \frac{i^2}{2} \right) + \frac{i^3}{3} \right] \\ &= \frac{\sigma_m^2}{a^2(A-a)} \sum_{i=1}^{A-a} \left( i a^2 + \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{\sigma_m^2}{a^2(A-a)} \left( -\frac{a^2(A-a)^2}{2} + \frac{a^3(A-a)}{3} \right) = \sigma_m^2 \left( \frac{A}{2} - \frac{a}{6} \right) \end{aligned}$$

$$II = \frac{-2}{(A-a)(B-b)(C-c)} \sum_{i=1}^{A-a} \sum_{j=1}^{B-b} \sum_{k=1}^{C-c} [\mu_{i,j,k}(a,b,c)]$$

auch hier nur für die Summanden der Teilsumme über A

$$II_A = \frac{-2}{A-a} \sum_{i=1}^{A-a} \left[ \frac{1}{A} \sum_{t=1}^A \left( \sum_{s=1}^t m_1(s,j,k) \right) \cdot \frac{1}{a} \sum_{v=i}^{i+a-1} \sum_{u=1}^v m_1(w,s,k) \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{II}_A &= \frac{-2}{\alpha A(A-\alpha)} \sum_{i=1}^{A-\alpha} \left[ \sum_{t=1}^A (A+1-t) m_1(t, j, k) \right] \left[ \sum_{v=1}^{i+\alpha-1} (i+\alpha-v) m_1(r, j, k) - \sum_{v=1}^{i-1} (i-v) m_1(v, j, k) \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{\alpha A(A-\alpha)} \sum_{i=1}^{A-\alpha} \left[ \sum_{v=1}^{i+\alpha-1} (A+1-v)(i+\alpha-v) - \sum_{v=1}^{i-1} (A+1-v)(i-v) \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{\alpha A(A-\alpha)} \sum_{i=1}^{A-\alpha} \left[ \sum_{v=1}^{i+\alpha-1} (A(i+\alpha) - v(A+i+\alpha) + v^2) - \sum_{v=1}^{i-1} (iA - v(A+i) + v^2) \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{\alpha A(A-\alpha)} \sum_{i=1}^{A-\alpha} \left[ A(i+\alpha)^2 - \frac{(i+\alpha)^2}{2} (A+i+\alpha) + \frac{(i+\alpha)^3}{3} - i^2 A + \frac{i^2}{2} (A+i) - \frac{1}{3} i^3 \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{\alpha A(A-\alpha)} \sum_{i=1}^{A-\alpha} \left[ -\frac{\alpha}{2} i^2 + (A\alpha - \frac{\alpha^2}{2}) + \frac{A\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{6} \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{\alpha A(A-\alpha)} \left[ -\frac{\alpha}{6} (A+\alpha)^3 + \frac{(A-\alpha)^2}{2} \alpha (A - \frac{\alpha}{2}) + \frac{\alpha^2}{2} (A - \frac{\alpha}{3}) (A-\alpha) \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{A} \left[ -\frac{(A-\alpha)^2}{6} + \frac{1}{2} (A-\alpha) (A - \frac{\alpha}{2}) + \frac{\alpha}{2} (A - \frac{\alpha}{3}) \right] \\
 &= \frac{-2\sigma_m^2}{A} \left[ -\frac{(A-\alpha)^2}{6} + \frac{1}{2} (A^2 - \frac{\alpha A}{2} + \frac{\alpha^2}{6}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{III}_A = \frac{\sigma_m^2}{3} - \frac{A^2}{A}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I} + \text{II} + \text{III} &= \frac{\sigma_m^2}{6A} [3A^2 - A\alpha + 2A^2 - 4A + 2\alpha^2 - 6A^2 + 3A\alpha - \alpha^2 + 2A^2] \\
 &= \frac{\sigma_m^2}{6A} [A^2 - 2A\alpha + \alpha^2] \\
 &= \sigma_m^2 \frac{A}{6} \left[ 1 - \frac{\alpha}{A} \right]^2
 \end{aligned}$$

Führt man die Summation in alle Richtungen durch, so ist

$$\sigma_{\mu}^2(a, b, c) = \frac{\sigma_m^2}{6} \left[ A \left(1 - \frac{a}{A}\right)^2 + B \left(1 - \frac{b}{B}\right)^2 + C \left(1 - \frac{c}{C}\right)^2 \right]$$

Diese Form kann umgeschrieben werden in

$$\sigma_{\mu}^2(a, b, c) = \frac{\sigma_m^2}{6} (A+B+C) \left[ 1 - 2 \frac{a+b+c}{A+B+C} + \left( \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} \right) \frac{1}{A+B+C} \right]$$

Da in der Anwendung vorwiegend kleine Werte für a, b und c vorkommen, d. h. der lineare Anteil in obiger Gleichung gegenüber dem quadratischen dominiert, und dieser sich umschreiben läßt in

$$\left[ \frac{a^2}{(a+b+c)^2} \frac{A+B+C}{A} + \frac{b^2}{(a+b+c)^2} \frac{A+B+C}{B} + \frac{c^2}{(a+b+c)^2} \frac{A+B+C}{C} \right] \frac{(a+b+c)^2}{(A+B+C)^2}$$

kann unter der Annahme, daß im Mittel folgende Proportionalitäten erfüllt sind:

$$\frac{a}{a+b+c} \approx \frac{A}{A+B+C}; \quad \frac{b}{a+b+c} \approx \frac{B}{A+B+C}; \quad \frac{c}{a+b+c} \approx \frac{C}{A+B+C}$$

die Varianz beliebiger Mittelungsgebiete näherungsweise geschrieben werden als

$$\sigma_{\mu}^2(a, b, c) \approx \frac{\sigma_m^2}{6} (A+B+C) \left[ 1 - \frac{a+b+c}{A+B+C} \right]^2$$

und die Varianzreduktionsfunktion wird zu

$$r_{\mu}^2(a, b, c) = \frac{\sigma_{\mu}^2(a, b, c)}{\sigma_m^2} = \left[ 1 - \frac{a+b+c}{A+B+C} \right]^2$$

## 10. Literatur

- AASHO Road Test (1962): Report No. 2 "Materials and Construction. Highway Research Board HRB Sp. Rept. 628
- ACHILLES, D. (1978): Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York
- ALBER, D., FLOSS, R. (1983): Stochastische Verfahren zur Schätzung von Bodenkennwerten. In: Beiträge zur Anwendung der Stochastik und Zuverlässigkeitstheorie in der Bodenmechanik. Heft 2 der Schriftenreihe des Instituts für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der TU München
- ALBER, D., REITMEIER, W. (1986): Beschreibung der räuml. Streuung von Bodenkennwerten mit Hilfe der Zeitreihenanalyse. Heft 7 Schriftenreihe LSt und PA f. Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik TUM
- ALONZO, E.E., KRIZEK, R.J. (1975): Stochastic Formulation of Soil Properties. In: ICASP, Aachen, S. 9-32
- ANG, A.H.S., TANG, W.H. (1984): Probability concepts in engineering planning and design. Vol. 1: Basic Principles, Vol. 2: Design, Risk and Reliability. John Wiley & Sons
- ASCE (1984): Probabilistic characterization of Soil Properties. Symp. in Atlanta, Georgia
- ARNOLD, L. (1973): Stochastische Differentialgleichungen. R. Oldenbourg-Verlag
- BAECHER, B.; VENEZIANO, D. (1981): Probability and Statistics for Geotechnical Engineering. ISMES, Bergamo
- BENJAMIN, J.R.; CORNELL, C.A. (1970): Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers. Mc-Graw Hill
- BOX, George E.P.; JENKINS, Gwilyn M. (1976): Time Series Analysis Forecasting and Control. Holden Day, Oakland
- CORNELL, A.C. (1971): First order uncertainty Analysis of Soils, Deformation and stability. In: ICASP, Hongkong
- FAHRMEIR, L.; KAUFMANN, H.; OST, F. (1981): Stochastische Prozesse - eine Einführung in Theorie und Anwendungen. Carl Hauser Verlag, München-Wien
- FLOSS, R. (1969): Erdbautechnische Voraussetzungen für standardisierte Straßenbefestigungen. Vorträge und Referate der Straßenbautagung Hamburg 1968. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen e.V., Bonn-Bad Godesberg, Kirschbaum Verlag (Straße und Autobahn 20, H, 2, S. 39-45

- FLOSS, R. (1970): Vergleich der Verdichtungs- und Verformungseigenschaften unstetiger und stetiger Kiessande hinsichtlich ihrer Eignung als ungebundenes Schüttmaterial im Straßenbau. BAST-Wissenschaftliche Berichte, H. 9
- FLOSS, R. (1973): Organisation und Ausführung der Überwachung von Erdarbeiten. Straße und Autobahn 24, H. 9, S. 377-387
- FREUDENTHAL, A.M. (1947): The safety of structures. Transaction, ASCE, Vol. 112, S. 125-159
- FREUDENTHAL, A.M. (1956): Safety and Probability of Structural Failure. Transactions ASCE, Vol. 121, S. 1337-1375
- HANISCH, J.; STRUCK, W. (1985): Charakteristischer Wert einer Boden- oder Materialeigenschaft aus Stichprobenergebnissen und zusätzlicher Information. Bautechnik 10, S. 338-348
- GASSLER, G. (1982): Anwendung des statistischen Sicherheitskonzepts auf verankerte Wände und vernagelte Wände. Baugrundtagung 1982 Braunschweig. DGEG, Essen, S. 49-82
- GENERAL Principles on Reliability for Structural Design (1979) Joint Committee for Structural Safety
- GRUNDLAGEN Zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen (1981): DIN, Dt. Institut für Normung e.V., 1. Aufl., Berlin, Köln, Beuth-Verlag
- HARR, M.E. (1977): Mechanics of particulate media: A Probability Approach. McGraw Hill, New York
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C. (1974): An exact and invariant first order Reliability Format. Journal of the engineering mechanics division, ASCE, Vol. 100, No. 1, S. 111-121
- ICASP (1971): Proc. 1st Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Hongkong
- ICASP (1975): Proc. 2nd Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Aachen
- ICASP (1979): Proc. 3rd Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Sydney
- ICASP (1983): Proc. 4th Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Firenze
- LARSSON, H.J.; SHUBERT, B.O. (1979): Probabilistic models in engineering sciences, Vol. II: Random noise signals and dynamic systems, John Wiley & Sons

- JENKINS, G.M.; WATTS, D.G. (1968): Spectral analysis and its applications. Holden Day
- LUMB, P. (1966): The variability of natural soils. *Can. Geot. Journal* Nr. 2, S. 74-97
- LUMB, P. (1970): Safety factors and the probability distributions of soil strength. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 7, S. 225
- LUMB, P. (1974): Application of statistics in soil mechanics. *Soil Mechanics - New Horizons*. Newnes-Butterworth, London
- LUMB, P. (1975): Spatial variability of soil properties. *Proc. ICASP*, Aachen, Vol. II, S. 397-421
- MATERN, B. (1960): Spatial variation. *Com. Swed. Forestry Res. Inst.* 49, S. 1-144
- MATHERON, G. (1971): The theory of regionalized variables and its application. *Cal. Cent. Morphol. Math.* Vol. 5
- MATSUO; M.; KURNODA, A. ASAOKA, A. (1975): Uncertainties and Decision in Design of Embankments. 2nd. *ICASP*, Vol. II, S. 143-153
- MATSUO, M.; ASAOKA, A. (1977): Probability models of undrained strength of marine clay layer. *Soils and Foundation*, Vol. 17, No. 3, S. 53-68
- MEYERHOF, G.G. (1982): Sicherheitsvorstellungen im Erd- und Grundbau. *Baugrundtagung, Braunschweig. DGEG, Essen*, S. 509-522
- Modal Code 1, CEB-Bulletin No. 118
- PAPOULIS, A. (1965): Probability, Random variables and Stochastic Processes. Mc.Graw Hill
- PEINTINGER, B.; RACKWITZ, R. (1980): Numerical Uncertainty of Slopes. SFB 96, *Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke*. Technische Universität München H. 52
- PEINTINGER, B. (1982): Auswirkung der räumlichen Streuungen von Bodenkennwerten. *Baugrundtagung Braunschweig, DGEG, Essen*, S. 105-118
- PEINTINGER, B.; REITMEIER, W. (1983): Effects of statistical uncertainties about the parameters of a stochastic field modelling soil properties in slope stability. *Proc. 4th ICASP*, S. 1325-1435
- POTTHARST, R. (1982): Erläuterung des stochastischen Sicherheitskonzeptes am Beispiel des Grundbruchs. *Baugrundtagung Braunschweig. DGEG, Essen*. S. 9-48

- RACKWITZ, R.; PEINTINGER, B. (1981): Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen. Bauingenieur 56, H. 6, S. 215-221
- RACKWITZ, R. (1982): Können Vorinformationen über den Baugrund quantifiziert werden? Baugrundtagung Braunschweig, DGEG, Essen, S. 119-134
- RETHATI, L. (1983): Distribution functions of the soil physical characteristics. Proc. 8th ECSMFE, Helsinki, Vol. 1, S. 405-410
- RICE, S.O. (1944): Mathematical Analysis of Random Noise. Bell System Techn. Journal, Vol. 24, S. 282-332
- SCHULTZE, E. (1971): Frequency Distributions and Correlations of Soil Properties. Proc. 1st. ICASP
- SCHULTZE, E. (1975): Some Aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures. Proc. 2nd ICASP
- SCHULTZE, E. (1968): Der Reibungswinkel nichtbindiger Böden. Bauingenieur 43, H. 9, S. 313-320
- SHERMAN, G.B.; WATKINS, R.O.; PRY SOCK, R.H. (1967): A statistical Analysis of Embankment Compaction. HRB Highway Research Record No. 177, S. 157-185
- v. SOOS, P. (1980): Die Eigenschaften von Boden und Fels; ihre Ermittlung im Labor. In: Grundbautaschenbuch 3. Aufl. Teil 1, W. Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, S.59-116
- v. SOOS, P. (1982): Zur Ermittlung der Bodenkennwerte mit Berücksichtigung von Streuung und Korrelation. Baugrundtagung Braunschweig, DGEG, Essen, S. 83-104
- STANGE, K. (1970): Angewandte Statistik. 1. Teil: Eindimensionales Problem, Springer Verlag
- STANGE, K. (1971): Angewandte Statistik. 2. Teil: Mehrdimensionales Probleme. Springer Verlag
- THORNBURN, T.H.; LARSEN, W.R. (1959): A statistical study of soil sampling. Proc. ASCE, SM 5
- VANMARCKE, E.H. (1977): Probabilistic Modelling of Soil Profiles. ASCE Journal of the Geotechnical Engineering, Vol. 103, No. GT 11, S. 1227-1246
- VANMARCKE, E.H. (1977): Reliability of Earth Slopes. ASCE Journal of the Geotechnical Engineering, Vol. 103, No. GT 11, S. 1247-1265
- VANMARCKE, E.H. (1979): On the Scale of Fluctuation of Random Functions. MIT Res. Rep. No. 79-19

WHITMAN, R.V. (1984): Evaluating Calculated Risk in Geotechnical Engineering, 17th Terzaghi Lecture, ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering, Vol. 110, No. 2, S. 145-188

WICHERN, D.N. (1973): The behaviour of the sample autocorrelation functions for an integrated moving average process. Biometrika 60, S. 235 ff

Nr.	Entnahmeort	Land	Bodenart	Geologische Bezeichnung	Lagerung	Entnahmerichtung	Bodenkennwerte	Bemerkungen	Quelle Nr.
1	Altdorf	D	Sand	quartärer Flugsand	natürl.	horiz.	$w, \rho$ , Kornverteilung	Sandgrube	1
2	Zolling	D	Ton	tertiärer Ton	natürl.	horiz.	$w, \rho, w_L, w_p$ $I_p, I_C$	Tongrube	1
3	Regensburg	D	Kies-Sand	würmeiszeitl. Schotter	geschütt.	horiz.	$w, \rho$ , Kornverteilung	Boden-	1
4.1 4.2	Mauthaus	D	weitgestufte Kies-Sand-Schluffgemische	verwitterter Ton-schiefer u. Grauwacken d. Unterkarbons	geschütt.	horiz.	$w, \rho$ , Kornverteilung	Staudamm Kern und Filter	1
5.1	Düsseldorf	D	Fein-Mittelsand, schluffig	fluviatile Ablagerungen d. Quartärs	natürl.	horiz.	$w, \rho, \rho_{pr}, E_v, RS$	Straßendamm Erdplanum	2
5.2		D	Kies-Sand		geschütt.	horiz.	$w, \rho, \rho_{pr}, E_v, RS$	Frostschuttschicht	
6.1	Wendlingen	D	Ton mit Kalkverbesserung	unterer schwarzer Jura, Lias B	natürl.	horiz.	dyn $E_v$	Erdplanum	3
6.2		D	Sand/Kies?	Neckarkiese, Alluvium	geschütt.	horiz.	dyn $E_v$	Frostschutz-	

Tabelle 1 Kurzbeschreibung der untersuchten Zeitreihen

Nr.	Entnahmeort	Land	Bodenart	Geologische Bezeichnung	Lagerung	Entnahme- richtung	Bodenkenn- werte	Bemerkungen	Quelle Nr.
6.3	Singen	D	Kies- Schluff Sand- Schluff kalkver- bessert	würmeis- zeitl. Moräne	natürl. verbes- sert	horiz.	dyn $E_v$	Erdplanum	
6.4		D	Sand/ Kies?	Quartär	geschütt.	horiz.	dyn $E_v$	Frostschutz- schicht	
7	Cambridge	GB	Ton	linnisch- brackisch- klastisch Unter- kreide (Gault)	natürl.	vert.	$c_u$	Regression aus Drucksondie- rungen	4
8	Jebba	RN	Sand	fluviatile Ablagerun- gen des Al- luviums	natürl.	vert.	$q_s$	Sondierungen für Damm- gründung	5
9	Mexico City	MEX	Ton	vulkani- sche See- tone	natürl.	vert.	$w, w_a, w_L,$ $i_p, q_u, u$	-	6
10	-	F?	-	-	natürl.?	vert.	n	-	7
11	Okanagen See	CAN	Sand	-	gespült	vert.	$q_s, f_s$	gespülter Sanddamm	8

Nr.	Entnahmeort	Land	Bodenart	Geologische Bezeichnung	Lagerung	Entnahme- richtung	Bodenkenn- werte	Bemerkungen	Quelle Nr.
12	Lech/ Augsburg	D	Kies- Sand	quartärer Schotter	natürl.	vert.	$n_{10}$	Gründung von Dämmen	1
13	Dordognet Bordeaux	F	Ton	alluvia- ler Ton	natürl.	vert.	$w, \gamma, I_p, I_C,$ $q_c, c_u$	-	9
14.1	Sascat- chewan	CAN	Ton	aquatisc Tone der Unterkreide	natürl.	horiz.	$w, w_L, I_L$	Entnahme aus Probestollen	10
14.2	Hongkong	HK	Ton	Mariner Ton	natürl.	vert.	$\rho, w, w_L, I_p$		
14.3	Lier- stranda	NOR	Quick- ton	Mariner Ton	natürl.	vert.	$c_u$		
14.4	-		Sand	-	geschütt.	horiz.	$E_v$		
15.1	Eglin Field Florida	USA		-	natürl.	vert.	$q_s, f_s$		11
15.2	Ariake See	J	schluff. Lehm	-	natürl.	vert.	$w$		
16	Vancouver	CAN	Sand	fluviatile Ablagerung des Plei- stozän	natürl.	horiz. vert.	$n, k, d_{50}$	vertikal geschichtet	12

Nr.	Entnahmeort	Land	Bodenart	Geologische Bezeichnung	Lagerung	Entnahme- richtung	Bodenkenn- werte	Bemerkungen	Quelle Nr.
17.1	Horri- kawa	J	Ton	Mariner Ton	natürl.	vert.	$c_u$		13
17.2	Nagoya	J	Ton	Mariner Ton	natürl.	vert.	$c_u$		

Quellenangaben zu Tabelle 1

1. ALBER, R.; REITMEIER, W.: Beschreibung d. räuml. Streuung von Bodenkennwerten mit Hilfe der Zeitreihenanalyse, Heft 7 d. Inst.
2. Bundesanstalt für Straßenwesen, Wissenschaftliche Berichte Heft 5, 1965, Unterbau-Versuchsstrecke B 288, Düsseldorf Nord
3. FMFA Stuttgart, Schlußbericht zum Forschungsantrag des Bundesministers für Verkehr: Verteilung der dynamischen Einsenkungswerte und der  $E_{v0}$ -Werte auf dem Erdplanum und auf unteren Tragschichten, 1983
4. KAY, J.N.; PARRY, R.H.G.: Screw plate tests in a stiff clay. Ground Engineering 15, Nr. 6, 1982, S. 22-27
5. SOLYMAR, Z.V.: Compaction of alluvial deep sands by deep blasting. Can. Geot. Journal, 21, 1984, S. 305-321
6. MARSAL, R.J.: Unconfined compression and vane shear tests in volcanic lacustrine clays. Proc. ASTM Conf. on Soils for Engng. Purposes, Mexico City, 1959, S. 229-241
7. CAMBEFORT, H.: La mesure in situ de la Porosité des sables. Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engng., London, 1957, Vol. 1, S. 213-215
8. CAMPANELLA, R.G.; ROBERTSON, P.K.; GILLESPIE, D.: Piezometer-friction cone investigation at a tailings dam. Can. Geot. Journal 21, 1984, S. 551-562
9. BAGHERY, S.; MAGNAN, J.P.: Analyse probabiliste de la stabilité et des tassements des remblais du site expérimental de Cubzac-les-ponts. Lab. des Ponts et des Chaussées, Rapport de Recherche No. 122
10. LUMB, P.: Spatial variability of soil properties. Proc. ICASP, Aachen 1975, Vol. 2, S. 397-421
11. ALONSO, F.E.; KRIZEK, R.J.: Stochastic formulation of soil properties, Proc. ICASP, Aachen 1975, Vol. 2, S. 9-32
12. SMITH, L.: Spatial variability of Flow Parameters in a Stratified Sand. Journ. of the Int. Ass. for Mathematical Geology, Vol. 13, No. 1, 1981, S. 1-21
13. MATSUO, M.; ASAKA, A.: Probability models of undrained strength of marine clay layer. Soils and Foundation, Vol. 17, No. 3, 1977, S. 53-68

Tabelle 2 Ergebnisse der Zeitreihenanalysen

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
1	96	1,0	horizontal	natürlich	n	w	2,652	1,9782	
						p	0,013	0,0573	
						p <sub>d</sub>	0,007	0,5699	
						$\phi < 1$ mm	0,602	0,9655	
						$\phi < 0,5$ mm	0,482	1,1105	
						$\phi < 0,25$ mm	0,011	0,9644	
						$\phi < 0,125$ mm	0,158	0,7277	
$\phi < 0,062$ mm	0,954	0,5072							
2	91	1,25	horizontal	natürlich	b	w	7,66	$\infty$	
						p	0,540	0,4221	
						p <sub>d</sub>	1,512	0,4087	
						w <sub>L</sub>	0,840	0,4639	
						w <sub>p</sub>	2,778	$\infty$	
						I <sub>p</sub>	2,026	0,7877	
						I <sub>C</sub>	4,256	1,5366	
	70	2,50	horizontal	natürlich	b	w	3,869	0,6104	
						p	0,478	0,2556	
						p <sub>d</sub>	1,361	0,2718	
						w <sub>L</sub>	2,013	0,4087	
						w <sub>p</sub>	0,117	0,2179	
						I <sub>p</sub>	4,973	0,6541	
						I <sub>C</sub>	1,552	0,2711	

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
3	49	0,5	horizontal	geschüttet	n	w <sub>1</sub>	0,042	1,086	
						w <sub>2</sub>	0,041	0,643	
						w <sub>3</sub>	0,013	0,834	
						w <sub>4</sub>	4,508	4,442	
						p <sub>1</sub>	2,050	3,464	
						p <sub>2</sub>	0,671	2,280	
						p <sub>3</sub>	1,205	2,369	
						p <sub>d1</sub>	2,016	2,373	
						p <sub>d2</sub>	1,396	2,247	
						p <sub>d3</sub>	2,291	2,597	
						U	0,053	1 106	
						C <sub>c</sub>	0,067	1,512	
						4.1	215	~175	horizontal
737	~ 50	w <sub>2</sub>	0,771	*					
733	~ 50	p <sub>d</sub>	0,591	*					
215	~175	$\varnothing < 2,0$ mm	0,218	*					
215	~175	$\varnothing < 0,2$ mm	2,178	*					
371	~125	horizontal	geschüttet	b	w <sub>1</sub>		0,388	*	Kernzone 2
1519	~ 30				w <sub>2</sub>		0,430	*	
1519	~ 30				p <sub>d</sub>		1,184	*	
371	~125				$\varnothing < 2,0$ mm		0,285	*	
371	~125				$\varnothing < 0,2$ mm		0,345	*	

\* keine Ermittlung von  $\Delta$  möglich, da der Probenabstand zu groß ist

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
4.2	264	~265	horizontal	geschüttet	n	$w_1$	0,001	*	Filterzone 1
	1291	~ 60				$w_2$	0,139	*	
	1291	~ 60				$\rho_d$	2,545	*	
	264	~265				$\phi < 2,0$ mm	0,046	*	
	264	~265				$\phi < 0,2$ mm	0,343	*	
	178	~390	horizontal	geschüttet	n	$w_1$	0,014	*	Filterzone 2
	134	~520				$w_2$	0,010	*	
	116	~600				$\rho_d$	0,159	*	
	178	~390				$\phi < 2,0$ mm	0,616	*	
	178	~390				$\phi < 0,2$ mm	0,355	*	
5	50	35	horizontal	natürlich	n	$w$	0,017	*	Erdplanum
						$\rho_d$	0,143	*	
						$\rho_{Pr}$	0,163	*	
						$D_{Pr}$	0,283	*	
						$E_1$	0,014	*	
						$E_2$	0,022	*	
						$E_3$	0,020	*	
						$E_{v2}$	0,015	*	
						$n_{30}$	0,024	*	

\* Keine Ermittlung von  $\Delta$  möglich, da der Probenabstand zu groß ist.

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
5	50	35	horizontal	geschüttet	n	w	0,001	*	Frostschutz- schicht
						$\rho_d$	0,089	*	
						$\rho_{Pr}$	2,068	*	
						$D_{Pr}$	1,368	*	
						$E_1$	0,006	*	
						$E_2$	0,029	*	
						$E_3$	0,064	*	
						$E_{v2}$	0,020	*	
						$n_{30}$	0,006	*	
						$n_{30}$	0,024	*	
6.1	76	45	horizontal	natürlich	b	dyn $E_1$	0,908	0,562	BAB A 8 Erd- planum, dyna- mische Verfor- mungsmoduli
	76	25	horizontal	natürlich	b	dyn $E_1$	0,804	0,219	
	68	20	horizontal	natürlich	b	dyn $E_1$	3,708	1,579	
	68	20	horizontal	natürlich	b	dyn $E_1$	0,621	0,397	
6.2	76	25	horizontal	geschüttet	n	dyn $E_1$	4,243	0,538	BAB A 8 Frost- schuttschicht, dynamische Ver- formungsmoduli
	76	25	horizontal	geschüttet	n	dyn $E_1$	0,035	0,124	
	68	20	horizontal	geschüttet	n	dyn $E_1$	0,002	0,535	
	68	20	horizontal	geschüttet	n	dyn $E_1$	0,043	0,592	

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
6.3	95	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,023	0,177	BAB A 81 Erdplanum dynamische Verformungs- moduli
	101	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>1</sub>	0,012	0,159	
	101	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,451	0,200	
						dyn E <sub>1</sub>	1,010	0,449	
	100	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,877	0,186	
						dyn E <sub>1</sub>	0,150	0,393	
	101	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,048	0,124	
	101	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>1</sub>	10,103	0,329	
						dyn E <sub>v2</sub>	0,082	0,214	
	100	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,093	0,110	
	101	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	0,062	0,065	
						dyn E <sub>1</sub>	0,179	0,066	
	99	20	horizontal	natürlich	b	dyn E <sub>v2</sub>	1,839	0,189	
dyn E <sub>1</sub>									
6.4	95	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	7,169	0,254	BAB A 81 Frostschuttschicht dynamische Verformungs- moduli
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,002	0,531	
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,318	0,209	
	100	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,064	0,395	
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,033	0,148	
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,850	0,843	
	100	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,007	0,016	
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	0,005	0,104	
	101	20	horizontal	geschüttet	n	E <sub>1</sub>	2,270	0,519	
7	183	~0,044	vertikal	natürlich	b	c <sub>u</sub>	0,332	4,718	linearer Trend entfernt

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
8	174	~0,25	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	3,689	10,540	linearer Trend entfernt
	134	~0,24	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	0,006	2,102	
	165	~0,23	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	8,908	8,251	
	171	~0,23	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	0,018	2,824	
	171	~0,24	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	0,000	2,963	
	120	~0,24	vertikal	natürlich	n	$q_s$	0,028	3,659	
9	66	~0,38	vertikal	natürlich	b	$q_{LU}$	0,011	1,944	linearer Trend entfernt
	174	~0,16	vertikal	natürlich	b	$w$	0,075	1,314	
	55	~0,51	vertikal	natürlich	b	$w_{L1}$	0,111	0,425	
	59	~0,48	vertikal	natürlich	b	$w_{La}$	0,023	2,173	
	57	~0,22	vertikal	natürlich	b	$\phi_a$	0,253	7,476	
	177	~0,16	vertikal	natürlich	b	$w$	0,015	4,608	
	134	~0,19	vertikal	natürlich	b	$w_L$	0,029	5,866	
	148	~0,17	vertikal	natürlich	b	$w_{La}$	0,693	$\infty$	
	10	124	~0,37	vertikal	natürlich	n	u	0,0003	
11	120	~0,37	vertikal	natürlich	n	$f_{sS}$	0,036	1,254	linearer Trend entfernt
	221	~0,20	vertikal	natürlich	n	$q_{sS}$	0,017	0,970	
	188	~0,18	vertikal	natürlich	n	$f_s$	3,315	7,472	
	185	~0,18	vertikal	natürlich	n	$q_s$	0,039	0,606	
12	135x33	1,50	horizontal	geschüttet/ natürlich	n	$n_{10}$	0,270	0,449	linearer Trend entfernt, teil- weise ausgeprägte Anisotropie in horizontaler und vertikaler Richtung
	33x135	0,10	vertikal	geschüttet/ natürlich	n	$n_{10}$	0,074	*	

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
13	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	w	0,000	1,004	+
	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	w	0,000	0,917	+
						$\rho$	0,246	2,547	+
	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	$\rho$	1,143	0,622	+
	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	w	1,130	4,672	+
						$\rho$	0,410	6,224	+
	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	$I_p$	0,500	1,686	+
						$I_c$	0,909	3,248	+
	~26	0,25	vertikal	natürlich	b	$c_c$	0,867	0,571	+
	~13	0,5	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,000	1,686	+
~13	0,5	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,078	1,200	+	
~13	0,5	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,000	1,004	+	
14.1	200	0,15	horizontal	natürlich	b	$w_L$	0,144	6,363	+
	~172	0,30	horizontal	natürlich	b	$w_L$	0,000	3,991	+
						$I_p$	0,305	$\infty$	+
14.2	26	0,33	vertikal	natürlich	b	$\rho_d$	14,984	3,679	+
						w	14,152	$\infty$	+
						$w_L$	2,267	2,138	+
						$I_p$	0,167	6,520	+
14.3	98	0,33	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,663	0,814	+
14.4	162	0,10	horizontal	geschüttet	n	$E_v$	0,236	9,755	Plattendurch- messer 50 mm

+ Schätzwerte aus der Autokorrelation

Nr.	Stichproben- umfang	Proben- abstand (m)	Entnahme- richtung	Lagerung	bindig nichtbindig	Kennwert	Probenparameter		Bemerkungen
							P	$\Delta$ (1/m)	
15.1	400	0,2	vertikal	natürlich	n	$q_s$	0,375	3.993	+
						$f_s$	0,472	7,136	+
15.2	95	0,5	vertikal	natürlich	n	w	0,000	0,744	+
16	110	0,33	horizontal	natürlich	n	u	0,040	2,816	+
						k	1,462	3,544	+
						$d_{50}$	0,518	4,276	+
	100	0,33	vertikal	natürlich	n	u	0,634	6,752	+
						k	0,250	4,036	+
					$d_{50}$	0,118	2,918	+	
17.1	117	-0,16	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,221	2,009	+
	99	-0,25	vertikal	natürlich	b	$c_u$	2,088	3,540	+
17.2	36	-0,70	vertikal	natürlich	b	$c_u$	0,182	4.413	+

+ Schätzwerte aus der Autokorrelation

Tabelle 3 Varianzreduktion des A11-Prozesses  
für Flächen und Quader

		DELTA = .125					DELTA = .250					DELTA = .500					DELTA = 1.000					DELTA = 2.000				
A1	B1/A1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	.25	.99	.99	.99	.99	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.96	.95	.95	.94	.94	.92	.91	.90	.89	.87	.84	.83	.81	.79	.78
	.50	.98	.98	.97	.97	.97	.96	.95	.95	.94	.94	.92	.91	.90	.89	.87	.84	.82	.82	.80	.78	.72	.70	.68	.64	.62
	1.00	.96	.95	.95	.94	.94	.92	.91	.90	.89	.88	.83	.84	.81	.79	.76	.71	.70	.67	.67	.60	.52	.50	.48	.40	.39
	2.00	.92	.92	.90	.89	.88	.84	.82	.82	.79	.78	.73	.69	.66	.64	.60	.55	.52	.48	.43	.38	.33	.30	.27	.23	.19
	4.00	.85	.83	.82	.80	.78	.73	.68	.68	.65	.61	.54	.50	.46	.43	.39	.34	.31	.26	.23	.19	.18	.14	.10	.08	.08
	8.00	.71	.68	.67	.64	.60	.55	.50	.47	.44	.39	.33	.30	.26	.22	.20	.16	.13	.11	.09	.06	.07	.05	.02	.03	.02
	16.00	.54	.51	.47	.44	.40	.35	.27	.26	.22	.19	.17	.12	.10	.07	.05	.08	.05	.03	.03	.02	.02	.01	.01	.01	.00
	32.00	.31	.28	.25	.23	.19	.19	.14	.10	.07	.07	.09	.04	.03	.03	.03	.03	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.00	.00
	64.00	.18	.12	.10	.08	.07	.07	.05	.03	.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
	128.00	.05	.05	.03	.02	.02	.03	.02	.01	.01	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00

VARIANZREDUKTION VON QUADERN DELTA = .125

C1/A1		0.1									0.2									0.3								
A1	B1/A1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
.250		.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.98	.98	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.98	.98	.98	.99	.99	.99	.99	.99	.98	.98	.98
.500		.98	.98	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.97	.97	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.98	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97
1.000		.96	.96	.96	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.95	.95	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.94	.93
2.000		.92	.92	.91	.91	.91	.90	.89	.89	.89	.88	.91	.91	.91	.90	.90	.90	.89	.88	.88	.90	.90	.90	.89	.90	.88	.88	.88
4.000		.84	.84	.84	.82	.82	.81	.81	.79	.77	.77	.84	.83	.82	.82	.81	.80	.79	.79	.77	.82	.82	.81	.80	.80	.79	.78	.76
8.000		.71	.73	.72	.69	.68	.67	.64	.62	.63	.61	.71	.70	.69	.67	.67	.65	.63	.62	.60	.69	.68	.65	.66	.64	.64	.61	.60
16.000		.55	.55	.54	.50	.49	.46	.44	.43	.38	.40	.53	.52	.50	.48	.47	.44	.41	.40	.39	.50	.47	.46	.42	.43	.41	.40	.38
32.000		.35	.31	.32	.30	.28	.25	.24	.23	.21	.17	.32	.28	.28	.26	.24	.21	.22	.19	.19	.26	.26	.25	.24	.20	.19	.18	.17
64.000		.19	.17	.12	.13	.10	.09	.08	.07	.08	.07	.14	.13	.12	.10	.08	.07	.07	.07	.06	.10	.10	.09	.07	.07	.07	.06	.06
128.000		.08	.06	.05	.03	.03	.03	.02	.01	.02		.05	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.02	.03	.03	.02	.02	.01	.01	.01	.01

C1/A1		0.4									0.5									0.6									0.7									0.8									0.9									1.0								
A1	B1/A1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0																																			
.250		.99	.99	.99	.98	.98	.98	.98	.99	.99	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98	.98																																
.500		.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.96	.96	.96	.96	.96	.96	.96	.96																																			
1.000		.95	.94	.94	.94	.94	.93	.93	.94	.94	.94	.94	.93	.93	.94	.94	.94	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.92																																			
2.000		.90	.90	.89	.88	.88	.88	.87	.89	.89	.88	.88	.87	.88	.89	.88	.88	.87	.87	.88	.87	.87	.86	.87	.86	.86	.86	.85	.85																																			
4.000		.81	.81	.80	.79	.78	.77	.76	.81	.79	.79	.78	.77	.76	.79	.77	.77	.76	.75	.78	.76	.76	.74	.75	.75	.74	.74	.72	.72																																			
8.000		.67	.67	.66	.63	.62	.62	.58	.65	.64	.62	.61	.60	.58	.61	.60	.61	.59	.59	.60	.58	.57	.56	.57	.57	.56	.55	.54	.54																																			
16.000		.47	.45	.43	.43	.39	.39	.36	.43	.44	.40	.38	.39	.35	.40	.40	.37	.34	.36	.37	.36	.34	.34	.35	.34	.33	.33	.31	.30																																			
32.000		.23	.23	.21	.20	.19	.19	.18	.22	.19	.18	.19	.16	.15	.20	.17	.16	.16	.14	.16	.15	.14	.13	.13	.14	.12	.12	.12	.12																																			
64.000		.09	.08	.08	.06	.06	.05	.05	.07	.07	.06	.06	.05	.05	.06	.05	.04	.04	.04	.04	.05	.04	.03	.04	.03	.03	.03	.03	.02																																			
128.000		.02	.01	.02	.01	.01	.01	.01	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.01	.01	.00	.01	.01	.00	.00																																			

VARIANZREDUKTION VON QUADERN DELTA = .250

C1/A1		0.1										0.2										0.3									
A1	B1/A1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0			
.250		.98	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.98	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.97	.97	.98	.98	.98	.97	.97	.97	.97	.97			
.500		.96	.96	.96	.95	.95	.94	.95	.94	.94	.94	.95	.96	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.93	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.94			
1.000		.92	.92	.91	.91	.91	.90	.90	.89	.88	.88	.91	.91	.91	.90	.90	.90	.89	.88	.88	.90	.90	.90	.89	.89	.89	.88	.87			
2.000		.85	.84	.84	.83	.82	.82	.80	.80	.79	.78	.84	.83	.82	.82	.81	.80	.79	.78	.78	.82	.82	.81	.79	.79	.78	.77	.77			
4.000		.74	.71	.71	.69	.69	.67	.66	.64	.62	.60	.72	.70	.69	.67	.65	.64	.64	.62	.61	.68	.68	.66	.66	.65	.63	.61	.58			
8.000		.56	.53	.52	.51	.48	.48	.44	.42	.43	.39	.53	.52	.50	.49	.46	.43	.43	.41	.39	.50	.46	.47	.44	.41	.41	.39	.38			
16.000		.35	.34	.34	.29	.27	.25	.24	.23	.20	.21	.31	.31	.27	.26	.24	.22	.20	.19	.18	.29	.26	.24	.23	.20	.20	.18	.18			
32.000		.18	.17	.14	.13	.11	.10	.09	.07	.07	.07	.13	.13	.12	.10	.08	.08	.07	.07	.06	.10	.11	.09	.07	.06	.06	.05	.05			
64.000		.07	.06	.05	.04	.03	.03	.03	.02	.03	.02	.05	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.02	.01	.03	.03	.02	.01	.01	.01	.02	.01			
128.000		.03	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.01	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.01	.00	.01	.00	.00	.00			

C1/A1		0.4										0.5										0.6										0.7										0.8										0.9										1.0									
A1	B1/A1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0																																										
.250		.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.97	.96	.97	.97	.96	.96	.97	.96	.96	.96	.96	.96																																										
.500		.95	.95	.95	.94	.94	.94	.93	.95	.94	.94	.94	.93	.93	.94	.94	.94	.93	.93	.94	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.92	.92																																										
1.000		.90	.90	.89	.89	.89	.88	.88	.89	.89	.89	.88	.87	.87	.88	.88	.87	.87	.87	.88	.87	.87	.86	.87	.86	.86	.86	.85	.85																																										
2.000		.82	.80	.80	.80	.78	.77	.76	.81	.79	.79	.78	.77	.77	.79	.78	.77	.76	.75	.77	.76	.76	.74	.76	.75	.74	.75	.74	.72																																										
4.000		.67	.65	.66	.62	.62	.61	.59	.65	.65	.62	.61	.59	.58	.63	.61	.60	.60	.57	.60	.60	.57	.56	.57	.57	.55	.56	.53	.53																																										
8.000		.46	.44	.44	.41	.38	.38	.37	.42	.41	.39	.39	.37	.34	.41	.39	.38	.35	.35	.38	.35	.33	.33	.34	.33	.33	.34	.31	.30																																										
16.000		.23	.22	.21	.19	.17	.16	.16	.21	.20	.19	.17	.15	.15	.19	.16	.17	.15	.15	.16	.16	.15	.14	.14	.13	.14	.13	.12	.11																																										
32.000		.09	.07	.08	.05	.06	.05	.05	.07	.07	.06	.06	.05	.04	.05	.05	.04	.05	.04	.04	.03	.04	.04	.04	.04	.04	.04	.02	.02																																										
64.000		.02	.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.01	.01	.01																																										
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										

VARIANZREDUKTION VON QUADERN DELTA = ,500

C1/A1		0.1										0.2										0.3									
A1	B1/A1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0			
.250		.96	.96	.95	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.96	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94	.94	.95	.95	.95	.95	.95	.94	.94	.94			
.500		.92	.91	.91	.91	.91	.90	.90	.89	.88	.88	.91	.91	.91	.90	.90	.90	.89	.88	.88	.91	.90	.90	.89	.89	.89	.88	.88			
1.000		.85	.85	.84	.83	.82	.82	.80	.80	.78	.77	.84	.83	.82	.81	.82	.80	.80	.79	.78	.83	.82	.82	.81	.79	.79	.77	.77			
2.000		.73	.73	.71	.70	.68	.66	.66	.65	.65	.61	.71	.69	.69	.68	.67	.65	.63	.62	.59	.68	.68	.68	.67	.65	.62	.62	.61			
4.000		.56	.54	.54	.49	.48	.47	.44	.42	.42	.40	.53	.51	.51	.47	.46	.44	.44	.41	.41	.49	.48	.45	.43	.43	.41	.40	.38			
8.000		.35	.33	.32	.28	.28	.25	.25	.22	.21	.18	.30	.30	.27	.26	.23	.24	.21	.21	.17	.26	.26	.24	.22	.23	.19	.17	.18			
16.000		.18	.16	.14	.14	.11	.09	.08	.07	.08	.06	.15	.13	.11	.11	.08	.08	.08	.07	.06	.11	.09	.09	.08	.07	.07	.05	.05			
32.000		.08	.05	.05	.04	.04	.03	.02	.02	.02	.02	.05	.03	.03	.03	.02	.02	.02	.02	.02	.03	.03	.02	.02	.01	.01	.01	.02			
64.000		.03	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			

C1/A1		0.4										0.5										0.6										0.7										0.8										0.9										1.0									
A1	B1/A1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0																																										
.250		.95	.95	.94	.94	.94	.94	.93	.95	.94	.94	.94	.94	.93	.94	.94	.94	.93	.93	.94	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.93	.92																																										
.500		.90	.90	.89	.89	.88	.88	.88	.89	.89	.89	.88	.87	.87	.88	.88	.88	.87	.87	.88	.87	.87	.86	.87	.86	.86	.85	.85	.85																																										
1.000		.82	.80	.79	.79	.77	.77	.77	.79	.80	.79	.77	.77	.76	.78	.78	.77	.76	.75	.77	.76	.75	.75	.75	.75	.73	.74	.73	.72																																										
2.000		.66	.66	.64	.63	.62	.59	.59	.65	.63	.63	.60	.61	.58	.62	.61	.59	.59	.58	.61	.58	.58	.55	.58	.55	.55	.54	.54	.53																																										
4.000		.48	.45	.41	.42	.40	.38	.37	.44	.43	.41	.39	.37	.37	.41	.39	.38	.36	.34	.38	.35	.35	.34	.35	.32	.33	.32	.31	.31																																										
8.000		.25	.22	.21	.20	.19	.18	.17	.22	.19	.19	.18	.16	.16	.18	.18	.18	.15	.15	.16	.15	.13	.14	.13	.14	.13	.12	.12	.11																																										
16.000		.10	.08	.07	.05	.06	.06	.05	.07	.06	.06	.05	.05	.04	.06	.05	.05	.05	.04	.04	.04	.04	.03	.04	.04	.03	.03	.03	.03																																										
32.000		.02	.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.01	.00																																										
64.000		.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										

VARIANZREDUKTION VON QUADERN DELTA = 1.000

C1/A1		0.1										0.2										0.3									
A1	B1/A1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0			
.250		.92	.91	.91	.91	.91	.90	.90	.89	.89	.88	.91	.91	.90	.90	.90	.89	.89	.88	.87	.91	.90	.89	.89	.89	.88	.88	.88			
.500		.85	.84	.83	.83	.82	.81	.80	.80	.79	.77	.84	.84	.83	.82	.80	.80	.79	.78	.77	.83	.82	.81	.80	.79	.79	.78	.77			
1.000		.73	.74	.71	.70	.68	.67	.65	.64	.63	.60	.70	.69	.69	.67	.69	.65	.62	.63	.61	.69	.67	.67	.65	.65	.63	.62	.60			
2.000		.56	.55	.54	.49	.49	.46	.43	.42	.41	.40	.53	.52	.49	.47	.46	.45	.41	.40	.38	.51	.45	.46	.43	.42	.41	.40	.39			
4.000		.34	.32	.31	.29	.27	.25	.22	.22	.18	.19	.31	.28	.28	.26	.24	.23	.21	.20	.18	.28	.25	.26	.23	.23	.21	.19	.16			
8.000		.18	.17	.15	.13	.13	.09	.09	.07	.06	.07	.15	.12	.11	.09	.09	.08	.07	.07	.06	.11	.10	.09	.09	.08	.06	.07	.07			
16.000		.08	.06	.06	.04	.04	.03	.02	.02	.02	.02	.04	.03	.02	.03	.02	.02	.02	.02	.02	.04	.02	.02	.02	.02	.01	.01	.01			
32.000		.03	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.01	.00	.01	.01	.01	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.01	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00			
64.000		.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			

C1/A1		0.4										0.5										0.6										0.7										0.8										0.9										1.0									
A1	B1/A1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0																																										
.250		.90	.90	.89	.89	.89	.88	.87	.89	.89	.88	.89	.87	.87	.89	.88	.87	.87	.87	.88	.87	.87	.86	.87	.86	.86	.86	.86	.85																																										
.500		.81	.81	.80	.79	.77	.78	.77	.80	.79	.78	.77	.78	.76	.79	.77	.77	.76	.75	.77	.76	.76	.75	.75	.75	.74	.74	.73	.73																																										
1.000		.67	.65	.65	.63	.62	.61	.59	.64	.64	.63	.62	.60	.58	.63	.61	.60	.59	.57	.62	.58	.58	.56	.58	.57	.56	.56	.55	.53																																										
2.000		.46	.45	.42	.41	.39	.35	.37	.44	.43	.39	.38	.37	.35	.39	.39	.38	.36	.34	.39	.35	.35	.33	.34	.33	.33	.32	.32	.30																																										
4.000		.23	.22	.21	.21	.18	.18	.16	.24	.20	.18	.18	.17	.15	.19	.18	.16	.15	.15	.17	.15	.15	.14	.12	.14	.13	.13	.12	.12																																										
8.000		.09	.08	.07	.06	.06	.05	.05	.07	.05	.05	.05	.04	.04	.05	.05	.04	.04	.03	.04	.04	.04	.04	.04	.03	.03	.03	.03	.03																																										
16.000		.02	.02	.02	.01	.01	.01	.01	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.02	.01	.01	.00	.01	.01	.01	.01	.00	.01	.01	.01	.01	.00	.00																																										
32.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
64.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										

VARIANZREDUKTION VON QUADERN DELTA = 2.000

C1/A1		0.1										0.2										0.3									
AI	B1/A1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0			
.250		.84	.84	.85	.83	.83	.81	.80	.79	.78	.78	.83	.83	.83	.82	.80	.80	.79	.79	.77	.83	.82	.81	.81	.80	.79	.78	.77			
.500		.73	.72	.71	.70	.68	.66	.66	.64	.62	.61	.71	.72	.69	.68	.66	.65	.64	.62	.62	.69	.68	.67	.66	.65	.63	.61	.60			
1.000		.56	.55	.50	.51	.50	.48	.45	.42	.40	.40	.51	.51	.49	.47	.44	.44	.44	.42	.40	.48	.48	.45	.44	.42	.41	.39	.38			
2.000		.35	.34	.31	.30	.25	.25	.24	.22	.20	.19	.34	.30	.28	.25	.23	.23	.21	.19	.19	.28	.26	.25	.22	.21	.18	.18	.18			
4.000		.17	.16	.15	.13	.12	.09	.08	.08	.07	.06	.13	.15	.11	.10	.08	.08	.06	.07	.06	.10	.09	.09	.07	.07	.07	.06	.06			
8.000		.09	.06	.05	.05	.04	.03	.03	.02	.02	.02	.06	.03	.03	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.03	.03	.02	.02	.02	.01	.01	.01			
16.000		.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			
32.000		.01	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			
64.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00			

C1/A1		0.4										0.5										0.6										0.7										0.8										0.9										1.0									
AI	B1/A1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	0.9	1.0	0.9	1.0	1.0																																										
.250		.81	.80	.80	.79	.78	.77	.77	.80	.80	.78	.78	.77	.76	.78	.77	.76	.76	.75	.77	.76	.75	.75	.76	.74	.74	.74	.74	.72																																										
.500		.65	.66	.65	.62	.61	.61	.59	.65	.63	.63	.60	.60	.59	.62	.62	.59	.59	.57	.60	.59	.57	.56	.58	.57	.55	.55	.54	.54																																										
1.000		.47	.44	.43	.42	.41	.38	.38	.42	.42	.39	.39	.37	.34	.40	.38	.36	.37	.34	.37	.36	.35	.34	.35	.34	.31	.31	.31	.30																																										
2.000		.26	.24	.22	.21	.19	.16	.16	.20	.20	.18	.18	.16	.18	.17	.16	.15	.15	.18	.14	.14	.14	.14	.14	.12	.13	.12	.12																																											
4.000		.08	.08	.07	.06	.05	.05	.05	.07	.06	.05	.06	.06	.04	.06	.06	.05	.05	.04	.05	.04	.04	.03	.04	.04	.03	.03	.03	.03																																										
8.000		.02	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.02	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.01	.00	.00	.01	.00																																										
16.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
32.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
64.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										
128.000		.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00																																										



Schriftenreihe  
Lehrstuhl und Prüfstuhl  
für  
Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik  
der Technischen Universität München

Herausgegeben von  
Prof. Dr.-Ing. Rudolf Floss  
Ordinarius für Grundbau, Bodenmechanik  
und Felsmechanik

---

- |                |   |
|----------------|---|
| Heft 1<br>1982 | Tragfähigkeit von Verpreßbankern in nichtbindigem Boden   |
| Heft 2<br>1983 | Beiträge zur Anwendung der Stochastik und Zuverlässigkeitstheorie in der Bodenmechanik                |
| Heft 3<br>1984 | In situ-Versuche zur Ermittlung der Unterbausteifigkeit an zwei Pfeilern der Sinntalbrücke Schaippach |
| Heft 4<br>1985 | Ein Beitrag zum Spannungs-Verformungsverhalten silikatgel-injizierter Sande                           |
| Heft 5<br>1985 | Beiträge zum Tragverhalten axial zyklisch belasteter Pfähle   |
| Heft 6<br>1986 | Forschungsbeiträge zum mechanischen Verhalten von Geotextilien  |
| Heft 7<br>1986 | Beschreibung der räumlichen Streuungen von Bodenkennwerten mit Hilfe der Zeitreihenanalyse            |
| Heft 8<br>1987 | Ein stochastisches Bodenmodell für geotechnische Aufgaben   |

