

Lehrstuhl und Prüfam
für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik
der Technischen Universität München

Schriftenreihe
Heft 16

**Beitrag
zur statistischen Qualitätskontrolle
im Erdbau**

von
Wolfram Kudla

München, 1990

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Rudolf Floss
Ordinarius für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik

Lehrstuhl und Prüfamnt
für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik
der Technischen Universität München

**Beitrag zur
statistischen Qualitätskontrolle
im Erdbau**

Wolfram Kudla

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor -Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann

1. Prüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Floss

2. Prüfer: Dr.-Ing. habil. R. Rackwitz

Die Dissertation wurde am 18. 10. 1989 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 13. 2. 1990 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation befaßt sich mit der Überprüfung der Bodenverdichtung auf statistischer Grundlage. Diese Thematik hat zum einen durch die Einführung von probabilistischen Bemessungsregeln und zum anderen durch hohe Qualitätsanforderungen in vielen Bereichen des Bauwesens an Bedeutung gewonnen. Das dargelegte Konzept zielt darauf ab, objektive Entscheidungen bezüglich ausreichender und nicht ausreichender Qualität zu ermöglichen. Auf Grund der Methodik des Vorgehens sind einige Abschnitte auch auf andere Bereiche des Bauwesens anwendbar.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Floss möchte ich an dieser Stelle für die Ermöglichung und Förderung der Arbeit, für die Übernahme des Hauptreferates und für die Veröffentlichung im Rahmen dieser Schriftenreihe danken.

Herrn Privatdozenten Dr.-Ing. habil. R. Rackwitz danke ich sehr für die Übernahme des Koreferates.

Herrn Dr. rer. nat. T. Deutler, Universität Mannheim, danke ich herzlich für die hilfreichen Ratschläge und fruchtbaren Diskussionen.

Mein Dank gilt ferner Herrn Ltd. Akad. Dir. Dipl.-Ing. P. v. Soos für sein Interesse an der Statistik und seine vielfältigen Anregungen, die mir vor allem den Einstieg in die schwierige Thematik sehr erleichtert haben.

Allen Kollegen des Lehrstuhls und Prüfamts für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München, die durch Ratschläge bzw. Unterstützung bei den Versuchen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich herzlich danken.

Mein Dank gilt auch allen Straßenbauämtern und Behörden, die mich bei der umfangreichen Datensammlung unterstützt haben.

München, im März 1990

Wolfram Kudla

für Edith, meine Frau

Kurzfassung

Alle Erdbauwerke erfordern aus unterschiedlichen Gründen eine ausreichende Verdichtung. Die dabei zu überprüfenden Merkmale (Verdichtungsgrad und Verformungsmodul) werden als Zufallsvariable betrachtet, die einer Normalverteilung unterliegen. Die Prüfungen für die Bodenverdichtung lassen sich einteilen in

- a) flächendeckende Prüfverfahren,
- b) Prüfungen nach einem statistischen Prüfplan,
- c) Prüfungen bei denen die Versuchspunkte subjektiv ausgewählt werden.

Flächendeckende Prüfverfahren bieten die meisten Vorteile, da mit ihnen einzelne ungenügend verdichtete Stellen erkannt werden können.

Bei Prüfungen nach einem statistischen Prüfplan erfolgt die Beurteilung eines Prüfloses auf Grund einer Stichprobe. Die Versuchspunkte für die Messungen der Merkmalswerte müssen dabei völlig zufällig ausgewählt werden. Auf Grund der Prüfgröße, die aus den Merkmalswerten der Stichprobe und den Prüfplanparametern berechnet wird, und der Entscheidungsregel wird über Annahme oder Ablehnung des Prüfloses entschieden. Bei einer Ablehnung des Prüfloses muß das gesamte Los nachverdichtet werden und nicht nur einzelnen Stellen im Los.

Die Festlegung der Anforderung erfolgt sinnvollerweise durch die Festlegung eines Grenzwertes T_u und die Bestimmung eines maximal zulässigen Schlechtanteiles (Fraktileforderung). Die quantitative Festlegung muß in engem Zusammenhang mit der nachfolgenden Überprüfung mittels eines statistischen Prüfplanes gesehen werden.

Die Vorteile der einzelnen Prüfplanarten (Einfachstichprobenprüfpläne, Doppelstichprobenprüfpläne, Folgeprüfpläne) werden erläutert und die Berechnung der Prüfplanparameter wird angegeben. Für die Möglichkeit einer Schwachstellenprüfung wird ein eigener Prüfplan hergeleitet. Die Annahmewahrscheinlichkeit eines Prüfloses bei festgelegten Prüfplanparametern zeigt die Operationscharakteristik des Prüfplanes.

Der mittlere Prüffehler (Wiederhol- und Vergleichstandardabweichung) bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades wird berechnet. Dieser wird bei der quantitativen Festlegung der Anforderung näherungsweise berücksichtigt. Unter Einbeziehung des Prüffehlers ergibt sich, daß die Forderung einer

10%-Fraktile für die gemessenen Merkmalswerte bei den üblichen Mindestwerten T_u zwischen 95% und 100% Verdichtungsgrad zu einer sinnvollen Anforderung führt.

Mit Hilfe einer umfangreichen Datensammlung von Prüfungen des Verdichtungsgrades und des Verformungsmoduls wird das ungefilterte Produktionsangebot im Straßenbau erfaßt und mittels Bayesscher Theorie modelliert. Mit der modellierten Vorinformation und den Operationscharakteristiken der Prüfpläne werden die Prädiktorverteilungen von Mittelwert, Standardabweichung und Schlechtanteil berechnet. Die Prädiktorverteilungen sind das mathematische Hilfsmittel zur Quantifizierung des gefilterten Produktionsangebotes. Aus den Prädiktorverteilungen lassen sich die Auswirkungen der statistischen Abnahmekontrollen auf das ungefilterte Produktionsangebot abschätzen.

Summary

This study considers statistical control methods of evaluating the compaction of earth structures. Many types of earth structures require controlled compaction, and the most important characteristics of compacted soil are the degree of compaction and the deformation modulus. In this study, both are considered to be normally-distributed random variables.

Compaction inspection can be grouped according to the following three types of test plans:

- a) Methods that give continuous coverage of the entire fill mass (as with dynamic compaction control),
- b) Methods which are based on a statistical sampling plan (acceptance sampling), and
- c) Methods in which tests are performed at subjectively determined points.

Continuous compaction control, as in a) above, gives the most complete evaluation, because single poorly compacted points may be detected.

If compaction control is based on a statistical acceptance sampling plan, as in b) above, judgement about an entire region of the fill results from the results of a limited number of tests, the random sample. The test locations must be selected randomly, and a test statistic is calculated from the results of the tests. The decision about acceptance or rejection of the entire region of fill is then based on the test statistic and a decision rule of the sampling plan. If the region is rejected, the entire region must be recompacted (i. e. not just the specific points where compaction was not adequate).

A logical way to create a specification is to fix a specified limit T_u (quantile) and a maximum percentage of values that may fall below the specified limit (fraction defective). The quantitative determination of the specified limit and the maximum percentage depends closely on the statistical details of the sampling plan.

The advantages of individual statistical sampling plans (single sampling inspection, double sampling inspection, sequential sampling inspection) in compaction control are described and the calculation of the parameters associated with such sampling plans is presented. A separate test plan is presented for use at poorly compacted points. The probability of acceptance of the region of compacted fill can be obtained from the given operating characteristic curve of the sampling plan.

The average test error (repeatability and reproducibility) is calculated for the degree of compaction. It is approximately taken into consideration when the specifications are quantitatively fixed. Considering the measuring error and the mostly specified lower limits, which fall between 95% and 100% relative compaction, a requirement that no more than 10% of the measured characteristics falls below the specified limit is considered reasonable.

An extensive data collection was performed, yielding values of the degree of compaction and the deformation modulus, to record the „unfiltered production supply“ in road construction in Germany. The „production supply“ was modeled by means of Bayes's Theorem. Using Bayesian prior information and the operating characteristic curves of the sampling plans, the „predictive distributions“ of the average value, the standard deviation and the fraction defective were calculated. The predictive distributions are the mathematical tool to quantify the „filtered production supply“. Using the predictive distributions, the effect of the statistical sampling plans on the unfiltered production supply can be estimated.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Einführung	7
1.2	Stand der Qualitätsprüfungen	8
1.3	Literaturübersicht	14
1.4	Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit	16
2	Zur statistischen Beschreibung von Bodenkennwerten	17
3	Statistische Verfahren für Abnahmekontrollen und zur Prozeßkontrolle	19
3.1	Zur Festlegung von Anforderungen	19
3.2	Grundlagen zu statistischen Prüfplänen	19
3.2.1	Die Operationscharakteristik und die Risiken 1. und 2. Art	20
3.2.2	Möglichkeiten zur Festlegung der Operationscharakteristik	22
3.3	Klassische Prüfplanarten	24
3.3.1	Allgemeine Grundsätze	24
3.3.2	Einfachstichprobenprüfpläne	26
3.3.3	Doppelte Stichprobenpläne	31
3.3.4	Folgeprüfpläne	32
3.4	Schwachstellenprüfpläne	36
3.4.1	Schwachstellenmodell	36
3.4.2	Herleitung der Operationscharakteristik	39
3.4.3	Die Reduzierung der Anzahl der Messungen bei Schwachstellenprüfplänen gegenüber Einfachstichprobenplänen	48
3.4.4	Simulation der Operationscharakteristik	51
3.4.5	Auswirkungen auf die Annahmewahrscheinlichkeit bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl	53
3.5	Die Extremwertkarte zur Prozeßüberwachung	56
4	Indirekte Schnellprüfverfahren	58
4.1	Flächendeckende Schnellprüfverfahren	58
4.2	Punktueller Schnellprüfverfahren	59
5	Prüffehler	61
5.1	Modellgleichung	61
5.2	Ermittlung des Prüffehlers bei Dichtemessungen durch eine Ringanalyse	63

5.3	Ermittlung des Prüffehlers bei Dichtemessungen mit Hilfe der Zeitreihenanalyse	64
5.4	Wiederhol- und Vergleichpräzision beim Proctorversuch	67
5.5	Wiederhol- und Vergleichpräzision bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades	68
6	Anordnung der Versuchspunkte	71
6.1	Allgemeines	71
6.2	Anhaltswerte für den Probenabstand mit Hilfe des ARIMA- Modells	71
7	Anwendung des dargelegten Überwachungskonzeptes	73
7.1	Die Anforderung unter Einbeziehung des Prüffehlers	73
7.2	Parameter der Stichprobenprüfpläne	74
8	Das ungefilterte Produktionsangebot im Erdbau	87
8.1	Korrelationen zwischen Prüflosparametern	88
8.1.1	Verdichtungsgrad	88
8.1.2	Verformungsmodul	93
8.2	Modellierung der Vorinformation	98
8.2.1	Ergebnisse für den Verdichtungsgrad	101
8.2.2	Ergebnisse für den Verformungsmodul	103
9	Die Prädiktorverteilung des Verdichtungsgrades und des E_{v2}- Modules	104
9.1	Theoretische Ableitung	104
9.2	Ergebnisse für den Verdichtungsgrad	107
9.3	Ergebnisse für den E_{v2} -Modul	115
10	Zusammenfassung	119
11	Anhang	120
12	Literatur	123

Abbildungsverzeichnis

1.1	Gliederung und mögliche Vorgehensweisen bei Qualitätsprüfungen	9
1.2	Verteilung des Verdichtungsgrades bei Zufallsauswahl und bei subjektiver Probenauswahl	13
3.1	einseitige Grenzwertforderungen	20
3.2	zweiseitige Grenzwertforderung	20
3.3	Die Operationscharakteristik	21
3.4	Zur Verteilung der Prüfgröße z	26
3.5	Versuchspunktauswahl bei Schwachstellenprüfung	37
3.6	Verteilung der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$	39
3.7	Verteilung der Prüfgröße $z_{o,s}$	41
3.8	$E(s_m)_{\sigma=1}$ in Abhängigkeit von $n_{o,s}$ und m	43
3.9	$Var(s_m)_{\sigma=1} * n_{o,s}$ in Abhängigkeit von $n_{o,s}$ und m	44
3.10	k_s als Funktion von $k_{o,s}$, m und $n_{o,s}$	49
3.11	Das Verhältnis $n_{o,s}/n_s$ als Funktion von m und k_s	50
3.12	Simulation der Operationscharakteristik, σ unbekannt	51
3.13	Simulation der Operationscharakteristik, σ unbekannt	52
3.14	Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 5, n_{o,s} = 5, k_{o,s} = 0.1$, aus einer der fünf Gruppen wurde nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.	53
3.15	Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 5, n_{o,s} = 5, k_{o,s} = 0.1$, aus zwei der fünf Gruppen wurde jeweils nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.	54
3.16	Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 20, n_{o,s} = 5, k_{o,s} = -0.4$, aus einer der fünf Gruppen wurde nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.	55
3.17	Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 20, n_{o,s} = 5, k_{o,s} = -0.4$, aus zwei der fünf Gruppen wurde jeweils nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.	55
3.18	Schema einer Extremwertkarte	56
5.1	Komponenten der Varianz des geschätzten Mittelwertes der wahren Merkmalswerte	62
5.2	σ_e aus der Autokorrelationsfunktion	65
6.1	Empirische Autokorrelationsfunktionen von vier Trockendichtemefreihen	72

7.1	Irrtumswahrscheinlichkeiten von einfachen Stichprobenprüfplänen mit unbekannter Standardabweichung als Funktion von n_s , $k_s = 0.88$	77
7.2	$E(n)$ als Funktion von p , α und β , Standardabweichung bekannt	77
8.1	Standardabweichung σ als Funktion des geforderten Grenzwertes	90
8.2	Häufigkeitsdiagramm und angepaßte Verteilungsfunktion (inverse-Gamma-2-Verteilung) für σ , ($T_u = 100\%$)	102
9.1	Operationscharakteristiken, exakte Charakteristiken und prädi-kative Verteilungsfunktionen des Schlechtanteiles p , $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	108
9.2	Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach stati-stischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	109
9.3	Verteilungsfunktion der Standardabweichungen vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	110
9.4	Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$.	111
9.5	Dichte- und Trennfunktion des Schlechtanteiles p , $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	111
9.6	Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	112
9.7	Verteilungsfunktion der Standardabweichung vor und nach stati-stischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	112
9.8	Dichtefunktionen des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$. . .	113
9.9	Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	113
9.10	Verteilungsfunktion des Verdichtungsgrades vor und nach stati-stischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	114
9.11	Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	115
9.12	Verteilungsfunktion der Standardabweichung vor und nach stati-stischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	116
9.13	Verteilungsfunktion des Schlechtanteiles vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	117
9.14	Dichtefunktionen des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$. . .	117
9.15	Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	118
9.16	Verteilungsfunktion des Schlechtanteiles vor und nach statisti-schen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45\frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$	118

Tabellenverzeichnis

3.1	$E(u_m)$, $Var(u_m)$ und $w_4(u_m)$ bei standardisierter, normaler Ausgangsverteilung	38
3.2	Der Erwartungswert $E(s_m)_{\sigma=1} = e_{m,n}$	43
3.3	Faktor $n_{o,s} * Var(s_m)_{\sigma=1} = v_{m,n}$ in Abhängigkeit von m und $n_{o,s}$	44
3.4	Die Kovarianzen $Cov(\bar{x}_m; s_m)_{\sigma=1} = f_{m,n}$ in Abhängigkeit von m und $n_{o,s}$	45
3.5	Faktor k_Q der Extremwertkarte	57
5.1	Wiederhol- und Vergleichpräzisionen bei der Bestimmung der Feuchtdichte	63
5.2	Wiederhol- und Vergleichpräzisionen bei der Bestimmung der Trockendichte	63
5.3	Ergebnisse für die Feuchtdichte	66
5.4	Ergebnisse für die Trockendichte	66
5.5	Schätzwerte für die Wiederhol- und Vergleichpräzision bei der Bestimmung der Proctordichte	67
5.6	Schätzwerte für die Wiederholstreuungen bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades in %-Verdichtungsgrad	69
5.7	Schätzwerte für die Vergleichstreuungen bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades in %-Verdichtungsgrad	69
5.8	Schätzwerte für die Standardabweichung des laborspezifischen, systematischen Fehlers bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades	70
7.1	Schlechtanteile der wahren Werte (Verdichtungsgrad) in Abhängigkeit von σ_{Gem} und $\gamma_{h,j}$	74
7.2	Parameter verschiedener Prüfpläne in Abhängigkeit von α und β	75
7.3	Hilfsgrößen für Variablenfolgeprüfpläne mit bekannter Standardabweichung und für Attributfolgeprüfpläne	78
7.4	Annahmezahlen $G_{A,s}$ für $l = 4 \dots 13$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung	79
7.5	Annahmezahlen $G_{A,s}$ für $l = 14 \dots 23$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung	80
7.6	Annahmezahlen $G_{A,s}$ für $l = 24 \dots 33$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung	81
7.7	Rückweisefaktoren $G_{R,s}$ für $l = 4 \dots 13$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung	82
7.8	Rückweisefaktoren $G_{R,s}$ für $l = 14 \dots 23$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung	83

7.9	Rückweisefaktoren $G_{R,s}$ für $l = 24 \dots 33$ von Variablenfol- geplänen mit unbekannter Standardabweichung	84
7.10	Parameter von Schwachstellenprüfplänen in Abhängigkeit von α und β , Standardabweichung bekannt	85
7.11	Parameter von Schwachstellenprüfplänen in Abhängigkeit von α und β , Standardabweichung unbekannt	86
8.1	Korrelationen zwischen verschiedenen Prüflosparametern bei gleichem geforderten Grenzwert T_u — Verdichtungsgrad	90
8.2	Statistische Kennwerte von 8 zementverfestigten Losen — Ver- dichtungsgrad	91
8.3	Statistische Kennwerte von 60 Losen — Verdichtungsgrad	92
8.4	Korrelationskoeffizienten zwischen Prüflosparametern und dem geforderten Grenzwert — E_{v2} -Modul	93
8.5	Korrelationen zwischen Prüflosparametern bei gleichem gefor- derten Grenzwert — E_{v2} -Modul	94
8.6	Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen — E_{v1} -Modul	95
8.7	Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen — E_{v2} -Modul	96
8.8	Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen — Verhältnis E_{12}	97
8.9	ML-Schätzer für den Verdichtungsgrad	101
8.10	ML-Schätzer für den E_{v2} -Modul	103
11.1	prozentualer Fehler bei der Berechnung von $\frac{\sigma_s}{\sigma}$ ohne den letz- ten Summanden in (11.1)	122

1 Einleitung

1.1 Einführung

Hohe Baukosten zwingen Unternehmer und Bauherren zu immer wirtschaftlicheren Bauweisen und Konstruktionen und damit zu einem immer näheren Aneinanderrücken der Grenze des Möglichen und der Grenze des Nötigen. Im Erdbau bedeutet dies für den Auftraggeber, daß er bestrebt sein muß, seine Anforderung für die Verdichtung von Schüttmaterialien so festzusetzen, daß das Ziel einer Erdbaumaßnahme, ein dauerhaft standfestes Plenum im Straßenbau, oder eine geforderte minimale Durchlässigkeit verbunden mit einer ausreichenden Scherfestigkeit im Dammbau, erreicht wird. Das Ziel des Unternehmers muß es sein, seinen Personal- und Maschineneinsatz so zu optimieren, daß die vom Bauherrn geforderte Leistung erbracht wird, gleichzeitig aber jede überflüssige und damit unwirtschaftliche Mehrarbeit vermieden wird. Der Qualitätskontrolle der erbrachten Leistung kommt damit in beiderseitigem Interesse eine besondere Bedeutung zu. Auf die im Erdbau dabei auftretenden Schwierigkeiten, bedingt durch verschiedenartige technische und sicherheitsrelevante Anforderungen, durch die Heterogenität des Baustoffes Bodens und den notwendigen Objektbezug ist bereits von FLOSS (1973) hingewiesen worden. URBAN (1986) stellt die Notwendigkeit und Bedeutung eines effektiven Qualitätssicherungssystems heraus und zeigt mögliche Strukturen eines solchen Systems auf.

Aber nicht nur aus wirtschaftlichen Gründen ist eine sorgfältige Qualitätskontrolle notwendig. Mit der Einführung der probabilistischen Sicherheitstheorie (vgl. KÖNIG (1982), POTTHARST (1982), BUB (1976)) ist dem Ingenieur die Möglichkeit gegeben, die Berechnung aller Tragwerksteile auf einem einheitlichen Sicherheitsniveau auszuführen. Dabei gehen die Einflußgrößen nicht in Form von deterministisch festgelegten Größen ein, sondern als Basisvariablen, die durch entsprechende Angaben ihrer Verteilung und deren Parameter gekennzeichnet sind. Die Parameter der Verteilung werden entweder aus Versuchen, aus a-priori-Informationen oder aus Erfahrung gewonnen. Durch die mit Abnahmekontrollen verbundene Filterung können sich die Parameter der Verteilung der Basisvariablen gegenüber den in der Planungsphase angenommenen Werten ändern. Dadurch kann eine Erhöhung der Zuverlässigkeit erreicht werden.

1.2 Stand der Qualitätsprüfungen

Ein wesentlicher Bestandteil eines umfassenden Qualitätssicherungssystems im Erdbau sind Qualitätsprüfungen. Diese beginnen jedoch nicht erst mit den Abnahmeprüfungen für ein fertiggestelltes Teilstück eines Bauleses, sondern bereits zu einem wesentlich früheren Zeitpunkt. Im Erdbau erfolgt die Beurteilung einer verdichteten Fläche in der Regel an Hand des erreichten Verdichtungsgrades oder bei grobkörnigen Böden mittels des erreichten Verformungsmoduls (im folgenden zusammenfassend als Merkmal bezeichnet, vgl. DIN 55350). Bei allen Qualitätsprüfungen ist zu beachten, daß dabei teilweise Merkmale gemessen werden, die nur in einem indirekten Zusammenhang mit der gewünschten Eigenschaft eines Bauwerkes, zum Beispiel der Standfestigkeit eines Planums oder eines Dammes, stehen. Die Korrelation zwischen dem gemessenen Merkmal und der gewünschten Eigenschaft ist dabei oft nur qualitativ beschreibbar. Dies muß bei der Aufstellung von Anforderungen und der „Schärfe“ der Kontrolle beachtet werden.

Grundsätzlich läßt sich das System der Qualitätsprüfungen gemäß Abbildung 1.1 gliedern. Die Auswahl der möglichen Vorgehensweisen bei den einzelnen Prüfungen hat dabei objektbezogen zu erfolgen.

Prüfungen zur Eignung von Schüttmaterial umfassen dabei die Feststellung der bodenmechanischen Eigenschaften und den Nachweis der Eignung für den vorgesehenen Verwendungszweck entsprechend den im Bauvertrag zugrunde gelegten Anforderungen. Auf diese Prüfungen soll hier nicht näher eingegangen werden.

Prüfungen zur Überwachung des Einbau- bzw. Schüttprozesses (Eigenüberwachungsprüfungen) sollen den Unternehmer in die Lage versetzen, die Kontinuität seines Einbauprozesses zu überwachen und die Parameter des Prozesses (z. B. Verdichtungsgerät, einzubringende Verdichtungsleistung, Wassergehalt) so rechtzeitig zu steuern, daß die Erfüllung der vertraglichen Leistung gewährleistet wird. Dabei kann nach drei verschiedenen Konzepten vorgegangen werden.

1. Die leistungsfähigste Eigenüberwachung bieten flächendeckende Prüfverfahren (FLOSS (1978); GRUBER, OBERMAYER, FLOSS (1983); OBERMAYER (1986)). Das Ziel einer solchen Prüfung ist primär eine gezielte Suche nach nicht ausreichend verdichteten Stellen. Ein weiteres Ziel, die Optimierung der notwendigen Verdichtungsleistung, wird durch die Aufzeichnung des Mittelwertes des indirekten Merkmales bei mehrfacher Überfahrt des gleichen Flächenstückes erreicht. Dadurch hat der Unternehmer die Möglichkeit, den Eintrag

von Verdichtungsleistung abzubrechen, wenn eine weitere Steigerung des Mittelwertes mit dem verwendeten Verdichtungsgerät nicht mehr möglich ist.

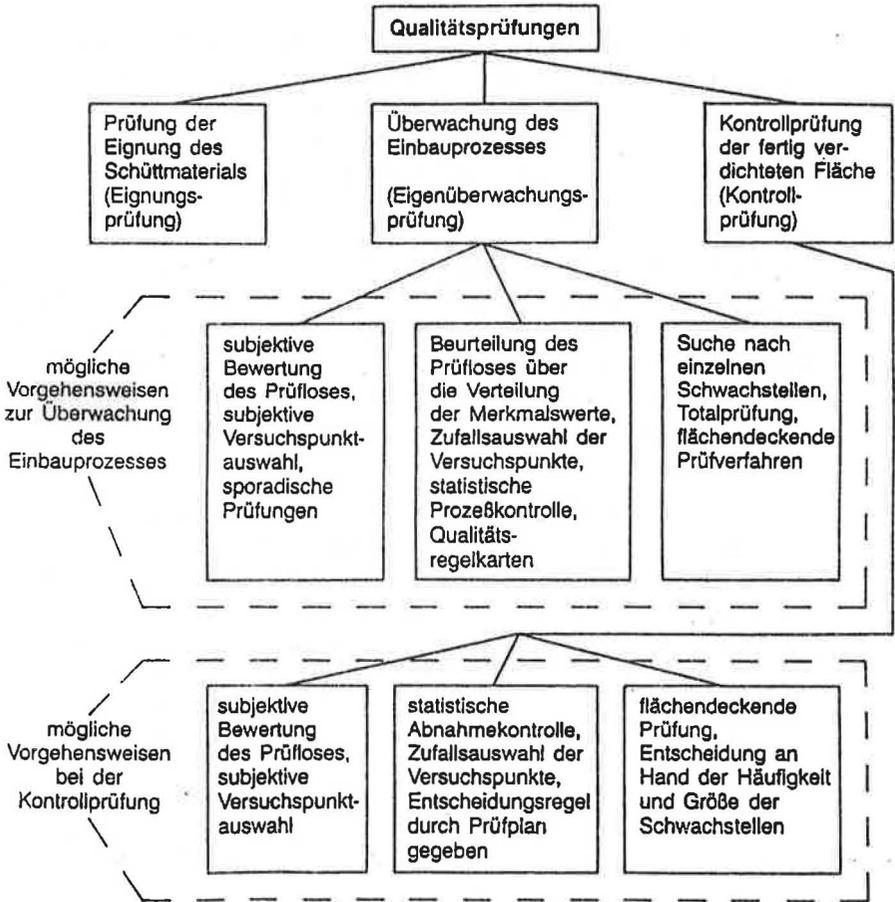


Abbildung 1.1: Gliederung und mögliche Vorgehensweisen bei Qualitätsprüfungen

2. Mit den in dieser Arbeit für den Erdbau dargelegten Qualitätsregelkarten besteht die Möglichkeit, eine leistungsfähige Überwachung der gewünschten Kontinuität des Einbauprozesses durchzuführen. Dabei werden in bestimmten Abständen kleine Stichproben dem Einbauprozess entnommen und an Hand der erhaltenen Stichprobenrealisationen wird der Prozeß beurteilt. Qualitätsregelkarten sollen vermeidbare Veränderungen von Parametern der Verteilung des Merkmals (z.B. veränderter Mittelwert, größere Streuung) gegenüber denen sichtbar machen, die unter bestimmten Bedingungen als unvermeidbar, dem Prozeß innewohnend, angesehen werden müssen. Das Stichprobenergebnis zeigt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an, ob eine Änderung der Einbaubedingungen vorgenommen werden muß oder ob der Prozeß mit den vorhandenen Einbauparametern weiterlaufen kann. Der Stichprobenumfang und der Abstand der einzelnen Stichproben kann dabei objektbezogen, je nach technischen Erfordernissen unter Berücksichtigung der Prüfkosten einerseits und der Kosten durch unbemerkt bleibende Störungen andererseits, gewählt werden. Mit Qualitätsregelkarten werden im Gegensatz zu flächendeckenden Prüfmethode keine Einzelstellen beurteilt, sondern Kennwerte der Verteilung des Merkmals.
3. In der Praxis des Erdbaues erfolgt die Eigenüberwachung meist nach einer dritten Vorgehensweise. Der Unternehmer führt sporadisch Prüfungen durch, deren Umfang sich allerdings oft nur an dem in Vorschriften angegebenen Mindestumfang orientiert, und bewertet die erreichte Qualität auf Grund der erhaltenen Prüfergebnisse, der Anzahl der Übergänge des Verdichtungsgerätes, der Art des verwendeten Verdichtungsgerätes, seines Erfahrungsschatzes mit dem verwendeten Schüttmaterial in Kombination mit dem verwendeten Verdichtungsgerät, kurzum, aus verschiedenen Einflußgrößen, die sich einer quantitativen Erfassung entziehen und die stark subjektiv beeinflußt sind. Auf die damit verbundene subjektive Probenauswahl wird später eingegangen. Gegenüber Qualitätsregelkarten hat diese Vorgehensweise den Nachteil, daß durch die Vielzahl subjektiver Eingangsgrößen eine objektive Beurteilung kaum möglich ist.

Der Kontrollprüfung eines fertig verdichteten Teilstückes kommt als letztes Glied der Qualitätsprüfungen (Abbildung 1.1) eine besondere Bedeutung zu, da die Ergebnisse der Abnahme und der Abrechnung zugrunde gelegt werden und damit besonders vertraglich relevant sind. Der Informationsgehalt in den Prüfergebnissen muß in vollem Umfang genutzt werden, um die Qualität

des Loses möglichst umfassend zu beurteilen. Eine klare Entscheidungsregel muß vorhanden sein, die zwischen ausreichender und nicht ausreichender Qualität trennt, damit eine für beide Vertragsseiten objektive Abnahme gegeben ist. Zur Erfüllung diese Zieles sind drei verschiedene Vorgehensweisen möglich:

1. Die Anwendung von flächendeckenden, indirekten Prüfverfahren bietet hier wieder entscheidende Vorteile. Durch die flächendeckende Kontrolle findet statistisch gesehen eine Totalprüfung statt, statistische Parameterunsicherheiten brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden. Nur die Unsicherheit durch die Regression zwischen dem indirekten und dem direkten Merkmal muß bei einer Abnahme über Mittelwert und Standardabweichung beachtet werden. Des weiteren kann die Anzahl und die lokale Verteilung von ungenügend verdichteten Stellen im geprüften Flächenstück erhalten werden. Damit brauchen, wenn nötig, nur gezielt einzelne bekannte Stellen nachgebessert werden.
2. Durch die Anwendung der in dieser Arbeit dargelegten und für die besonderen Erfordernisse des Erdbaus teilweise neu entwickelten, statistischen Prüfpläne, verbunden mit einer adäquaten Formulierung der Anforderungen können objektive Abnahmekriterien aufgestellt werden. Die Risiken von Fehlentscheidungen, die dabei durch die Verwendung der Stichprobentheorie immer gegeben sind, können auf Auftragnehmer und Auftraggeber angemessen aufgeteilt und kontrolliert bestimmt werden. Voraussetzung für die Anwendung ist eine strikte Zufallsauswahl der Versuchspunkte. Unterschiedliche Informationsgehalte über das abzunehmende Flächenstück (Vorinformation aus anderen Baulosen, aus Eigenüberwachungsprüfungen oder aus indirekten Prüfverfahren) können berücksichtigt werden. Die Größe des Prüffehlers kann bei der Formulierung der Anforderungen eingerechnet werden. Statistische Prüfpläne beurteilen immer nur Kennwerte (Mittelwert, Standardabweichung oder eine bestimmte Fraktile) der Verteilung des Merkmals, sie geben aber keine Auskunft über die lokale Verteilung von einzelnen unzureichend verdichteten Stellen im geprüften Flächenstück.
3. In der Regel erfolgen Abnahmekontrollen nach der im folgenden dargestellten Vorgehensweise. Für die Auswahl der Versuchspunkte wird meist eine der folgenden Möglichkeiten gewählt.
 - a) Der Prüfende sucht auf dem abzunehmenden Flächenstück nach augenscheinlich unzureichend verdichteten Stellen und setzt an

diesen seine Versuche an.

- b) α) Der Prüfende sucht auf dem abzunehmenden Flächenstück eine Stelle aus, die er als repräsentativ für eine bestimmte Fläche betrachtet.
- β) Der Prüfende macht jeweils zu einer bestimmten, vorher festgelegten Fläche einen Versuch, den er an einer unzureichend verdichteten Stelle (Schwachstelle) ansetzt, falls eine solche erkennbar ist, ansonsten an einer für das Teilstück repräsentativen Stelle.

Diese Vorgehensweisen werden im folgenden als „subjektive Probenauswahl“ bezeichnet. Die Beurteilung der so erhaltenen Merkmalswerte erfolgt bei den genannten Auswahlarten gleich. Erfüllt der erhaltene Meßwert die gegebene Anforderung nicht, so muß die der Meßstelle zugeordnete Fläche nachverdichtet werden, bzw. durch andere geeignete Maßnahmen verbessert werden. Bei dieser Vorgehensweise wird also vorwiegend der einzelne Meßwert betrachtet. Eine zufällige Streuung des Meßverfahrens wird nicht einbezogen. Der an der Meßstelle beobachtete Merkmalswert wird also dem Merkmalswert in der gesamten diesem Versuch zugeordneten Fläche gleichgesetzt. Ziel der geschilderten Vorgehensweisen ist es, daß alle Merkmalswerte in der gesamten verdichteten Fläche über dem geforderten Mindestwert liegen. Eine Streuung des Verdichtungsgrades oder der Tragfähigkeit innerhalb des einem Versuch zugeordneten Bereiches wird dabei nicht in Betracht gezogen.

Die Art der Prüfstellenauswahl bei subjektiver Probenahme ist fundamental verschieden von derjenigen bei Zufallsauswahl. Ein aus Versuchen mit subjektiver Probenauswahl gebildeter Mittelwert ist kein erwartungstreuer Schätzwert für den Mittelwert einer Grundgesamtheit. Er hat einen systematischen Bias, der nicht berechnet werden kann. Gleiches gilt für eine bei subjektiver Probenauswahl berechnete Varianz.

Der Versuch einer quantitativen Erfassung dieses Sachverhaltes wurde von JORGENSEN (1969) unternommen. In Abbildung 1.2, entnommen aus JORGENSEN (1969), sind die Ergebnisse der Ermittlung des Verdichtungsgrades von drei Projekten zusammengestellt.

Bei allen drei Projekten wurden von zwei Kontrollinstanzen unabhängig

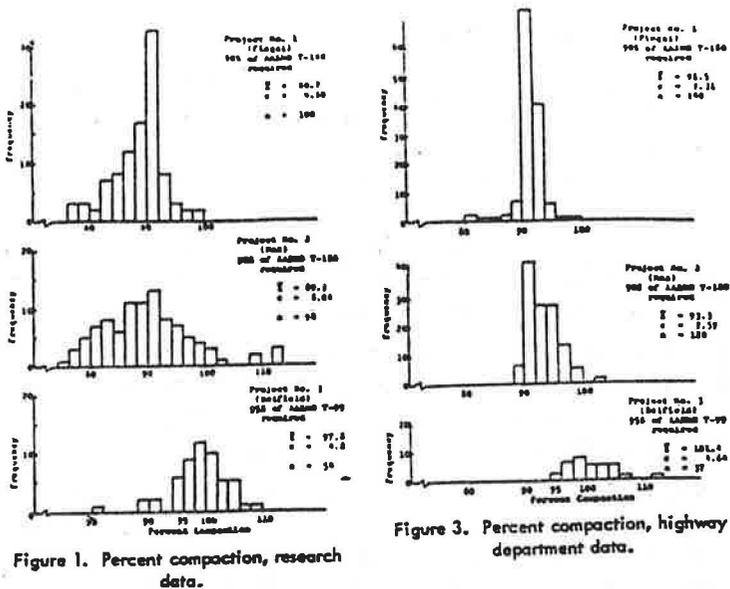


Abbildung 1.2: Verteilung des Verdichtungsgrades bei Zufallsauswahl und bei subjektiver Probenauswahl

voneinander Proben entnommen. Von der ersten Kontrollinstanz wurden die Proben zufällig ausgewählt, von der zweiten wurden die Versuche an für das Planum repräsentativen Stellen ausgeführt. Die subjektive Probenauswahl führt bei allen drei Projekten zu einer Verkleinerung der Standardabweichung.

Mit subjektiver Probenauswahl und Schwachstellenprüfung wird also nur die Verteilung des Merkmals im Feld beeinflusst. Stellen, die die Anforderung nicht erfüllen, sollen erkannt und nur diese verbessert werden. Allerdings hängt die Wahrscheinlichkeit, mit der solche Stellen erfaßt werden, von der Erfahrung und der Intuition des Prüfenden sowie von der Bodenart ab und ist damit nicht quantifizierbar. Meist wird von der fälschlichen Annahme ausgegangen, daß durch eine Nachbesserung einzelner Stellen, an denen geprüft wurde, die Anforderung in der gesamten, abzunehmenden Fläche eingehalten ist.

Nur bei Anwendung von Stichprobenplänen in Verbindung mit strikter Zufallsauswahl lassen sich die mit der Entscheidung auf Stichprobenbasis verbundenen Irrtumswahrscheinlichkeiten exakt quantifizieren.

1.3 Literaturübersicht

Ausführliche, allgemeine Darlegungen zu einer umfassenden Qualitätskontrolle bei industriellen Produktionen, angefangen vom Aufbau eines Qualitätssicherungskonzeptes, den Qualitätskosten über Abnahmeprüfpläne bis hin zur Mitarbeitermotivation sind in JURAN (1962), SCHAAFSMA, WILLEMEZE (1973), JURAN, GRZYNA (1980), CHARBONNEAU, WEBSTER (1978), SMITH (1971), BURR (1976), GEIGER (1986) zu finden, während UHLMANN (1981) die theoretischen Grundlagen für Abnahmeprüfpläne und Qualitätsregelkarten darlegt.

Auf die Besonderheiten bei der Probenahme und Beurteilung von Schüttgütern wird in SOMMER (1979) und CORNISH, JEPSON, SMURTHWAITE (1981) eingegangen. OTT (1975) zeigt Möglichkeiten der Qualitätskontrolle bei Prozessen in der fertigenden Industrie.

Die meisten Veröffentlichungen in den 50-iger und 60-iger Jahren über statistische Qualitätskontrolle im Erdbau geben Häufigkeitsverteilungen der Merkmalswerte des eingebauten Materials an, vgl. DAVIS (1953), WILLIAMSON (1969), JORGENSEN (1969), PETTIT (1967), UNGAR (1975). Teilweise wird versucht, den Häufigkeitsverteilungen Verteilungsfunktionen anzupassen und deren Parameter anzugeben. Die Aufsätze beschränken sich auf die nachträgliche statistische Veranschaulichung der Streuung des eingebauten Materials und die Darlegung der bodenmechanischen Erfahrungen bei den entsprechenden Projekten. Eine nachträgliche Bestimmung der Art der Probenauswahl (vgl. Abschnitt 1.2) ist meist nicht möglich. Es werden die mit einzelnen Prüfgerätetypen gewonnenen Erfahrungen mitgeteilt, jedoch ohne auf das dem Projekt zugrunde liegende Qualitätskontrollkonzept einzugehen.

Eine Darlegung von allgemeinen Qualitätssicherungsgrundsätzen, der Auswahl des Prüfverfahrens für die entsprechende Prüfzone und Bodenart, sowie ein kurzer geschichtlicher Überblick über die Qualitätskontrolle in Deutschland im Straßenbau wird von FLOSS (1973) gegeben.

Von SOARES (1977) und RETHATI (1979) wird der aus der Statistik bekannte t-Test zur Berechnung des notwendigen Stichprobenumfanges für geotechnische Aufgaben und auch für Qualitätskontrollprobleme vorgeschlagen. Damit läßt sich der Mittelwert einer Verteilung mit vorgegebener Genauigkeit bei vorgegebener Aussagewahrscheinlichkeit bestimmen. Ein Bezug zum Schlechtanteil im vorhandenen Los erfolgt dabei nicht.

Erst mit der Entwicklung von Prüfplänen in der Statistik bestand die Möglichkeit, Erdbaulose nach statistischen Kriterien abzunehmen. Dies

wurde erstmals beim AASHO-Road-Test (1962) vollzogen. Die hier zur Anwendung gelangten Einfachstichprobenpläne konnten sich jedoch in der Praxis nicht durchsetzen.

Auch BAKER (1966) schlägt Einfachstichprobenpläne für Variablen- und Attributprüfung für die Abnahme vor und geht auch auf deren Nachteile ein. Sie sind bedingt durch den relativ hohen Stichprobenumfang gegenüber der durchschnittlichen Anzahl herkömmlicher Baukontrollen, falls der Unternehmer meist nur sehr gute oder nur sehr schlechte Qualität liefert, und des weiteren durch die für eine statistische Abnahme notwendige Umformulierung der Anforderungen. Dabei muß auf eine ausschließliche Mindestwertanforderung verzichtet und eine einzuhaltende Fraktile gefordert werden.

Auch muß dabei von der „subjektiven Probenauswahl“ abgerückt werden, auf deren Nachteile ausführlich in STAMATOPOULOS, KOTZIAS (1975), KÜHN (1971), VAN DE FLIERT (1977), MITCHELL, SEMMELINK, MC-QUEEN (1977) eingegangen wird. Letztere haben an zwei Projekten in Südafrika die durch Anwendung von Einfachstichprobenplänen gewonnenen Entscheidungen über Annahme und Rückweisung eines Loses mit den nach subjektiver Probenauswahl unabhängig dazu getroffenen, ingenieurmäßigen Entscheidungen verglichen. Als Ergebnis weisen sie auf die Überlegenheit der nach statistischen Kriterien getroffenen Entscheidungen hin.

In Deutschland wurden erstmals konkrete Vorschläge für die Anwendung von Prüfplänen im Erdbau von BECHINGER (1971) eingebracht. Er wertet Plattendruckversuche von verschiedenen Baustellen hinsichtlich der Varianz des E_{v2} -Moduls aus und zeigt dann einen möglichen Weg für eine statistische Qualitätskontrolle auf. Als Anforderung legt er einen Sollwert für den Mittelwert des E_{v2} -Moduls fest. Sodann ermittelt er, welche Annahmewahrscheinlichkeiten für ein Prüflös in Abhängigkeit des Mittelwertes des Prüflöses bei einer vorgegebenen Standardabweichung und verschiedenen Stichprobenumfängen erhalten werden.

SOARES (1977), STAMATOPOULOS, KOTZIAS (1975), FANG (1975), CORRAL (1983) zeigen Ansätze für Abnahmekontrollen nach statistischen Kriterien. Diese gehen aber auch hier über Einfachstichprobenpläne mit bekannter Standardabweichung nicht hinaus.

Auf weitere Literaturstellen wird im Text im Zusammenhang mit der jeweiligen Problemstellung eingegangen.

In keiner Veröffentlichung wird auf den Zusammenhang zwischen dem Prüffehler eines Merkmals und der einzuhaltenden Anforderung eingegangen. Dieser spielt, wie später gezeigt wird, eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades. Des weiteren fehlt ein Zusammenhang

zwischen der Größe des Prüfloses und dem Stichprobenumfang, da aus wirtschaftlichen Gründen mit zunehmender Losgröße die im Prüfplan enthaltenen Irrtumswahrscheinlichkeiten verringert werden müssen.

1.4 Aufgabenstellung und Ziel der Arbeit

Mit dieser Arbeit soll dargelegt werden, wie durch Anwendung statistischer Methoden die Qualitätskontrolle für Abnahmeprüfungen und Eigenüberwachungsprüfungen so gestaltet werden kann, daß eine kalkulierbare und angemessene Risikoaufteilung auf Auftraggeber und Auftragnehmer eingehalten wird und gleichzeitig die Besonderheiten des Erdbaues berücksichtigt werden. Der Versuchsumfang soll im Erdbau bis zur Entscheidung über Annahme und Ablehnung eines Loses möglichst gering gehalten werden, weil die Ausführung der einzelnen Versuche (Dichtemessungen mit Volumenersatzverfahren, Plattendruckversuche) längere Zeit beansprucht, der Bauablauf damit oft verzögert wird und die Versuche in Relation zur abrechenbaren Verdichtungsleistung teuer sind. Erreicht wird dies durch die Anwendung von doppelten Stichprobenprüfplänen und Folgeprüfplänen.

Für die im Erdbau übliche Schwachstellenprüfung werden „Schwachstellenprüfpläne“ entwickelt, die eine noch weitere Reduzierung des Versuchsumfanges zulassen.

Außerdem wird die Anwendung von Qualitätsregelkarten zur Prozeßkontrolle bei Eigenüberwachungsprüfungen behandelt.

Die zufälligen Fehler eines Meßverfahrens sollen bei der Formulierung der Anforderungen miteinbezogen, sowie mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion Angaben zum Probenabstand gemacht werden, der nicht unterschritten werden sollte.

Die Einbindung von indirekten Schnellprüfverfahren in statistische Abnahmekontrollen soll gezeigt werden.

Die Modellierung der Vorinformation, die aus einer umfangreichen Datensammlung von Prüfungen des Verdichtungsgrades und des Verformungsmodul gewonnen wurde, erfolgt mit Hilfe der Bayesschen Theorie. Unter Verwendung dieser Vorinformation soll die Prädiktorverteilung des Verdichtungsgrades und des Verformungsmodul abgeleitet werden.

Mit dem bereitgestellten Formelapparat und den daraus abgeleiteten Tabellen soll die Möglichkeit gegeben werden, das dargelegte Konzept in der Praxis direkt anzuwenden.

2 Zur statistischen Beschreibung von Bodenkennwerten

Die Eigenschaften des natürlichen Bodens und von natürlichen Schüttgütern sind nicht als deterministisch anzusehen, sondern als die Summe vielfältiger Einflußfaktoren, wie Verwitterung, Verfestigung, Verwehung und bei Schüttgütern zusätzlich der Transport und die Parameter des Verdichtungsprozesses. Sie variieren zufällig und können damit als Zufallsvariable aufgefaßt werden.

Legt der Unternehmer dem Auftraggeber eine fertig verdichtete Fläche zur Abnahmeprüfung vor, so wird diese Fläche in der statistischen Qualitätskontrolle als „Los“ oder auch „Prüflos“ bezeichnet (vgl. DIN 55350, Teil 31). Aus statistischer Sicht stellt diese Fläche eine Grundgesamtheit dar, die beurteilt werden soll. Die Bezeichnung „Los“ oder auch „Prüflos“ ist zu unterscheiden vom Begriff „Erdbaulos“ im bauingenieurmäßigen Sinne.

Für ein Prüflos im Erdbau müssen noch folgende Vereinbarungen gelten.

1. Für die gesamte Losfläche muß die gleiche Anforderung gelten.
2. Da ein Los „die Menge eines Produktes (ist), die unter Bedingungen entstanden ist, die als einheitlich angesehen werden“ (DIN 55350), müssen geologische Anomalien oder große Einflüsse aus tiefer liegenden Schichten, die nicht gleichmäßig über das ganze Los verteilt sind, bei der Verdichtungskontrolle einer Schicht getrennt erfaßt werden.

Für die Ausführung von bodenmechanischen Untersuchungen ist immer ein gewisses Probenvolumen bzw. eine bestimmte Versuchsfläche nötig. Die Realisation der Zufallsvariablen ist an dieses Volumen gebunden. Dieses Volumen kann als „Einheit“ angesehen werden. Ein Los besteht also aus einer endlichen Menge von benachbarten Einheiten.

Zeitliche Veränderungen dieser Einheiten, etwa durch Witterungseinflüsse, sollen hier nicht betrachtet werden.

Durch eine „Totalprüfung“, also eine Prüfung jeder einzelnen Einheit des Loses, könnte nun die Verteilung des Merkmals im Los genau ermittelt und alle Parameter dieser Verteilung festgestellt werden.

In einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen (z. B. LUMB (1966); TURNBALL (1966); BECHINGER (1971); SHERMAN, WATKINS, PRYSOCK

(1967), VAN GANSE (1975); SCHULTZE (1971)) wird die Verteilung von Bodenkennwerten wie z.B. Dichte, Wassergehalt etc. untersucht. In der Mehrzahl der Fälle ist die Normalverteilung, in einigen Fällen die Lognormalverteilung und die Betaverteilung am besten für die Anpassung an die Verteilung der beobachteten Werte geeignet. Die Lognormalverteilung ist jedoch für Variationskoeffizienten kleiner 30% kaum von der Normalverteilung zu unterscheiden. Der Variationskoeffizient der Verteilung des Verdichtungsgrades ist immer und der Variationskoeffizient der Verteilung des Verformungsmoduls ist in vielen Fällen kleiner 30%.

Lognormal verteilte Merkmale können zudem durch einfache Transformation in normalverteilte Merkmale übergeführt werden.

3 Statistische Verfahren für Abnahmekontrollen und zur Prozeßkontrolle

3.1 Zur Festlegung von Anforderungen

Die Qualität eines Produktes wird in der Technik im allgemeinen durch quantitativ erfaßbare Qualitätsmerkmale beschrieben. Im Erdbau sind dies im wesentlichen der Verdichtungsgrad und der Verformungsmodul. Faßt man Bodenkennwerte als Zufallsvariable auf, so werden die Anforderungen an das Qualitätsmerkmal nicht als Anforderung an den Einzelwert gestellt, sondern an Kenngrößen der Verteilung als Sollwerte oder Grenzwerte.

Mögliche Festlegungen sind:

- a) ein vorgegebener Sollwert μ_0 für den Mittelwert μ ist einzuhalten.
- b) ein vorgegebener Sollwert σ_0 für die Standardabweichung σ ist einzuhalten.
- c) ein Grenzwert (Mindestwert T_u oder Höchstwert T_o) ist vorgegeben, und ein Sollwert p_0 für den Schlechtanteil p ist einzuhalten (vgl. Abbildung 3.1)

oder

die Grenzwerte T_u und T_o sind vorgegeben und ein Sollwert p_0 für den Schlechtanteil $p = p_1 + p_2$ ist einzuhalten (vgl. Abbildung 3.2).

In der Verdichtungskontrolle stellt die Festlegung eines Mindestwertes T_u und einer einzuhaltenden Anforderung an den Schlechtanteil p_0 die sinnvollste Forderung dar (vgl. dazu Kapitel 7).

3.2 Grundlagen zu statistischen Prüfplänen

Mit Hilfe von Annahmeprüfplänen kann die Überprüfung einer gestellten Anforderung vorgenommen werden (vgl. UHLMANN (1981); GRAF et. al. (1987)). Bei Annahmestichprobenprüfung wird das Prüflös nicht vollständig, sondern mit Hilfe einer Stichprobe nach der dem Prüfplan zugrunde liegenden Stichprobenanweisung geprüft. Aus den Merkmalswerten der Stichprobe wird eine Prüfgröße berechnet und diese mit dem vorgegebenen Grenzwert

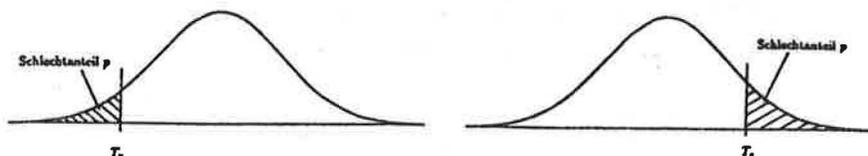


Abbildung 3.1: einseitige Grenzwertforderungen

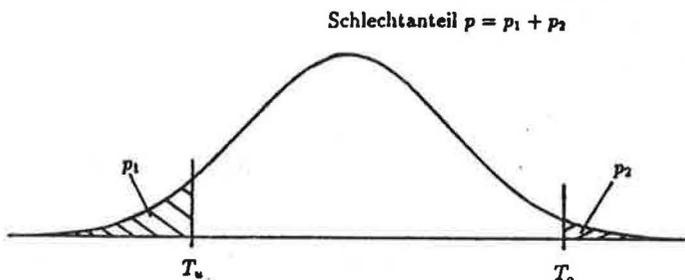


Abbildung 3.2: zweiseitige Grenzwertforderung

verglichen. Dieser Vergleich liefert die Entscheidung „Annahme des Prüfloses“ oder „Ablehnung des Prüfloses“.

Wird ein Prüflös abgelehnt, so muß das gesamte Los nachverdichtet werden und nicht nur einzelne Stellen, an denen die geringsten Merkmalswerte erhalten wurden. Diese entscheidende und wichtige Folge der Ablehnung eines Prüfloses resultiert daraus, daß bei einer Abnahme mittels statistischer Prüfpläne immer nur Grundgesamtheiten als Ganzes beurteilt werden und keine Einzelstellen im Prüflös. Die Beurteilung von Einzelstellen im Prüflös ist auf Stichprobenbasis prinzipiell nicht möglich, abgesehen von den wenigen Einheiten, die bei der Stichprobenentnahme geprüft wurden.

3.2.1 Die Operationscharakteristik und die Risiken 1. und 2. Art

Da die Überprüfung des Loses nur an Hand einer Stichprobe erfolgt, ist die ermittelte Prüfgröße immer mit einem Stichprobenfehler behaftet. Dies

führt dazu, daß auch Prüflöse, die die Anforderung erfüllen, möglicherweise abgelehnt werden (Fehler 1. Art) und Prüflöse, die die Anforderung nicht erfüllen, möglicherweise angenommen werden (Fehler 2. Art). Die Wahrscheinlichkeit α , mit der ein Prüflös abgelehnt wird, obwohl es die Anforderung erfüllt, wird Risiko 1. Art oder Auftragnehmerrisiko genannt. Die Wahrscheinlichkeit β , mit der ein Prüflös angenommen wird, obwohl es die Anforderung nicht erfüllt, heißt Risiko 2. Art oder Auftraggeberisiko. Die Operationscharakteristik stellt nun die Annahmewahrscheinlichkeit eines Loses in Abhängigkeit des wahren, aber unbekanntes Schlechtes dar (Abbildung 3.3). Sie ist bei gegebenem Prüfplan (Stichprobenauswahlverfahren, Stichprobenumfang, Art der Stichprobendatenauswertung, Entscheidungsregel) nur eine Funktion des Schlechtes p . Wenn alle Lose mit einem

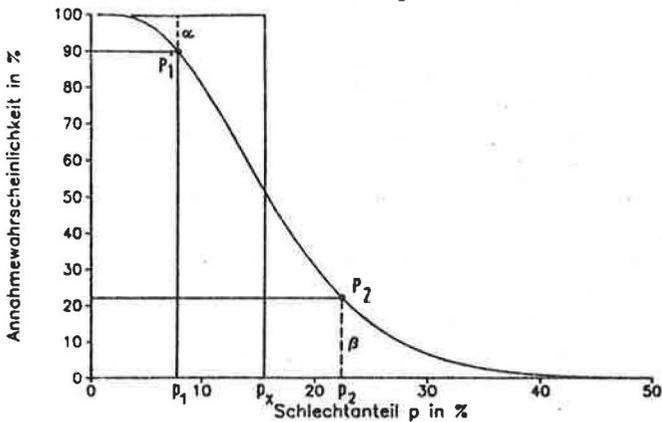


Abbildung 3.3: Die Operationscharakteristik

Schlechteil $p \leq p_x$ als annehmbar und alle Lose mit einem Schlechteil $p > p_x$ als nicht annehmbar bezeichnet werden, so müßte die Operationscharakteristik eine senkrechte Linie mit $L(p)=100\%$ für $p \leq p_x$ und $L(p)=0\%$ für $p > p_x$ darstellen (Abbildung 3.3). Dieser Verlauf ist wegen der unvollständigen Information auf Stichprobenbasis nicht erreichbar und kann nur mittels einer Totalprüfung der Prüflöse erhalten werden.

Stattdessen wird in der Qualitätskontrolle folgende Festlegung getroffen: Lose mit einem Schlechteil $p \leq p_1$ werden als gut bezeichnet und sollen mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen werden, und Lose mit einem Schlechteil $p \geq p_2$ werden als schlecht bezeichnet und sollen mit hoher Wahrscheinlichkeit abgelehnt werden. p_1 wird deshalb „Gutgrenze“¹ und p_2 „Schlechtegrenze“² genannt.

¹auch: „annehbare Qualitätsgrenzlage“ oder „acceptable quality level“ (AQL-Wert)

²auch: „rückzuweisende Qualitätsgrenzlage“ oder „limiting quality“ (LQ-Wert)

Bei statistischer Betrachtungsweise handelt es sich bei der Operationscharakteristik um die Wirkungskennlinie des Tests mit der Nullhypothese $H_0 : p = p_1$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : p = p_2$.

Lose mit einem Schlechtanteil $p_1 < p < p_2$ haben eine indifferente Qualität. Der Punkt $P(p_0; L(p) = 50\%)$ wird Indifferenzpunkt genannt.

Die „Steilheit“ der Operationscharakteristik und damit die Filterwirkung des Prüfplanes hängt vom Stichprobenumfang ab. Mit größerem Stichprobenumfang wird die Operationscharakteristik steiler.

Die „horizontale Lage“ der Operationscharakteristik hängt vom gewählten Annahmefaktor (bzw. der Annahmehzahl) ab. Mit steigendem Annahmefaktor verschiebt sich die Operationscharakteristik zu geringeren Schlechtanteilen p .

Mit zunehmender Prüflosgröße soll aus wirtschaftlichen Gründen die Anzahl von Fehlentscheidungen für beide Vertragspartner geringer werden. Diese Forderung ergibt sich nicht aus statistischen, sondern aus ökonomischen Gründen. Die Annahme von großen, unzureichend verdichteten Losen durch den Auftraggeber kann zu weitreichenden, nicht absehbaren Schäden am Bauwerk führen. Eine wiederholte Ablehnung von großen, ausreichend verdichteten Losen läßt für den Unternehmer keine wirtschaftliche Bauabwicklung zu, behindert den Arbeitsfortschritt und führt letztendlich zu höheren Angebotspreisen. Eine Reduzierung der Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β hat zur Folge, daß die Operationscharakteristik steiler wird und damit der erforderliche Prüfumfang zunimmt.

3.2.2 Möglichkeiten zur Festlegung der Operationscharakteristik

Grundsätzlich bestehen vier verschiedene Möglichkeiten zur Festlegung der Operationscharakteristik:

1. Es wird die Gutgrenze p_0 , die Wahrscheinlichkeit α für den Fehler 1. Art und der Stichprobenumfang vorgegeben. Daraus ergibt sich die Entscheidungsregel.
Bei dieser Vorgehensweise wird über die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art keine Vereinbarung getroffen.
2. Es wird die indifferente Qualitätslage p_0 , sowie die Steilheit h der Operationscharakteristik vorgegeben.
3. Der Stichprobenumfang n und die Entscheidungsregel werden vorgegeben.

Hiermit sind zwar die im Prüfplan beinhalteten Risiken auch festgelegt, diese werden jedoch bei der Aufstellung der Entscheidungsregel oft nicht beachtet (vgl. ZTVE-StB-76). Dieser Fall sollte möglichst vermieden werden.

4. Es werden zwei Punkte der Operationscharakteristik $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ festgelegt also die Gutgrenze p_1 , die Schlechtgrenze p_2 und die zugehörigen Risiken α und β , und daraus werden der Stichprobenumfang und der Annahmefaktor (die Annahmezahl) berechnet.

Die letztgenannte Möglichkeit stellt für die Belange des Erdbaues die sinnvollste Vorgehensweise dar, da dabei jeder Vertragspartner seine Risiken genau kennt, und wird deshalb ausschließlich in den weiteren Kapiteln verfolgt.

3.3 Klassische Prüfplanarten

3.3.1 Allgemeine Grundsätze

Die Festlegungen der Risiken α und β sind bestimmt durch die Interessenlagen von Auftragnehmer und Auftraggeber. Die Festlegungen für die Gut- und Schlegtgrenze p_1 und p_2 müssen sich an Werten orientieren, die für das Bauwerk noch als zulässig angesehen werden können und die technisch mit dem entsprechenden Verdichtungsgerät bei einer bestimmten Bodenart erreichbar sind.

Bei allen technischen Meßverfahren muß zwischen dem *wahren* und dem *gemessenen* Merkmalswert unterschieden werden. Der gemessene oder auch beobachtete Merkmalswert ist der mit einem zufälligen und/oder systematischen Meßfehler behaftete wahre Merkmalswert. Der wahre Merkmalswert ist dagegen der „tatsächliche Merkmalswert unter den bei der Ermittlung herrschenden Bedingungen“ (DIN 55350, Teil 13). Auf die Größe des Meßfehlers bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades wird ausführlich in Kapitel 5 eingegangen. Die Festlegung des Mindestwertes T_u und der Gut- und Schlegtgrenze p_1 und p_2 soll sich auf die beobachteten Werte beziehen, da nur so eine sinnvolle Überprüfung der Anforderung mittels Variablenprüfplänen möglich ist.

Insgesamt muß aber auch beachtet werden, ob bei Anwendung der verschiedenen Prüfplanarten Stichprobenumfänge erhalten werden, die bezüglich der Versuchsdauer und des Aufwandes im Erdbau noch vertretbar sind. Die Auswahl der „richtigen“ Prüfplanart, d. h. des Prüfplanes, der bei der gegebenen Problemstellung und zur gegebenen Information mit dem geringsten Stichprobenumfang auskommt, erhält damit entscheidende Bedeutung.

Die Prüfpläne werden nach der Art der Stichprobendatenauswertung unterschieden in

- a) Attributprüfpläne
- b) Variablenprüfpläne

zu a) Bei der Attributprüfung wird nur gezählt, wieviele Stichprobenrealisationen den geforderten Grenzwert T_u unterschreiten. Die Entscheidung wird aufgrund der Anzahl x „schlechter“ Einheiten getroffen, indem diese mit dem aus dem Prüfplan sich ergebenden, maximal zulässigen Wert verglichen wird.

Die Attributprüfung hat den Vorteil, daß diese verteilungsfrei ist, d. h. daß die Verteilung des Merkmals nicht bekannt sein muß und keine Annahmen darüber getroffen werden müssen.

Sie hat jedoch den Nachteil, daß die vorhandene Stichprobeninformation bei messender Prüfung nicht vollständig genutzt wird, da nur ermittelt wird, ob der Meßwert den Grenzwert unterschreitet, aber nicht, um wieviel er unterschritten wird. Damit wird wertvolle und teuer erkaufte Information verschenkt.

zu b) Bei der Variablenprüfung wird die gesamte Information aus der Stichprobe genutzt.

Für die Anwendung von Variablenprüfplänen benötigt man jedoch die Kenntnis der Verteilung des Qualitätsmerkmals, bzw. es müssen Annahmen über die Verteilung getroffen werden. Im folgenden wird für die Verteilung des Merkmals im Los immer Normalverteilung angenommen (vgl. Kapitel 2). Eine Lognormalverteilung im Prüflos ist damit eingeschlossen, da die Lognormalverteilung durch einfache Transformation in eine Normalverteilung übergeführt werden kann.

Aus den Stichprobenrealisationen wird bei Variablenprüfplänen eine Prüfgröße berechnet, in die der Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstandardabweichung eingehen. Da bei einer Normalverteilung des betrachteten Merkmals die Schätzwerte nach den Gleichungen (3.1) und (3.14) effiziente Statistiken für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ sind, wird hier die in der Stichprobe beinhaltenete Information optimal verarbeitet.

Attributprüfpläne müssen immer dann verwendet werden, wenn zwingende Gründe gegen die Annahme einer Normal- oder Lognormalverteilung im Prüflos sprechen. Dies ist im Erdbau der Fall, wenn verschiedene Bodenarten gemischt werden, da dies zu mehrgipfligen Verteilungen des Merkmals führen kann.

Bei Variablenprüfplänen muß zwischen den beiden Fällen

- Standardabweichung σ im Prüflos bekannt
- Standardabweichung σ im Prüflos unbekannt

unterschieden werden. Liegen im Prüflos genügend nach Zufallsauswahl ausgeführte Eigenüberwachungsprüfungen vor, so kann die Standardabweichung als bekannt angenommen werden. Bei Variablenprüfplänen mit bekannter Standardabweichung kann sich gegenüber Variablenprüfplänen mit unbekannter Standardabweichung der notwendige Stichprobenumfang je nach geforderter Operationscharakteristik erheblich reduzieren.

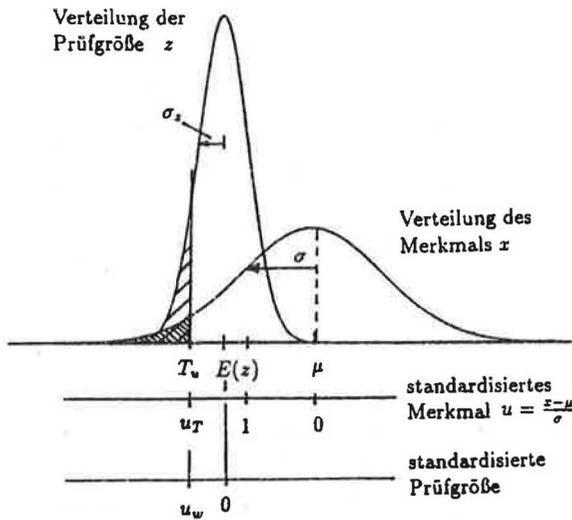


Abbildung 3.4: Zur Verteilung der Prüfgröße z

3.3.2 Einfachstichprobenprüfpläne

Variablenprüfung, σ bekannt

Dem Prüfling wird eine Zufallsstichprobe $(x_1, \dots, x_\nu, \dots, x_n)$ vom Umfang n_σ entnommen und der Mittelwert \bar{x} gebildet.

$$\bar{x} = \frac{1}{n_\sigma} \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} x_\nu \quad (3.1)$$

Daraus wird die Prüfgröße zu

$$z = \bar{x} - k_\sigma \sigma \quad (3.2)$$

berechnet (STANGE (1960)).

Die Entscheidungsregel lautet dann:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } z \geq T_u \\ \text{Falls } z < T_u \end{array} \right\} \text{dann wird das Prüfling } \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Der Stichprobenumfang n_σ und der Annahmefaktor k_σ werden nun so bestimmt, daß die Operationscharakteristik durch zwei vorgegebene Punkte $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ verläuft. Dazu wird die Annahmewahrscheinlichkeit für ein Los mit dem Schlechtanteil p berechnet (Abbildung 3.4). Die sogenannte Qualitätszahl u_T des Prüflinges ergibt sich zu

$$u_T := \frac{T_u - \mu}{\sigma} \quad (3.4)$$

Der Erwartungswert der Prüfgröße z lautet

$$E(z) = \zeta = \mu - k_\sigma \sigma \quad . \quad (3.5)$$

Die Varianz der Prüfgröße ergibt sich zu

$$\text{Var}(z) = \sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{n_\sigma} \quad . \quad (3.6)$$

Da \bar{x} normalverteilt ist, ist auch die Verteilung der Prüfgröße z normal. Die Annahmewahrscheinlichkeit $L(p)$ des Loses ist gleich dem rechts von T_u liegenden Anteil der z -Werte (Abbildung 3.4). Ihr ist der standardisierte Wert

$$u_w = \frac{\zeta - T_u}{\sigma_z} \quad (3.7)$$

zugeordnet.

Aus den Gleichungen (3.4) und (3.7) ergibt sich

$$T_u = \zeta - u_w \sigma_z = \mu + u_T \sigma \quad . \quad (3.8)$$

Mit (3.5) und (3.6) in (3.8)

$$\begin{aligned} \mu + u_T \sigma &= (\mu - k_\sigma \sigma) - u_w \frac{\sigma}{\sqrt{n_\sigma}} \\ u_w &= -\sqrt{n_\sigma}(u_T + k_\sigma) \end{aligned} \quad (3.9)$$

lautet die Operationscharakteristik

$$L(p) = \Phi(u_w) = \Phi\left(-\sqrt{n_\sigma}\left(\Phi^{-1}(p) + k_\sigma\right)\right) \quad . \quad (3.10)$$

$\Phi(u_w)$: Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung

$\Phi^{-1}(p)$: Umkehrfunktion von Φ

Im doppelten Wahrscheinlichkeitsnetz stellt Gleichung (3.10) eine Gerade dar (STANGE 1960).

Den Stichprobenumfang n_σ und den Annahmefaktor k_σ erhält man durch Einsetzen der vorgegebenen Punkte $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ der Operationscharakteristik in (3.10) und Auflösung nach n_σ und k_σ zu

$$n_\sigma = \left(\frac{u_\alpha + u_\beta}{u_{p_2} - u_{p_1}}\right)^2 \quad (3.11)$$

und

$$k_\sigma = \frac{u_\beta u_{p_1} + u_\alpha u_{p_2}}{u_\alpha + u_\beta} \quad . \quad (3.12)$$

Da der Stichprobenumfang n_σ nur ganzzahlige Werte annehmen kann, muß die aus (3.11) berechnete Zahl auf die nächst größere, ganze Zahl gerundet werden.

Von WILRICH (1970) wurden zur einfacheren Bestimmung von n_σ und k_σ Nomogramme aufgestellt.

Variablenprüfung, σ unbekannt

Ist die Standardabweichung des Prüfloses unbekannt, errechnet sich die Prüfgröße zu

$$z = \bar{x} - k_\sigma s \quad (3.13)$$

mit \bar{x} nach (3.1) und s nach (3.14).

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.14)$$

Die Annahmewahrscheinlichkeit ergibt sich bei einem Los mit unbekannter Standardabweichung zu (UHLMANN (1981); KÜHLMAYER (1970))

$$L(p) = T(-k_\sigma \sqrt{n_s} \mid \delta, f) \quad (3.15)$$

$$\text{mit } \delta = -u_p \sqrt{n_s} \quad (3.16)$$

$$\text{und } f = n_s - 1 \quad (3.17)$$

Der rechtsseitige Term von Gleichung (3.15) stellt die Verteilungsfunktion der nicht-zentralen t-Verteilung an der Stelle $-k_\sigma \sqrt{n_s}$ dar, mit dem Nichtzentralitätsparameter δ und mit f Freiheitsgraden.

Die Stichprobenanzahl n_s und der Annahmefaktor k_s können durch Einsetzen der zwei vorgegebenen Punkte P_1 und P_2 entweder numerisch oder durch Iteration mit Hilfe der Tabellen in KÜHLMAYER (1970) oder RESNIKOFF, LIEBERMANN (1957) bestimmt werden.

Für $n \geq 5$ kann auch auf die im folgenden dargelegte Näherung von STANGE (1960) zurückgegriffen werden.

Dabei gilt für die Prüfgröße z nach (3.13)

$$E(z) = E(\bar{x}) - k_s E(s) \quad (3.18)$$

$$\text{mit } E(\bar{x}) = \mu \quad (3.19)$$

$$\text{und } E(s) \approx \sigma \quad (3.20)$$

Die Varianzen des Mittelwertes \bar{x} und der Standardabweichung s ergeben sich zu

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n_s} \quad (3.21)$$

$$\text{Var}(s) = \frac{\sigma^2}{2n_s} \quad (3.22)$$

Damit errechnet sich der Erwartungswert der Prüfgröße z zu

$$E(z) = \mu - k_s \sigma \quad (3.23)$$

Da bei normaler Ausgangsverteilung die Kovarianz zwischen \bar{x} und s gleich null ist, ergibt sich die Varianz näherungsweise zu

$$\text{Var}(z) = \sigma_z^2 \approx \frac{\sigma^2}{n_s} + \frac{k_s^2 \sigma^2}{2n_s} = \frac{\sigma^2}{n_s} \left(1 + \frac{k_s^2}{2}\right) \quad (3.24)$$

Aus Abbildung 3.4 ergibt sich

$$\mu + u_T \sigma = \zeta - u_w \sigma_z \quad (3.25)$$

Nach dem Einsetzen von (3.23) und (3.24) in (3.25) erhält man die Näherungslösung der Operationscharakteristik in standardisierter Form zu

$$u_w = -\sqrt{\frac{n_s}{1 + \frac{k_s^2}{2}}} (u_T + k_s) \quad (3.26)$$

und in Abhängigkeit des Schlechteiles p zu

$$L(p) = \Phi \left(-\sqrt{\frac{n_s}{1 + \frac{k_s^2}{2}}} (\Phi^{-1}(p) + k_s) \right) \quad (3.27)$$

Der Stichprobenumfang n_s und der Annahmefaktor k_s ergeben sich durch Einsetzen der zwei vorher festgelegten Punkte P_1 und P_2 der Operationscharakteristik in (3.26) und der Auflösung nach n_s und k_s zu

$$k_s = \frac{u_\beta u_{p_1} + u_\alpha u_{p_2}}{u_\alpha + u_\beta} \quad (3.28)$$

$$n_s = \left(\frac{-u_\alpha - u_\beta}{u_{p_2} - u_{p_1}} \right)^2 \left(1 + \frac{k_s^2}{2}\right) \quad (3.29)$$

Der mittels (3.29) errechnete Wert für n_s muß auf die nächst größere, ganze Zahl gerundet werden.

Durch Vergleich der Argumente in (3.11) und (3.29) kann die Erhöhung des Stichprobenumfangs bei Variablenprüfung mit unbekannter Standardabweichung gegenüber bekannter Standardabweichung gewonnen werden.

$$\frac{n_s}{n_\sigma} = \left(1 + \frac{k_s^2}{2}\right) \quad (3.30)$$

In WILRICH (1970) sind Nomogramme angegeben, aus denen sich bei Vorgabe der Punkte P_1 und P_2 die Parameter n_s und k_s des Prüfplanes bestimmen lassen.

Attributprüfpläne

Bei Anwendung von einfachen Attributprüfplänen (vgl. GRAF et. al. (1987)) wird dem Prüfling eine Stichprobe vom Umfang n_A entnommen und die Anzahl x der Stichprobenrealisationen, die den geforderten Grenzwert T_u unterschreiten, gezählt. Die Entscheidungsregel lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } x \leq c_A \\ \text{Falls } x > c_A \end{array} \right\} \text{wird das Prüfling} \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Es gilt nun wieder, den Stichprobenumfang n_A und die Annahmezahl c_A so zu bestimmen, daß die Operationscharakteristik durch zwei vorgegebene Punkte $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ geht.

Da der Auswahlsatz der Stichprobe im Erdbau immer kleiner als 10% der Einheiten (vgl. Kapitel 2) des gesamten Prüflinges ist, kann x in guter Näherung binomialverteilt angenommen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß aus einem Los mit dem Schlechtanteil p bei Ziehung einer Stichprobe vom Umfang n_A genau x Einheiten unterhalb der Grenzwertes T_u liegen, ergibt sich damit zu

$$g(x) = \binom{n_A}{x} p^x (1-p)^{n_A-x} \quad (3.32)$$

Die Operationscharakteristik lautet dann

$$L(p) = \sum_{x=0}^{c_A} \binom{n_A}{x} p^x (1-p)^{n_A-x} \quad (3.33)$$

Der Stichprobenumfang n_A und die Annahmezahl c_A werden wieder durch Einsetzen von zwei vorgegebenen Punkten P_1 und P_2 in (3.33) und Auflösung nach n_A und c_A numerisch oder mit Hilfe der Nomogramme in GRAF et. al. (1987) bestimmt. Dabei ist zu beachten, daß auf Grund der Ganzzahligkeitsforderung für n_A und c_A die geforderten Werte für α und β nicht immer exakt eingehalten werden können.

3.3.3 Doppelte Stichprobenpläne

Doppelte Stichprobenpläne bieten den entscheidenden Vorteil, daß bei sehr schlechten oder sehr guten Prüflösen bereits nach einer ersten, kleineren Stichprobe über Annahme oder Ablehnung entschieden werden kann. Dadurch können im Erdbau Kosten und Zeit eingespart werden. Diese Einsparung muß jedoch durch eine komplexere Auswertung der Stichprobenwerte erkauft werden.

Variablenprüfung, σ bekannt

Doppelte Stichprobenpläne für Variablenprüfung wurden von STURHAHN (1976) entwickelt. Bei einem doppelten Stichprobenplan wird aus dem Prüflös zuerst eine Stichprobe vom Umfang $n_{D,\sigma}$ entnommen und daraus die Prüfgrößen z_A und z_R mit \bar{x} nach (3.1)

$$z_A = \bar{x}_1 - k_{A,\sigma}\sigma \quad (3.34)$$

$$z_R = \bar{x}_1 - k_{R,\sigma}\sigma \quad (3.35)$$

gebildet. Die Entscheidungsregel lautet dann:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } z_A \geq T_u \\ \text{Falls } z_R \leq T_u \end{array} \right\} \text{ wird das Prüflös } \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Ist keine der beiden in (3.36) genannten Bedingungen erfüllt, so wird eine weitere Stichprobe vom Umfang $n_{D,\sigma}$ entnommen und zunächst das Stichprobenmittel \bar{x}_2 bestimmt

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_{D,\sigma}} \sum_{\nu=1}^{n_{D,\sigma}} x_\nu \quad (3.37)$$

Aus der ersten und zweiten Stichprobe wird sodann der gemeinsame Mittelwert

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \quad (3.38)$$

errechnet. Die Prüfgröße z ergibt sich damit zu

$$z = \bar{x}_{1,2} - k_{D,\sigma}\sigma \quad (3.39)$$

Mit der Entscheidungsregel (3.40) ergibt sich die endgültige Entscheidung über Annahme oder Ablehnung des Loses.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } z \geq T_u \\ \text{Falls } z < T_u \end{array} \right\} \text{ wird das Prüflös } \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Der Stichprobenumfang $n_{D,\sigma}$, der Annahmefaktor $k_{A,\sigma}$, der Rückweisefaktor $k_{R,\sigma}$ sowie $k_{D,\sigma}$ können bei Vorgabe von zwei Punkten $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ der Operationscharakteristik aus den von STURHAHN (1976) aufgestellten Nomogrammen entnommen werden.

Variablenprüfung, σ unbekannt

Ist die Standardabweichung des Prüfloses unbekannt, so wird die gleiche, im vorherigen Abschnitt dargelegte Vorgehensweise gewählt. An Stelle der Parameter $n_{D,\sigma}$, $k_{A,\sigma}$, $k_{R,\sigma}$, $k_{D,\sigma}$ werden die Parameter $n_{D,s}$, $k_{A,s}$, $k_{R,s}$, $k_{D,s}$ verwendet, die ebenfalls den in STURHAHN (1976) angegebenen Nomogrammen entnommen werden können. Der Gesamtmittelwert aus der ersten und zweiten Stichprobe wird nach (3.38) ermittelt. Die Standardabweichung σ wird dabei durch die Stichprobenstandardabweichung nach (3.14) geschätzt. Die Gesamtstandardabweichung aus der ersten und zweiten Stichprobe errechnet sich zu

$$s_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2)} \quad (3.41)$$

3.3.4 Folgeprüfpläne

Bei der Anwendung von Folgeprüfplänen ist der Stichprobenumfang nicht festgelegt. Aus dem Prüflos werden nacheinander Einheiten ausgewählt und untersucht. Nach jeder Prüfung einer Einheit wird eine der drei Entscheidungen

1. Annahme des Prüfloses,
2. Ablehnung des Prüfloses,
3. weiteren Versuch ausführen,

getroffen. Dies bietet den gegenüber Doppelstichprobenprüfplänen noch weitergehenden Vorteil, daß sehr gute und sehr schlechte Prüflose bezüglich des Merkmalswertes schnell erkannt werden können. Allerdings sind Folgeprüfpläne nur bei einer Abnahme über Plattendruckversuche sinnvoll durchführbar. Bei einer Anwendung von Folgeprüfplänen bei der Überwachung des Verdichtungsgrades müßte der Laborant nach jeder einzelnen Messung der Dichte im Feld sofort im Labor die zugehörige Proctordichte bestimmen, damit eine der drei oben genannten Entscheidungen getroffen werden kann. Aus organisatorischen Gründen ist dies wegen des mehrmaligen Zurücklegens der oft langen Wege zwischen Prüflos und Labor meist nicht möglich.

Variablenfolgeprüfpläne, σ bekannt

Im Prüflos werden nacheinander $l = 1, 2, 3 \dots$ Einheiten geprüft. Nach jedem Versuch wird die Prüfgröße

$$z_{l,\sigma} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l x_i \quad (3.42)$$

berechnet und festgestellt, welche der drei Ungleichungen (3.43) bis (3.45) der Entscheidungsregel erfüllt ist.

$$z_{l,\sigma} \geq G_{A,\sigma}(l) \quad \text{das Prüflos wird angenommen,} \quad (3.43)$$

$$z_{l,\sigma} \leq G_{R,\sigma}(l) \quad \text{das Prüflos wird abgelehnt,} \quad (3.44)$$

$$G_{A,\sigma}(l) < z_{l,\sigma} < G_{R,\sigma}(l) \quad \text{ein weiterer Versuch wird ausgeführt.} \quad (3.45)$$

Die Prüfung wird so lange fortgesetzt, bis erstmalig die Ungleichung (3.43) oder (3.44) erfüllt ist. Die Annahmegrenze $G_{A,\sigma}(l)$ und die Rückweisedgrenze $G_{R,\sigma}(l)$ errechnen sich bei zwei vorgegebenen Punkten $P_1(p_1; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2; \beta)$ der Operationscharakteristik zu (vgl. STANGE (1966); GRAF et. al. (1987))

$$G_{A,\sigma}(l) = T_u + \sigma(h_1 - h_2 \frac{1}{l}) \quad (3.46)$$

$$G_{R,\sigma}(l) = T_u + \sigma(h_1 + h_3 \frac{1}{l}) \quad (3.47)$$

mit

$$h_1 = -\frac{1}{2}(u_{p_1} + u_{p_2}) \quad (3.48)$$

$$h_2 = \frac{\ln \frac{1-\alpha}{\beta}}{h_4} \quad (3.49)$$

$$h_3 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{h_4} \quad (3.50)$$

$$h_4 = u_{p_1} - u_{p_2} \quad (3.51)$$

Die Operationscharakteristik in Parameterdarstellung ergibt sich mit Hilfe von GRAF et. al. (1987) und einiger Umformungen zu

$$L(t) = \frac{1 - \exp\left(t \frac{h_2}{h_4}\right)}{\exp\left(t \frac{h_1}{h_4}\right) - \exp\left(t \frac{h_2}{h_4}\right)} \quad (3.52)$$

mit $t = 2u_p - u_{p_1} - u_{p_2}$

Der durchschnittlich erforderliche Stichprobenumfang ASN (average sample number) kann aus Gleichung (3.53) ermittelt werden.

$$ASN(u_p) = \frac{2[(h_1 + h_2)L(u_p) - h_2]}{h_4 t} \quad (3.53)$$

Variablenfolgeprüfpläne, σ unbekannt

Ist die Standardabweichung des Prüfloses unbekannt, erfolgt die Berechnung der Parameter des Prüfplanes mit Hilfe des WAGR-Testes (vgl. GRAF et al. (1987)).

Im Prüflos werden nacheinander $l = 1, 2, 3 \dots$ Einheiten geprüft und nach jedem Versuch die Prüfgröße

$$z_{l,s} = \frac{\bar{x} - T_u}{s} \quad (3.54)$$

gebildet mit \bar{x} nach (3.1) und s nach (3.14). Die Entscheidungsregel lautet dann:

$$z_{l,s} \geq G_{A,s}(l) \quad \text{das Prüflos wird angenommen,} \quad (3.55)$$

$$z_{l,s} \leq G_{R,s}(l) \quad \text{das Prüflos wird abgelehnt,} \quad (3.56)$$

$$G_{A,s}(l) > z_{l,s} > G_{R,s}(l) \quad \text{ein weiterer Versuch wird ausgeführt,} \quad (3.57)$$

mit

$$G_{A,s}(l) = \frac{A_l}{\sqrt{l}} \quad (3.58)$$

$$G_{R,s}(l) = \frac{B_l}{\sqrt{l}} \quad (3.59)$$

Die Werte A_l und B_l werden bei Vorgabe von zwei Punkten P_1 und P_2 der Operationscharakteristik numerisch aus (3.60) und (3.61) berechnet.

$$\frac{g\left(\frac{A_l}{\sqrt{l-1}}; l-1; \sqrt{l}u_2\right)}{g\left(\frac{A_l}{\sqrt{l-1}}; l-1; \sqrt{l}u_1\right)} = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (3.60)$$

$$\frac{g\left(\frac{B_l}{\sqrt{l-1}}; l-1; \sqrt{l}u_2\right)}{g\left(\frac{B_l}{\sqrt{l-1}}; l-1; \sqrt{l}u_1\right)} = \frac{1-\beta}{\alpha} \quad (3.61)$$

mit $u_1 = \Phi^{-1}(1-p_1)$ und $u_2 = \Phi^{-1}(1-p_2)$.

Dabei ist $g(t; f; \delta)$ die Verteilungsfunktion der nicht-zentralen t-Verteilung

an der Stelle t mit dem Nichtzentralitätsparameter δ und mit f Freiheitsgraden.

Attributfolgeprüfpläne

Im Prüflos werden nacheinander $l = 1, 2, 3 \dots$ Einheiten geprüft und die Anzahl x_l der Versuche gezählt, bei denen der Merkmalswert den Mindestwert T_u unterschreitet. Die Entscheidungsregel lautet:

$$x_l \leq G_{A,A}(l) \quad \text{das Prüflos wird angenommen,} \quad (3.62)$$

$$x_l \geq G_{R,A}(l) \quad \text{das Prüflos wird abgelehnt,} \quad (3.63)$$

$$G_{A,A}(l) < x_l < G_{R,A}(l) \quad \text{ein weiterer Versuch wird ausgeführt,} \quad (3.64)$$

mit

$$G_{A,A}(l) = \frac{1}{E + D}(Dl - A) \quad (3.65)$$

$$G_{R,A}(l) = \frac{1}{E + D}(Dl + B) \quad (3.66)$$

und den Hilfsgrößen

$$A = \ln \frac{1-\alpha}{\beta}$$

$$B = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

$$D = \ln \frac{1-p_1}{1-p_2}$$

$$E = \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Die Operationscharakteristik in Parameterdarstellung lautet (vgl. GRAF et al. (1987))

$$p(\tau) = \frac{\exp\left(\frac{D}{E+D}\tau\right) - 1}{\exp \tau - 1} \quad (3.67)$$

$$L(\tau) = \frac{1 - \exp\left(\frac{B}{E+D}\tau\right)}{\frac{1}{\exp\left(\frac{A}{E+D}\tau\right)} - \exp\left(\frac{B}{E+D}\tau\right)} \quad (3.68)$$

Der durchschnittlich erforderliche Stichprobenumfang errechnet sich zu

$$ASN(p) = \frac{B - (A + B)L(p)}{pE - (1 - p)D} \quad (3.69)$$

3.4 Schwachstellenprüfpläne

3.4.1 Schwachstellenmodell

Im Erdbau besteht bei manchen Bodenarten (z.B. weitgestuften Kiesen) die Möglichkeit, „Schwachstellen“ visuell oder mit einem geeigneten Hilfsmittel zu lokalisieren. Unter „Schwachstellen“ werden im folgenden Orte verstanden, an denen der Merkmalswert kleiner ausfällt als an anderen Stellen des Prüfloses. Wenn nur an solchen Schwachstellen Versuche ausgeführt werden, ergeben sich nicht die gleichen Prüfstatistiken wie bei strikter Zufallsauswahl der Versuchspunkte. Es muß dazu ein eigener Prüfplan entwickelt werden, der diese Besonderheit berücksichtigt.

In KÜHLMAYER (1974a), (1974b), (1984) wird die Operationscharakteristik von Prüfplänen bei Schwachstellenprüfung berechnet. Dabei wird jedoch nicht von einer echten Schwachstellenauswahl ausgegangen, sondern es wird vorausgesetzt, daß im Prüflos ein explizit bekannter Trend des Mittelwertes vorhanden ist. Die Versuche werden sodann an den Stellen angesetzt, an denen der Erwartungswert des Mittelwertes am kleinsten ist oder bei denen der Erwartungswert des Mittelwertes um einen vorher bekannten Betrag unterhalb des Mittelwertes des Gesamtloses liegt. Die Voraussetzung eines linearen Trends im Prüflos ist jedoch im Erdbau nicht gegeben, der Ansatz ist damit auf den Erdbau nicht übertragbar.

Weitere Ansätze zur Schwachstellenprüfung sind aus der Literatur nicht bekannt.

Im Gegensatz zu Kühlmeyer wird in der nachfolgenden Herleitung die Operationscharakteristik eines Prüfplanes bei „echter“ Schwachstellenprüfung hergeleitet und die Parameter des Prüfplanes werden ermittelt. Dabei soll die Einsparung der Versuchsanzahl bei Schwachstellenprüfplänen gegenüber einfachen Stichprobenprüfplänen besonders herausgestellt werden. Das berechnete Modell beinhaltet, daß der Merkmalswert an der Schwachstelle im Vergleich zu anderen Stellen im Prüflos kleiner sein muß. Es wird aber keine Voraussetzung gemacht, welchen Betrag diese Unterschreitung haben muß.

Gegeben sei ein Los mit dem festen, aber unbekanntem Mittelwert μ und der festen, aber unbekanntem Standardabweichung σ . Das Merkmal x im Los unterliegt der Verteilungsfunktion $F_x(x)$. Für die Merkmale Verdichtungsgrad und E_{v2} -Modul kann für $F_x(x)$ Normalverteilung angenommen werden (vgl. Kapitel 2). Das Los wird in n_o Gruppen (Index o für Schwachstellenprüfung) mit je m Versuchspunkten eingeteilt (Abbildung 3.5). Alle m Versuchspunkte der n_o Gruppen müssen zufällig ausgewählt werden. Innerhalb jeder Gruppe wird von den m Punkten die Stelle mit dem geringsten

3 Gruppen

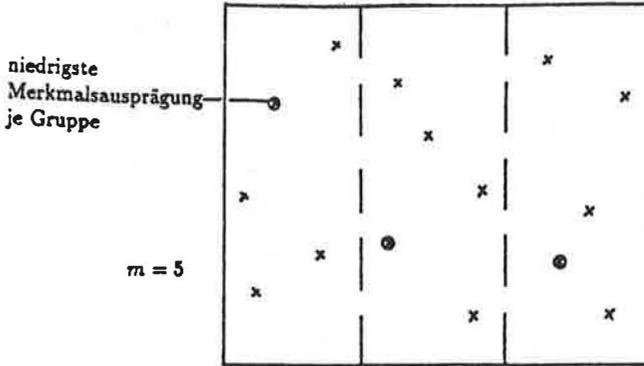


Abbildung 3.5: Versuchspunktauswahl bei Schwachstellenprüfung

Merkmalswert (Schwachstelle) lokalisiert und nur an dieser eine Messung ausgeführt.

Die Verteilungsfunktion der gemessenen Schwachstellenwerte y genügt dann einer Extremwertverteilung und lautet (GUMBEL (1958); ANG, TANG (1984))

$$F_{y_m}(y) = [1 - F_x(y)]^m \quad (3.70)$$

Die Dichte der Extremwertverteilung ergibt sich durch Ableitung der Verteilungsfunktion zu

$$f_{y_m}(y) = m [1 - F_x(y)]^{m-1} f_x(y) \quad (3.71)$$

Der Erwartungswert und die Varianz von y_m sind gegeben durch

$$E(y_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} m y [1 - F_x(y)]^{m-1} f_x(y) dy \quad (3.72)$$

$$\sigma_{EXT,m}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m y^2 [1 - F_x(y)]^{m-1} f_x(y) dy - [E(y_m)]^2 \quad (3.73)$$

Nach dem Übergang auf die standardisierten Größen $u_m = \frac{y_m - \mu}{\sigma}$ und bei normaler Ausgangsverteilung ergeben sich Erwartungswert und Varianz zu

$$E(u_m) = m \int_{-\infty}^{\infty} u [1 - \Phi(u)]^{m-1} \varphi(u) du \quad (3.74)$$

$$w_2 := \text{Var}(u_m) = m \int_{-\infty}^{\infty} u^2 [1 - \Phi(u)]^{m-1} \varphi(u) du - [E(u_m)]^2 \quad (3.75)$$

$$\text{mit } \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (3.76)$$

und $\Phi(u)$ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Da eine explizite Berechnung des Integrals in Gleichung (3.74) mit Hilfe von OWEN (1980) nur für $m \leq 5$ und von (3.75) nur für $m \leq 3$ möglich ist, wurde (3.74) und (3.75) numerisch berechnet. Tabelle 3.1 gibt $E(u_m)$ und $Var(u_m)$ für $3 \leq m \leq 25$ an. Die relativen Fehler der Berechnungen sind für alle m kleiner $0.5 \cdot 10^{-8}$.

m	$E(u_m)$	$w_2 = Var(u_m)$	w_4
3	0.84628	0.55947	0.97552
4	1.02937	0.49172	0.76460
5	1.16296	0.44753	0.64108
6	1.26721	0.42593	0.55943
7	1.35218	0.39192	0.50113
8	1.42360	0.37290	0.45721
9	1.48501	0.35735	0.42280
10	1.53875	0.34434	0.39502
11	1.58644	0.33325	0.37205
12	1.58644	0.32364	0.35270
13	1.66799	0.31521	0.33614
14	1.70338	0.30773	0.32177
15	1.73591	0.30104	0.30918
16	1.76599	0.29501	0.29803
17	1.79394	0.28953	0.28807
18	1.82003	0.28453	0.27912
19	1.84448	0.27994	0.27102
20	1.86748	0.27570	0.26364
21	1.88917	0.27177	0.25689
22	1.90962	0.26811	0.25069
23	1.92916	0.26470	0.24496
24	1.94767	0.26151	0.23965
25	1.96532	0.25851	0.23472

Tabelle 3.1: $E(u_m)$, $Var(u_m)$ und $w_4(u_m)$ bei standardisierter, normaler Ausgangsverteilung

3.4.2 Herleitung der Operationscharakteristik

Standardabweichung σ bekannt

Im folgenden wird die Annahmewahrscheinlichkeit $L(p)$ eines Loses mit dem Schlechtanteil p bei Schwachstellenprüfung berechnet. Dabei wird die Standardabweichung σ des Loses als bekannt vorausgesetzt.

Aus den $n_{o,\sigma}$ an den Schwachstellen gemessenen Merkmalswerten $x_{m,i}$ wird der Erwartungswert der Extremwertverteilung durch das Stichprobenmoment

$$\bar{x}_m = \frac{1}{n_{o,\sigma}} \sum_{i=1}^{n_{o,\sigma}} x_{m,i} \quad (3.77)$$

geschätzt und die Prüfgröße

$$z_{o,\sigma} = \bar{x}_m - k_{o,\sigma} \sigma \quad (3.78)$$

$k_{o,\sigma}$ = Annahmefaktor bei Schwachstellenprüfung

gebildet. Die Entscheidungsregel bei Schwachstellenprüfung lautet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } z_{o,\sigma} \geq T_u \\ \text{Falls } z_{o,\sigma} < T_u \end{array} \right\} \text{so wird das Prüflös } \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Der Erwartungswert der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$ ist (vgl. Abbildung 3.6)

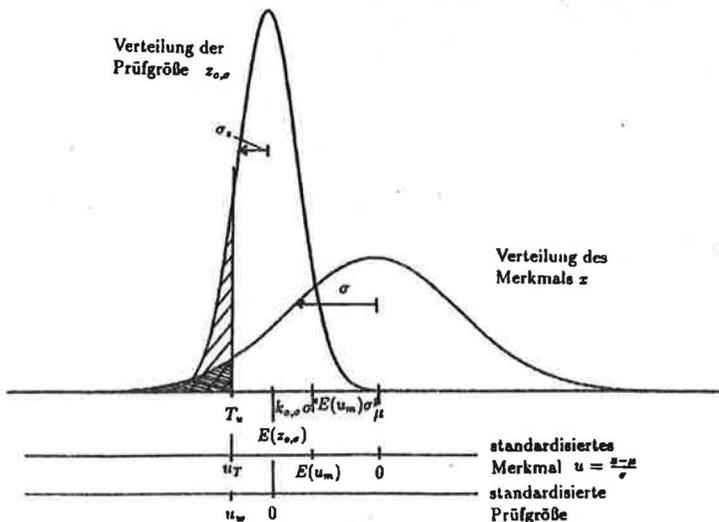


Abbildung 3.6: Verteilung der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$

$$E(z_{o,\sigma}) = \mu - E(u_m) \sigma - k_{o,\sigma} \sigma \quad (3.80)$$

Da die Normalverteilung eine „location-scale-Verteilung“ ist, gilt

$$\sigma_{EXT,m}^2 = \text{Var}(u_m)\sigma^2, \quad (3.81)$$

wobei $\sigma_{EXT,m}$ die Standardabweichung der Extremwertverteilung mit dem Parameter m ist.

Damit ergibt sich die Varianz der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$ zu

$$\text{Var}(z_{o,\sigma}) = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_{EXT,m}^2}{n_{o,\sigma}} = \frac{\text{Var}(u_m)\sigma^2}{n_{o,\sigma}}. \quad (3.82)$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz strebt die Verteilung der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$ mit steigendem $n_{o,\sigma}$ gegen eine Normalverteilung. Auf die Konvergenzgeschwindigkeit wird in Kapitel 3.4.4 näher eingegangen.

Der in Abbildung 3.6 rechts des Grenzwertes T_u liegende Flächenanteil unter der Verteilung der Prüfgröße $z_{o,\sigma}$ stellt die gesuchte Annahmewahrscheinlichkeit dar.

Aus Abbildung 3.6 ergibt sich

$$T_u = \mu + u_T\sigma \quad (3.83)$$

$$T_u = E(z) - u_w\sigma_z. \quad (3.84)$$

Durch Gleichsetzen von (3.83) und (3.84) und Einsetzen von (3.80), (3.82) und (3.81) erhält man die gesuchte Annahmewahrscheinlichkeit in standardisierter Form zu

$$u_w = -\sqrt{\frac{n_{o,\sigma}}{\text{Var}(u_m)}} (u_T + (u_m + k_{o,\sigma})) \quad (3.85)$$

Man erkennt die formale Übereinstimmung von (3.85) und (3.9).

Die Operationscharakteristik ergibt sich damit zu

$$L(p) = \Phi \left[-\sqrt{\frac{n_{o,\sigma}}{\text{Var}(u_m)}} (u_T + (u_m + k_{o,\sigma})) \right] \quad (3.86)$$

Standardabweichung σ unbekannt

Einem Los mit dem Schlechtanteil p wird gemäß Abbildung 3.5 eine Stichprobe vom Umfang $n_{o,s}$ entnommen (Index s für unbekannte Standardabweichung). Aus dieser Stichprobe wird das erste und zweite Stichprobenmoment nach (3.77) und (3.87) berechnet.

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{n_{o,s} - 1} \sum_{i=1}^{n_{o,s}} (x_{m,i} - \bar{x}_m)^2} \quad (3.87)$$

Daraus wird die Prüfgröße

$$z_{o,s} = \bar{x}_m - k_{o,s} s_m \quad (3.88)$$

gebildet. Die in (3.79) gegebene Entscheidungsregel gilt auch bei unbekannter Standardabweichung σ ($z_{o,\sigma}$ wird durch $z_{o,s}$ ersetzt). Der Erwartungswert der

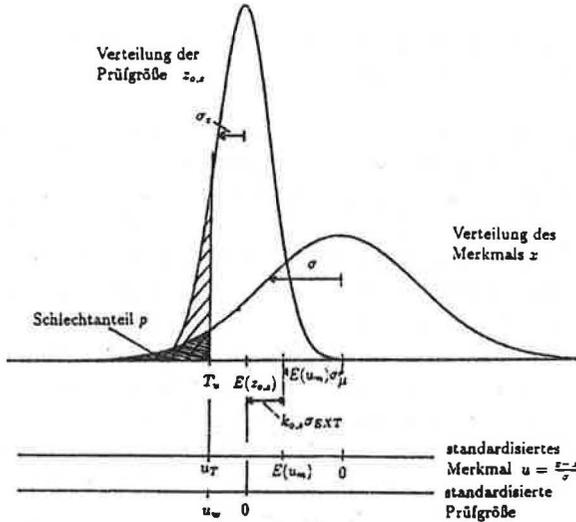


Abbildung 3.7: Verteilung der Prüfgröße $z_{o,s}$

Prüfgröße lautet

$$\begin{aligned} E(z_{o,s}) &= E(\bar{x}_m) - k_{o,s} E(s_m) \\ &= \mu - E(u_m)\sigma - k_{o,s} E(s_m) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Für die Varianz der Prüfgröße gilt

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 = \text{Var}(z_{o,s}) &= \text{Var}(\bar{x}_m) + k_{o,s}^2 \text{Var}(s_m) + 2k_{o,s} \text{Cov}(\bar{x}_m; s_m) \\ &= \frac{\sigma_{EXT,m}^2}{n_{o,s}} + k_{o,s}^2 \text{Var}(s_m) + 2k_{o,s} \text{Cov}(\bar{x}_m; s_m) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Die Verteilungsfunktion der Standardabweichungen s_m und damit der Erwartungswert $E(s_m)$ und die Varianz $\text{Var}(s_m)$ sowie die Kovarianzen $\text{Cov}(\bar{x}_m; s_m)$ sind unbekannt. Die asymptotischen Lösungen für große $n_{o,s}$ lauten nach KENDALL/STUART (1977)

$$E(s_m) = \sigma_{EXT,m} \quad \text{für } n_{o,s} \rightarrow \infty, \quad (3.91)$$

$$\text{Var}(s_m) = \frac{w_4 - w_2^2}{4w_2 n_{o,s}} \sigma_{EXT,m}^2 \quad \text{für } n_{o,s} \rightarrow \infty. \quad (3.92)$$

$w_2 = \text{Var}(u_m)$ und w_4 stellen das zweite und vierte, zentrale Moment der Extremwertverteilung dar. In standardisierter Form lautet w_4 :

$$w_4 = m \int_{-\infty}^{\infty} u^4 [1 - \Phi(u)]^{m-1} \varphi(u) du \quad (3.93)$$

w_4 wurde ebenfalls numerisch berechnet, die Ergebnisse sind aus Tabelle 3.1 in Abhängigkeit von m abzulesen.

Da die asymptotischen Lösungen für $E(s_m)$ und $\text{Var}(s_m)$ nur für hinreichend große $n_{o,s}$ Gültigkeit haben, bei Schwachstellenprüfplänen aber gerade sehr kleine Stichprobenumfänge zur Anwendung kommen sollen, wurde zur „exakten“ Berechnung von $E(s_m)$ und $\text{Var}(s_m)$ sowie von $\text{Cov}(\bar{x}_m; s_m)$ auf Monte-Carlo-Simulationen (RUBINSTEIN(1981); STANGE(1971)) zurückgegriffen. Bei Monte-Carlo-Simulationen werden analytisch nicht berechenbare Größen mit Hilfe von Zufallszahlen simuliert. Für die gegebene Problemstellung wurde deshalb ein Programm an der Cyber 995 Rechenanlage des Leibniz Rechenzentrums der TU München geschrieben, das wiederholt den Mittelwert \bar{x}_m , die Standardabweichung s_m und die Kovarianz $\text{Cov}(\bar{x}_m; s_m)$ einer Zufallsstichprobe berechnet. Die Zufallsstichprobe wurde aus einer Extremwertverteilung mit dem Parameter m einer (0;1)-verteilten Normalverteilung künstlich erzeugt. Dies geschah mit einer Routine aus dem Programmpaket NAGF und wurde für $m = 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ und $n_{o,s} = 2, 3, \dots, 6$ jeweils 20000 mal und für obiges m und $n_{o,s} = 7, 8, \dots, 11$ jeweils 5000 mal durchgeführt und daraus $E(s_m)_{\sigma=1}$ ³, $\text{Var}(s_m)_{\sigma=1}$ und $\text{Cov}(\bar{x}_m; s_m)_{\sigma=1}$ berechnet.

Abbildung 3.8 und Tabelle 3.2 stellen den erhaltenen Erwartungswert $E(s_m)_{\sigma=1}$ als Funktion von $n_{o,s}$ und m dar. In Abbildung 3.9 und Tabelle 3.3 ist das Produkt $n_{o,s} \text{Var}(s_m)_{\sigma=1}$ als Funktion von $n_{o,s}$ und m aufgetragen. Die Tabellen enthalten ferner die asymptotischen Ergebnisse für $E(s_m)_{\sigma=1}$ und $\text{Var}(s_m)_{\sigma=1}$ nach den Gleichungen (3.91) und (3.92).

³Der Index $\sigma = 1$ besagt, daß die erhaltenen Werte aus einer (0,1)-Normalverteilung simuliert wurden

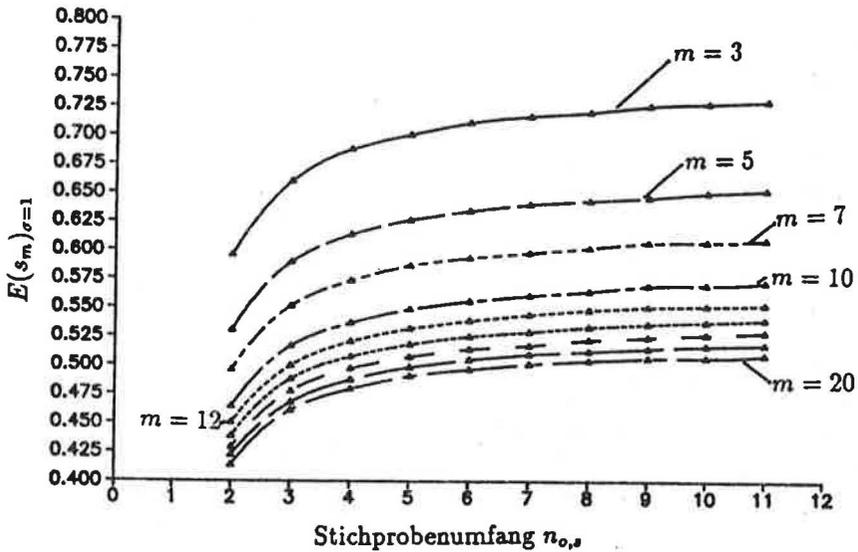


Abbildung 3.8: $E(s_m)_{\sigma=1}$ in Abhängigkeit von $n_{o,s}$ und m

$n_{o,s} \backslash m$	3	5	7	10	12	14	16	18	20
2	0.59578	0.53057	0.49610	0.46431	0.45041	0.43853	0.42890	0.42229	0.41356
3	0.66047	0.58986	0.55172	0.51675	0.49974	0.48817	0.47768	0.46781	0.46094
4	0.68844	0.61369	0.57327	0.53680	0.52057	0.50748	0.49706	0.48751	0.47933
5	0.70136	0.62664	0.58635	0.54836	0.53164	0.51794	0.50698	0.49810	0.49037
6	0.71107	0.63468	0.59316	0.55538	0.53862	0.52495	0.51388	0.50481	0.49624
7	0.71596	0.63995	0.59755	0.56020	0.54357	0.52870	0.51699	0.50940	0.50087
8	0.71956	0.64318	0.60187	0.56384	0.54775	0.53313	0.52189	0.51195	0.50368
9	0.72491	0.64564	0.60646	0.56862	0.55043	0.53561	0.52424	0.51425	0.50596
10	0.72648	0.64951	0.60687	0.56921	0.55111	0.53743	0.52644	0.51667	0.50639
11	0.72832	0.65191	0.60899	0.57175	0.55233	0.53946	0.52879	0.51795	0.50875
∞	0.74797	0.66897	0.62603	0.58681	0.56889	0.55473	0.54315	0.53341	0.52507

Tabelle 3.2: Der Erwartungswert $E(s_m)_{\sigma=1} = e_{m,n}$

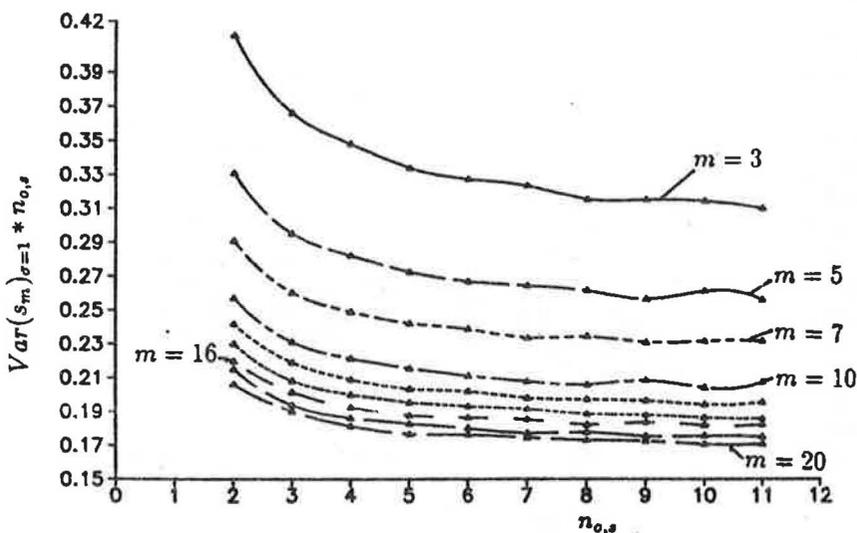


Abbildung 3.9: $Var(s_m)_{\sigma=1} * n_{o,s}$ in Abhängigkeit von $n_{o,s}$ und m

$n_{o,s} \backslash m$	3	5	7	10	12	14	16	18	20
2	0.41168	0.33046	0.29065	0.25689	0.24159	0.22997	0.21980	0.21503	0.20597
3	0.36592	0.29482	0.26014	0.23101	0.21899	0.20813	0.20141	0.19371	0.18990
4	0.34775	0.28192	0.24875	0.22131	0.20901	0.20009	0.19256	0.18612	0.18135
5	0.33358	0.27204	0.24191	0.21546	0.20331	0.19527	0.18769	0.18272	0.17662
6	0.32721	0.26675	0.23883	0.21114	0.20207	0.19314	0.18650	0.18018	0.17637
7	0.32345	0.26437	0.23346	0.20788	0.19806	0.19149	0.18535	0.17711	0.17445
8	0.31516	0.26143	0.23444	0.20599	0.19739	0.18875	0.18229	0.17789	0.17312
9	0.31504	0.25646	0.23093	0.20864	0.19660	0.18816	0.18380	0.17545	0.17260
10	0.31433	0.26128	0.23178	0.20412	0.19415	0.18641	0.18188	0.17568	0.17068
11	0.30964	0.25576	0.23149	0.20737	0.19554	0.18589	0.18224	0.17507	0.17077
∞	0.29604	0.24623	0.22168	0.20071	0.19153	0.18399	0.17881	0.17411	0.17014

Tabelle 3.3: Faktor $n_{o,s} * Var(s_m)_{\sigma=1} = v_{m,n}$ in Abhängigkeit von m und $n_{o,s}$

$n_{o,s} \backslash m$	3	5	7	10	12	14	16	18	20
2	0.02391	0.02766	0.02772	0.02825	0.02792	0.02734	0.02750	0.02724	0.02699
3	0.01769	0.01995	0.02052	0.02056	0.02022	0.02025	0.02074	0.02001	0.02007
4	0.01366	0.01597	0.01590	0.01639	0.01606	0.01584	0.01584	0.01576	0.01566
5	0.01089	0.01243	0.01330	0.01327	0.01318	0.01310	0.01286	0.01281	0.01261
6	0.00927	0.01046	0.01096	0.01093	0.01126	0.01105	0.01092	0.01107	0.01092
7	0.00851	0.00949	0.00963	0.00930	0.00929	0.00958	0.00963	0.00925	0.00931
8	0.00727	0.00803	0.00870	0.00809	0.00840	0.00860	0.00822	0.00822	0.00812
9	0.00645	0.00725	0.00761	0.00755	0.00741	0.00753	0.00751	0.00744	0.00726
10	0.00592	0.00667	0.00685	0.00679	0.00690	0.00661	0.00683	0.00675	0.00644
11	0.00523	0.00614	0.00627	0.00634	0.00631	0.00614	0.00618	0.00610	0.00600

Tabelle 3.4: Die Kovarianzen $Cov(\bar{x}_m; s_m)_{\sigma=1} = f_{m,n}$ in Abhängigkeit von m und $n_{o,s}$

Tabelle 3.4 gibt die bei der Simulation erhaltenen Kovarianzen $Cov(\bar{x}_m; s_m)_{\sigma=1}$ an. Da die Kovarianzen sehr klein sind und der Annahmefaktor für praxisnahe Fälle den Wertebereich $|k_{0,s}| < 1.5$ annimmt, kann ohne größeren Verlust der Genauigkeit der letzte Summand in Gleichung (3.90) vernachlässigt werden. Eine Abschätzung des dadurch verursachten Fehlers wird im Anhang vorgenommen.

Wie in Kapitel 3.4.4 gezeigt wird, kann für die Verteilung von s_m Normalverteilung angenommen werden. Dabei werden die numerisch berechneten „exakten“ Werte für den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung verwendet. Für die Verteilung der Prüfgröße $z_{0,s}$ ergibt sich damit ebenfalls Normalverteilung. Die Überprüfung dieser Annahme erfolgt später durch Simulation der Operationscharakteristik.

Für ein normalverteiltes Los mit der Standardabweichung σ lautet dann der Erwartungswert der Standardabweichung einer Extremwertverteilung mit dem Parameter m bei Ziehung einer Zufallsstichprobe vom Umfang $n_{0,s}$

$$E(s_m) = e_{m,n} \sigma \quad (3.94)$$

und die Varianz der Standardabweichung

$$\text{Var}(s_m) = v_{m,n} \frac{\sigma^2}{n_{0,s}} \quad (3.95)$$

mit $e_{m,n}$ = Faktor nach Tabelle 3.2
 $v_{m,n}$ = Faktor nach Tabelle 3.3 .

Aus Abbildung 3.7 ergibt sich damit

$$T_u = \mu + u_T \sigma \quad (3.96)$$

$$T_u = E(z_{0,s}) - u_{w,s} \sigma_z \quad (3.97)$$

Durch Gleichsetzen von (3.96) und (3.97) und Einsetzen von (3.90) und (3.91) erhält man

$$\mu + u_T \sigma = \mu - E(u_m) \sigma - k_{0,s} E(s_m) - u_{w,s} \sigma_z \quad (3.98)$$

$$u_T \sigma = -E(u_m) \sigma - k_{0,s} e_{m,n} \sigma - u_{w,s} \sqrt{\frac{\text{Var}(u_m) \sigma^2}{n_{0,s}} + k_{0,s}^2 \frac{v_{m,n} \sigma^2}{n_{0,s}}} \quad (3.99)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich durch Auflösung nach $u_{w,s}$ die Beziehung

$$u_{w,s} = -\sqrt{\frac{n_{0,s}}{\text{Var}(u_m) + k_{0,s}^2 v_{m,n}}} (u_T + E(u_m) + k_{0,s} e_{m,n}) \quad (3.100)$$

und daraus die Annahmewahrscheinlichkeit eines Loses bei Schwachstellenprüfung

$$L(p | m; n_{o,s}; k_{o,s}) = \Phi \left[-\sqrt{\frac{n_{o,s}}{\text{Var}(u_m) + k_{o,s}^2 v_{m,n}}} (u_T + E(u_m) + k_{o,s} e_{m,n}) \right] \quad (3.101)$$

3.4.3 Die Reduzierung der Anzahl der Messungen bei Schwachstellenprüfplänen gegenüber Einfachstichprobenplänen

Standardabweichung σ bekannt

Die Reduzierung des Versuchsumfanges bei Anwendung eines Schwachstellenprüfplanes gegenüber einem einfachen Stichprobenprüfplan mit bekannter Standardabweichung ergibt sich durch Gleichsetzen von (3.85) und (3.9) und dem Vergleich der entsprechenden Terme als Funktion von m zu

$$\frac{n_{o,\sigma}}{n_\sigma} = \text{Var}(u_m) \quad (3.102)$$

Der Zusammenhang zwischen den Annahmefaktoren bei Schwachstellenprüfung und bei einem einfachen Stichprobenprüfplan lautet

$$k_\sigma = E(u_m) + k_{o,\sigma} \quad (3.103)$$

Mit (3.102) und (3.103) können bei Vorgabe eines einfachen Stichprobenprüfplanes die Parameter des Schwachstellenprüfplanes $n_{o,\sigma}$ und $k_{o,\sigma}$ in Abhängigkeit von m berechnet werden.

Standardabweichung σ unbekannt

Durch einen Vergleich der entsprechenden Terme in den Gleichungen (3.100) und (3.26) läßt sich der Annahmefaktor eines Schwachstellenprüfplanes in den Annahmefaktor eines äquivalenten, einfachen Stichprobenplanes umrechnen.

$$k_s = E(u_m) + k_{o,s} e_{m,n} \quad (3.104)$$

In Abbildung 3.10 ist Gleichung (3.104) für $m = 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16$ und $n_{o,s} = 3, 6$ graphisch dargestellt.

Die Einsparung der Anzahl der Messungen bei Anwendung eines Schwachstellenprüfplanes gegenüber einem einfachen Stichprobenprüfplan mit unbekannter Standardabweichung kann ebenfalls durch einen Vergleich der entsprechenden Terme in den Gleichungen (3.100) und (3.26) erhalten werden.

$$\frac{n_s}{1 + \frac{k_s^2}{2}} = \frac{n_{o,s}}{\text{Var}(u_m) + k_{o,s}^2 v_{m,n}} \quad (3.105)$$

$$\frac{n_{o,s}}{n_s} = \frac{\text{Var}(u_m) + k_{o,s}^2 v_{m,n}}{1 + \frac{k_s^2}{2}} \quad (3.106)$$

Nach dem Einsetzen von (3.104) in (3.106) ergibt sich

$$\frac{n_{o,s}}{n_s} = \frac{\text{Var}(u_m) + \left(\frac{k_s + E(u_m)}{e_{m,n}}\right)^2 v_{m,n}}{1 + \frac{k_s^2}{2}} \quad (3.107)$$

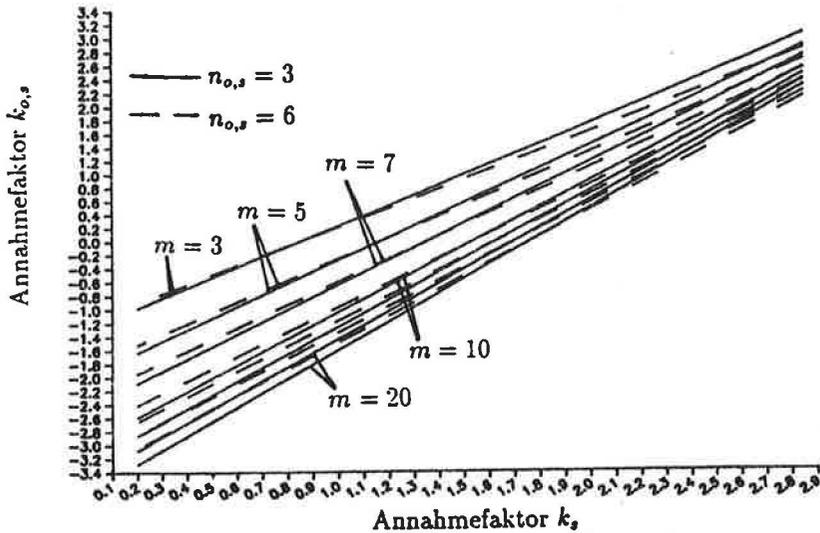


Abbildung 3.10: k_s als Funktion von $k_{0,s}$, m und $n_{0,s}$

Die mögliche Einsparung ist also vom Annahmefaktor k_s , dem gewählten Parameter m und von $n_{0,s}$ abhängig.

In Abbildung 3.11 ist Gleichung (3.107) für $m = 3, 7, 20$ und $n_{0,s} = 3, 6, 11$ dargestellt. Man erkennt, daß bereits für $m = 3$ die Einsparung des Stichprobenumfanges bis zu 50% betragen kann und für $m = 20$ bei entsprechendem k_s auf über 85% steigen kann. Die relativen Einsparungen sind für gleiches m bei großen Werten von $n_{0,s}$ größer oder gleich groß als bei kleinen Werten von $n_{0,s}$. Ferner ist ersichtlich, daß eine Schwachstellenauswahl mit großen Werten für m , falls große Fraktile überprüft werden sollen (das entspricht einem kleinen Annahmefaktor k_s), auch größere Stichprobenumfänge erfordern kann als bei Anwendung eines einfachen Stichprobenplanes. Hier führt also eine Schwachstellenauswahl zu ungünstigeren Ergebnissen bezüglich des Versuchsumfanges. Wenn der Parameter m frei gewählt werden kann (vgl. dazu auch Kapitel 3.4.5, sollte er so gewählt werden, daß sich für den Annahmefaktor $k_{0,s}$ ein möglichst kleiner, absoluter Wert ergibt, da dann die Einsparung des Versuchsumfanges am größten ist.

Aus den Gleichungen (3.107) und (3.104) bzw. Abbildung 3.11 und 3.10 können bei vorgegebenem n_s , k_s und m die Parameter $k_{0,s}$ und $n_{0,s}$ des Schwachstellenprüfplanes nach einigen Iterationsschritten ermittelt werden.

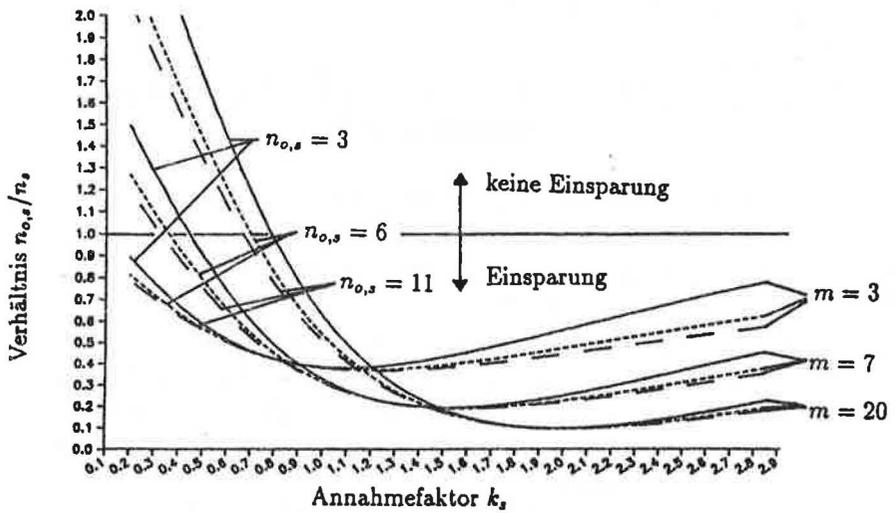


Abbildung 3.11: Das Verhältnis $n_{o,s}/n_s$ als Funktion von m und k_s

3.4.4 Simulation der Operationscharakteristik

Zur Überprüfung der gemachten Verteilungsannahmen bezüglich s_m und des hergeleiteten Modells wurde die Operationscharakteristik simuliert.

Dazu wurde ein Programm geschrieben, das aus einer Extremwertverteilung mit den Parametern μ, σ, m eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n_{o,s}$ zieht. Dabei wird μ zufällig gewählt und σ so bestimmt, daß immer der gleiche Schlechtanteil p in den Losen beibehalten wird. Aus der erhaltenen Zufallsstichprobe wird die Prüfgröße $z_{o,s}$ nach Gleichung (3.88) gebildet und ermittelt, wie oft $z_{o,s}$ oberhalb des vorgegebenen Grenzwertes T_u liegt. Dies wurde 800 mal je Schlechtanteil p durchgeführt. Die relative Häufigkeit der Überschreitungen des Grenzwertes T_u stellt die gesuchte Annahmewahrscheinlichkeit $L(p)$ dar.

Zum Vergleich wurde die Operationscharakteristik eines einfachen Stichprobenprüfplanes, dessen Parameter k_s und n_s aus den Gleichungen (3.104) und (3.107) ermittelt wurden, in ähnlicher Weise simuliert. Ferner wurde die sich aus der Theorie ergebende Annahmewahrscheinlichkeit für einen einfachen Stichprobenprüfplan nach (3.15) berechnet.

Die Ergebnisse von zwei Simulationsläufen sind in den Abbildungen 3.12 und 3.13 zu sehen. Man erkennt die gute Übereinstimmung zwischen der Simulation bei Schwachstellenauswahl und bei reiner Zufallsauswahl.

Weitere Simulationen haben ergeben, daß bereits für Werte von $n_{o,s} > 3$ die Verteilung der Standardabweichung s_m durch eine Normalverteilung angenähert werden darf.

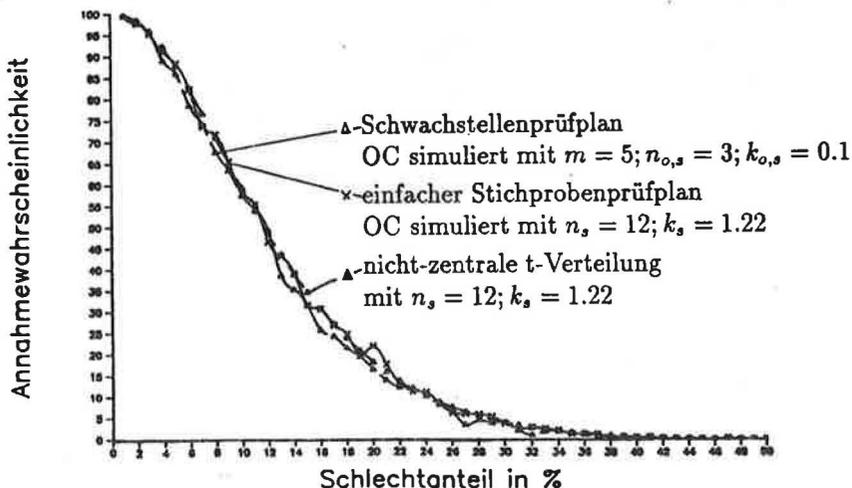


Abbildung 3.12: Simulation der Operationscharakteristik, σ unbekannt

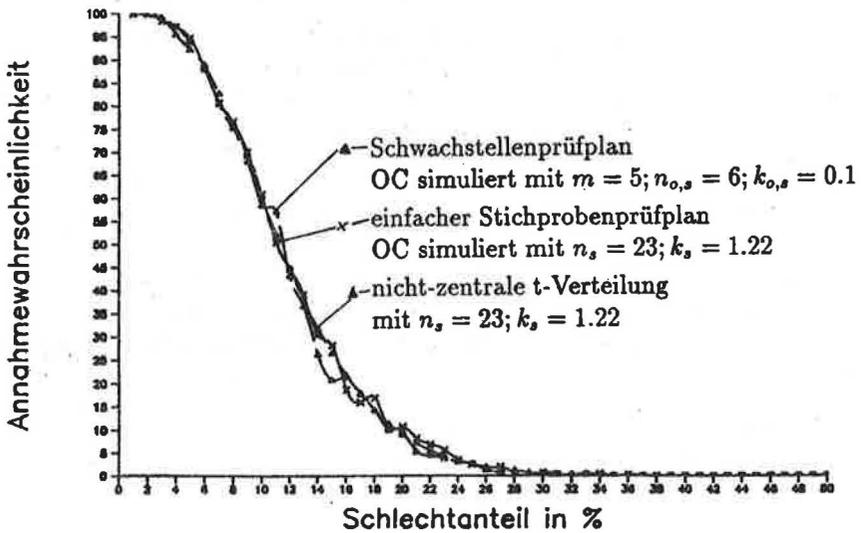


Abbildung 3.13: Simulation der Operationscharakteristik, σ unbekannt

3.4.5 Auswirkungen auf die Annahmewahrscheinlichkeit bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl

Das in Abschnitt 3.4.1 dargelegte Modell setzt voraus, daß ein Versuch innerhalb einer der n_o Gruppen jeweils nur an der „schwächsten“ Stelle, also an der Stelle mit dem im Vergleich zu den anderen Punkten geringsten Merkmalswert, durchgeführt wird. Die Lokalisierung dieser Stelle ist natürlich bei einer kleinen Zahl m einfacher und mit einer geringeren Irrtumswahrscheinlichkeit behaftet, als bei einem größerem Wert von m . Andererseits kann man bei einem großen Wert für m mit einem geringeren Stichprobenumfang n_o auskommen.

Die Auswirkungen einer nicht exakten Versuchspunktauswahl auf die Annahmewahrscheinlichkeit können durch Simulationen erfaßt werden. Die Abbil-

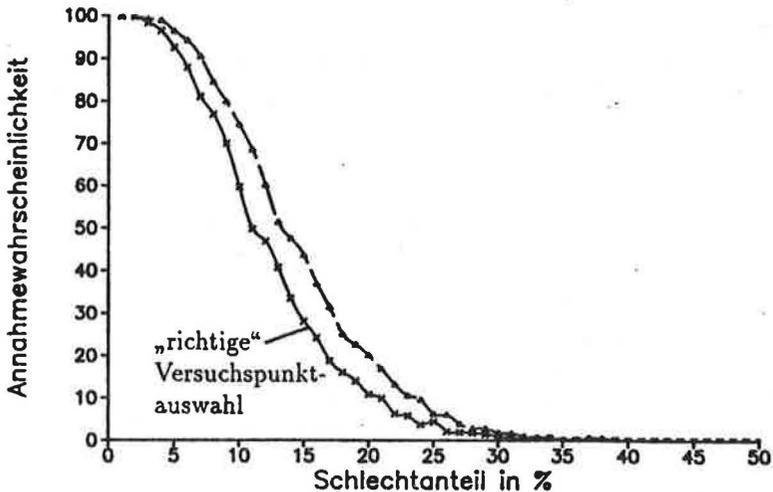


Abbildung 3.14: Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 5$, $n_{o,s} = 5$, $k_{o,s} = 0.1$, aus einer der fünf Gruppen wurde nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.

dungen 3.14 und 3.15 zeigen die simulierten Operationscharakteristiken eines Schwachstellenprüfplanes, wenn aus *einer* bzw. *zwei* Gruppen mit $m = 5$ nicht der kleinste, sondern nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet wird. Die Annahmewahrscheinlichkeit erhöht sich dadurch zwangsläufig in

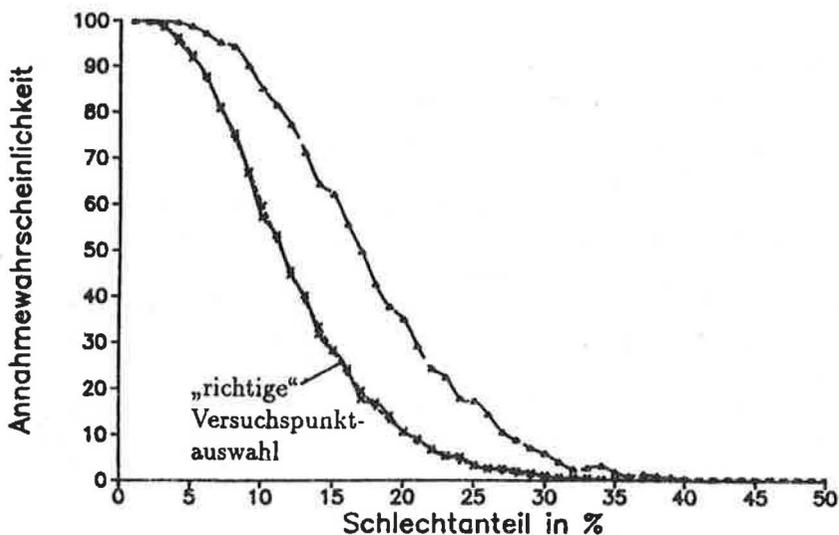


Abbildung 3.15: Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modellkonformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 5$, $n_{o,s} = 5$, $k_{o,s} = 0.1$, aus zwei der fünf Gruppen wurde jeweils nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.

Abhängigkeit vom Schlechtanteil p .

Die Abbildungen 3.16 und 3.17 zeigen die Simulationsergebnisse für $m = 20$.

Vergleicht man die Abbildungen 3.14 und 3.16, sowie 3.15 und 3.17, so sieht man, daß bei gleichem n_o mit zunehmendem m die Auswirkungen einer nicht modellkonformen Versuchspunktauswahl kleiner werden. Allerdings kann bereits die Auswahl der zweitkleinsten Merkmalswerte in zwei von fünf Gruppen erhebliche Auswirkungen auf die Annahmewahrscheinlichkeit haben (Abbildung 3.15). Eine genaue Überprüfung, ob die Voraussetzungen für die Anwendung von Schwachstellenprüfplänen vorliegen, ist daher entscheidend. Im Vergleich zu einfachen oder doppelten Prüfplänen benötigen sie den geringsten Versuchsumfang, sie haben aber auch die meisten Modellvoraussetzungen.

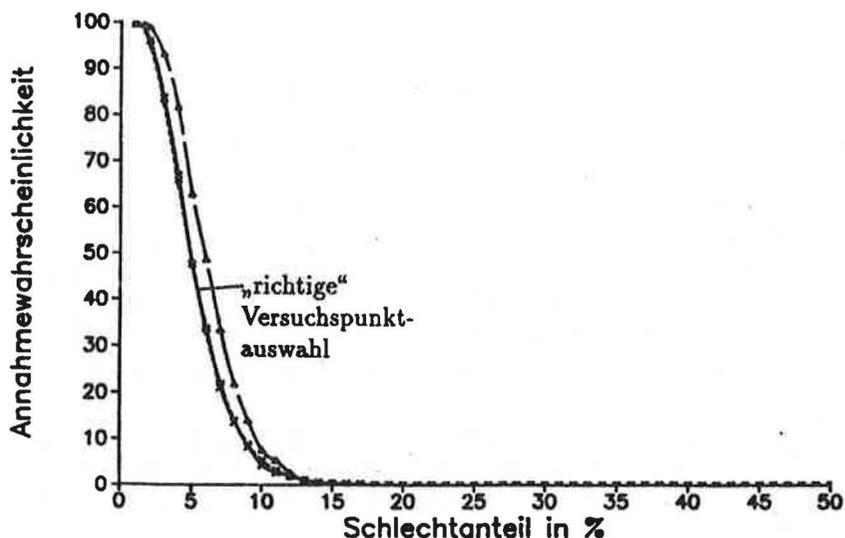


Abbildung 3.16: Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 20$, $n_{o,s} = 5$, $k_{o,s} = -0.4$, aus einer der fünf Gruppen wurde nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.

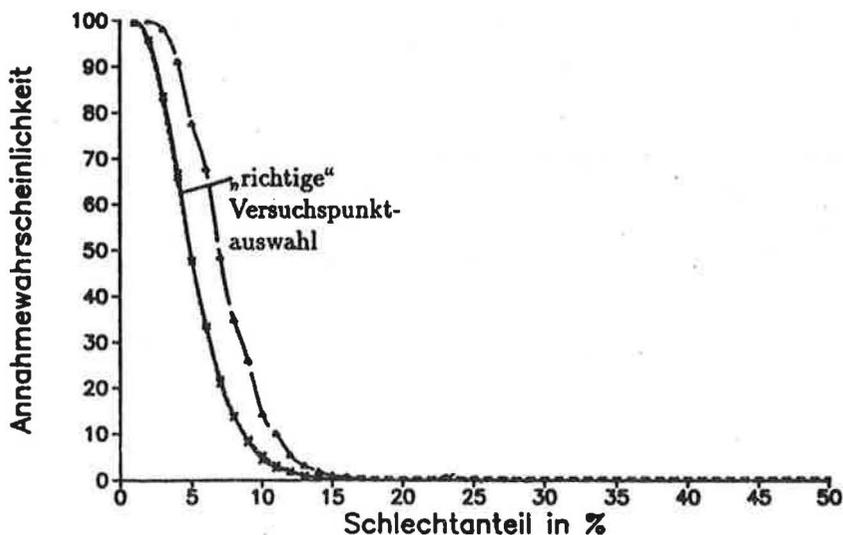


Abbildung 3.17: Simulation der Operationscharakteristik bei nicht modell-konformer Versuchspunktauswahl, σ unbekannt, $m = 20$, $n_{o,s} = 5$, $k_{o,s} = -0.4$, aus zwei der fünf Gruppen wurde jeweils nur der zweitkleinste Merkmalswert verwendet.

3.5 Die Extremwertkarte zur Prozeßüberwachung

Für die laufende Überwachung des Verdichtungsvorganges können Qualitätsregelkarten verwendet werden. Nicht zufallsbedingte Störungen lassen sich dadurch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erkennen. Die gleichzeitige Überwachung des Mittelwertes μ und der Standardabweichung σ bzw. die Überwachung einer Fraktile $\mu - u\sigma$ kann mit Hilfe der „Extremwertkarte“ erfolgen (vgl. STANGE (1969),(1975), GRAF et. al. (1987)). Dabei werden fortlaufend kleine Stichproben vom Umfang n_Q entnommen. Als Prüfgröße z_Q dient der kleinste Wert x_{min} der geordneten Stichprobe (Abbildung 3.18).

Die Entscheidungsregel lautet: Unterschreitet der Merkmalswert x_{min} die untere Eingriffsgrenze U_e so liegt eine Störung des Verdichtungsvorganges (zu geringe Verdichtungsarbeit, zu große Abweichung vom optimalen Wassergehalt, usw.) vor.

Die Eingriffsgrenze U_e wird so berechnet, daß die Prüfgröße $z_Q = x_{min}$ bei gegebenem Stichprobenumfang n_Q und gegebenem Schlechtanteil p^* die Eingriffsgrenze mit der Wahrscheinlichkeit $1 - L^*$ unterschreitet.

Nach GRAF et. al. (1987) ergibt sich U_e zu

$$U_e = T_u + k_Q \sigma \quad (3.108)$$

mit

$$k_Q = -u_{p^*} - u_{n_Q/L^*} \quad (3.109)$$

σ kann in erster Näherung durch Prioriannahmen (siehe Kapitel 8) geschätzt werden und nach dem Vorliegen der ersten r Stichproben gleichen Umfanges n durch

$$\sigma = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r s_i \quad (3.110)$$

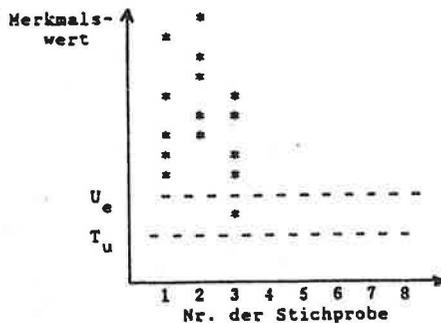


Abbildung 3.18: Schema einer Extremwertkarte

ersetzt, bzw. mit Hilfe Bayesscher Theorie verbessert werden.

Der Faktor k_Q kann in Abhängigkeit von n_Q , p^* und $1 - L^*$ aus Tabelle 3.5 entnommen werden.

$1 - L^*[\%]$	n	$p_0[\%]$			
		20	30	40	50
90	2	1.320	1.003	0.732	0.478
90	3	0.932	0.614	0.343	0.090
90	4	0.685	0.367	0.096	-0.157
90	5	0.507	0.190	-0.081	-0.334
90	6	0.370	0.053	-0.218	-0.471
95	2	1.602	1.284	1.013	0.760
95	3	1.178	0.860	0.589	0.336
95	4	0.910	0.592	0.321	0.068
95	5	0.718	0.401	0.130	-0.124
95	6	0.570	0.253	-0.018	-0.271

Tabelle 3.5: Faktor k_Q der Extremwertkarte

Die Operationscharakteristik (Nichteingriffswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des Schlechtanteiles p) lautet:

$$L(p) = [\Phi(-u_p - k_Q)]^{n_Q} \quad (3.111)$$

Der Fehler 1. Art stellt einen Eingriff in den Verdichtungsprozeß dar, obwohl der Prozeß oberhalb der Toleranzgrenze verläuft (unnötiger Eingriff wird ausgeführt).

Der Fehler 2. Art liegt vor, wenn der Schlechtanteil größer als der zulässige Schlechtanteil ist, die Prüfgröße z_Q jedoch oberhalb der Eingriffsgrenze liegt (nötiger Eingriff wird nicht ausgeführt).

Die Wahrscheinlichkeiten für beide Arten von Fehlentscheidungen lassen sich aus der Operationscharakteristik abgelesen.

Im Erdbau ist die Anwendung von Qualitätsregelkarten nur dann sinnvoll, wenn die Zeitspanne zwischen Probennahme und möglicher Änderung der Verdichtungsparameter nicht zu groß ist, da sonst eine rechtzeitige Regelung nicht mehr erfolgen kann. Die Anwendung von Qualitätsregelkarten wird daher auf sehr große Schüttlose begrenzt bleiben.

4 Indirekte Schnellprüfverfahren

Für die Überprüfung der Verdichtung stehen neben den klassischen Prüfverfahren verschiedene Schnellprüfverfahren (dynamische Verdichtungskontrolle, Proofrolling, Benkelmannbalken, dynamischer Plattendruckversuch, Kabelleitungssonde) zur Verfügung. Diese können in flächendeckende und punktuelle Schnellprüfverfahren eingeteilt werden. Bei all diesen Verfahren wird ein indirektes, den Verdichtungszustand kennzeichnendes Merkmal x gemessen, das mit dem gesuchten, direkten Merkmal y (z.B. Verdichtungsgrad, Verformungsmodul) in einem korrelativen Zusammenhang steht.

Die beiden Merkmale x und y seien normalverteilt und es gelte ein lineares Modell nach Gleichung (4.1) für eine zweidimensionale Stichprobe $(x; y)$

$$y = a^*x + b^* + \varepsilon = \hat{y}(x) + \varepsilon \quad (4.1)$$

ε wird $(0; \sigma_\varepsilon)$ -normalverteilt angenommen. σ_ε wird durch den Schätzwert s_ε nach der klassischen Theorie für zweidimensionale Zufallsvariablen geschätzt (vgl. STANGE(1971), SACHS(1974)).

Bei einer statistischen Abnahme mit Prüfplänen und der Verwendung von indirekten Prüfverfahren muß der Stichprobenumfang n_x für das indirekte Prüfverfahren so gewählt werden, daß die indirekte Stichprobe nach Einbeziehung des nur korrelativen Zusammenhanges zum direkten Merkmal einer direkten Stichprobe mit dem Stichprobenumfang n_y bezüglich der Filterfähigkeit des Prüfplanes gleichwertig ist.

4.1 Flächendeckende Schnellprüfverfahren

Liegt eine Fraktileforderung bezüglich des Grenzwertes $T_{u,x}$ für das indirekte Merkmal eines flächendeckenden Prüfverfahrens vor, so errechnet sich der Schlechtanteil zu

$$p_x = \Phi\left(\frac{T_{u,x} - \mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (4.2)$$

μ_x und σ_x sind der Mittelwert und die Standardabweichung des indirekten Merkmals im Prüflos. σ_x muß dabei unter Berücksichtigung der Autokorrelation berechnet werden.

Die Entscheidungsregel lautet dann:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls } p_{gr} \geq p_x \\ \text{Falls } p_{gr} < p_x \end{array} \right\} \text{so wird das Prüflos } \left\{ \begin{array}{l} \text{angenommen.} \\ \text{abgelehnt.} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

p_{gr} = geforderte Fraktile bezüglich $T_{u,x}$

Dabei ist zu beachten, daß hier nicht auf die Stichprobentheorie zurückgegriffen werden muß, da unter Vernachlässigung des Meßfehlers bei der Bestimmung der indirekten Merkmalswerte bei einer flächendeckenden Prüfung die wahren Werte μ_x und σ_x ermittelt werden.

4.2 Punktuelle Schnellprüfverfahren

Regressionsgerade bekannt

Ist die Regressionsgerade $\hat{y} = a^*x + b^*$ durch so viele Versuche untermauert worden, daß die geschätzten Koeffizienten a und b für a^* und b^* als die wahren Regressionskoeffizienten angesehen werden können, so läßt sich die Standardabweichung σ_ε als zufälliger Meßfehler bei der Bestimmung von y auffassen.

Liegt ein einfacher Variablenprüfplan mit den Parametern n_y und k_y für das direkt gemessene Merkmal vor, so kann ein erhöhter Stichprobenumfang n_x und ein geänderter Annahmefaktor k_x angegeben werden, bei deren Verwendung der Prüfplan für das indirekte Merkmal die gleiche Filterfähigkeit besitzt, wie ein Prüfplan für das direkt gemessene Merkmal. Mit Verwendung von DEUTLER(1989) ergibt sich n_x zu

$$n_x = \left(1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2} \right) n_y \quad (4.4)$$

und k_x zu

$$k_x = \frac{k_y}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2}}} \quad (4.5)$$

Die Gleichungen (4.4) und (4.5) gelten für Variablenprüfpläne mit bekannter und unbekannter Standardabweichung.

Regressionsgerade geschätzt

Wird die Regressionsgerade durch eine relativ geringe Anzahl n_{Reg} von Versuchspaaren $(x; y)$ in einem Testfeld vorher bestimmt, so sind die ermittelten Werte a und b für die Parameter a^* und b^* der Regressionsgerade nur Schätzwerte für die wahren Werte. Dies muß bei der Berechnung eines äquivalenten Stichprobenumfanges n_y berücksichtigt werden.

Nach STANGE(1971) ergibt sich die Varianz eines vorhergesagten Einzelwertes y in einem linearen Regressionsmodell nach Gleichung (4.1) zu

$$Var(y) = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{s_{xx}} \right]$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{s_{xx}(n+1) - n(x - \bar{x})^2}{ns_{xx}} \right) \quad (4.6)$$

mit

$$s_{xx} = \sum_{k=1}^{n_{Reg}} (x_k - \bar{x})^2 n_{Reg} \quad (4.7)$$

Mit $n = 1$ kann der Kehrwert des Klammerausdruckes in (4.6)

$$n_{fik,\nu} = \frac{s_{xx}}{2s_{xx} + (x_\nu - \bar{x})^2} \quad (4.8)$$

als fiktive Probenzahl aufgefaßt werden, mit der die Genauigkeit des Vorhergesagewertes für y beurteilt werden kann, wenn *ein* Versuch mit der Stichprobenrealisation x_ν ausgeführt wird.

Liegt ein Variablenprüfplan mit den Parametern n_y und k_y vor, so müssen so viele indirekte Versuche ausgeführt werden bis

$$\sum_{\nu=1}^i n_{fik,\nu} \simeq n_y \quad (4.9)$$

gilt. Die für das indirekte Meßverfahren benötigte Versuchsanzahl muß also auf iterativem Wege bestimmt werden und hängt von den Stichprobenrealisationen x_ν ab. Dabei gilt immer: $\sum_{\nu=1}^i n_{fik,\nu} > n_x$

Die Umrechnung des Annahmefaktors kann näherungsweise nach Gleichung (4.5) erfolgen.

5 Prüffehler

5.1 Modellgleichung

Jedes Meßergebnis ist in der Regel mit bestimmten Meßfehlern behaftet. Die Meßfehler lassen sich in systematische und zufällige Meßfehler einteilen. Der systematische Meßfehler wird durch die „Richtigkeit“, der zufällige Meßfehler durch die „Präzision“ angegeben (DIN 55350, Teil 13). Ein Meßergebnis bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades oder des Verformungsmodulus setzt sich gemäß Gleichung (5.1) aus unterschiedlichen Komponenten zusammen:

$$x_{hij} = q_i + \beta_j + \gamma_{hj} + \epsilon_{hij} \quad (5.1)$$

Dabei bedeuten:

- i = Meßstelle
- j = Meßverfahren
- h = Labor
- x_{hij} = Meßwert an der Meßstelle i , gemessen von Labor h mit Meßverfahren j
- q_i = wahrer, aber unbekannter Wert an der Stelle i
- β_j = systematischer Meßfehler des Meßverfahrens j
- γ_{hj} = laborspezifischer Meßfehler des Labors h bei Anwendung des Meßverfahrens j
- ϵ_{hij} = zufälliger Meßfehler bei Anwendung des Meßverfahrens j von Labor h an der Stelle i

ϵ_{hij} kann dabei $(0, \sigma_r)$ -normalverteilt angenommen werden. σ_r wird durch die Standardabweichung s_r unter Wiederholbedingungen geschätzt.

Werden von *einem* Labor auf einer verdichteten Fläche Messungen unter Wiederholbedingungen ausgeführt, so setzt sich die systematische Komponente des Meßfehlers aus zwei Anteilen zusammen:

1. dem laborunabhängigen, systematischen Meßfehler β_j des Meßverfahrens,
2. dem laborspezifischen Meßfehler γ_{hj} .

Für die Verteilung von $\delta = \gamma_{hj} + \epsilon_{hij}$ kann ebenfalls Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Standardabweichung σ_R angenommen werden. σ_R wird durch die in Ringanalysen ermittelte Größe s_R für die Standardabweichung unter

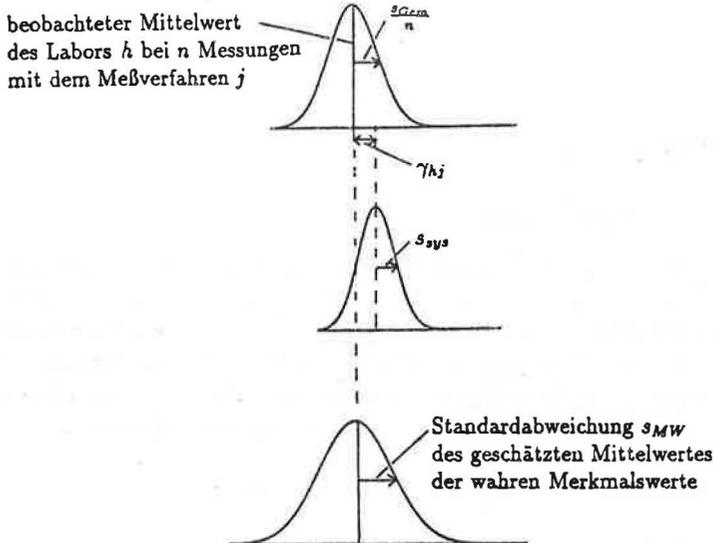


Abbildung 5.1: Komponenten der Varianz des geschätzten Mittelwertes der wahren Merkmalswerte

Vergleichbedingungen geschätzt.

Werden von *einem* Labor n Messungen unter Wiederholbedingungen ausgeführt, so ergibt sich die Standardabweichung s_{MW} des geschätzten Mittelwertes der wahren Merkmalswerte (Abbildung 5.1)

$$s_{MW} = \sqrt{\frac{s_{Gem}^2}{n} + s_{sys}^2} \quad (5.2)$$

$$s_{Gem}^2 = s_w^2 + s_r^2 \quad (5.3)$$

$$s_{sys}^2 = s_R^2 - s_r^2 \quad (5.4)$$

s_{Gem} : Standardabweichung der gemessenen Werte nach (3.14)

s_w : wahre, aber unbekante Standardabweichung der Merkmalswerte

s_{sys} : Standardabweichung des laborspezifischen, systematischen Meßfehlers γ_{hj}

Die Standardabweichung s_{MW} ist also durch eine Erhöhung des Stichprobenumfanges n nur bedingt reduzierbar.

5.2 Ermittlung des Prüffehlers bei Dichtemessungen durch eine Ringanalyse

Von der Bundesanstalt für Straßenwesen wurde die erste Ringanalyse für die nicht-zerstörungsfreien Dichtemeßverfahren, Ballon- und Sandersatzverfahren (DIN 18125) und für eine Isotopeneinstichsonde (Modell Troxler) auf einem Sand-Kies Gemisch durchgeführt. In einer zweiten Meßserie auf einem Schluff wurde als viertes Meßverfahren der Ausstechzylinder miteinbezogen. Die Ermittlung der Wiederholstreuungen erfolgte mit Hilfe des Grubbschen Modells (GRUBBS (1948)), für die Ermittlung der Vergleichstreuungen wurde von DEUTLER (1987) ein gemischtes, drei-faktorielles, partiell hierarchisches, varianzheterogenes Varianzanalyse-Modell für den balancierten und den nicht balancierten Fall entwickelt.

Die errechneten Wiederhol- und Vergleichpräzisionen ergeben sich aus den Tabellen 5.1 und 5.2 (BEHR (1988)).

	Sand-Kies		Schluff	
	$\sigma_r[\frac{g}{cm^3}]$	$\sigma_R[\frac{g}{cm^3}]$	$\sigma_r[\frac{g}{cm^3}]$	$\sigma_R[\frac{g}{cm^3}]$
Ausstechzylinder	—	—	0.017	0.023
Ballonverfahren	0.012	0.015	0.017	0.020
Sandersatzverfahren	0.020	0.025	0.021	0.031
Isotopensonde	0.016	0.024	0.021	0.028

Tabelle 5.1: Wiederhol- und Vergleichpräzisionen bei der Bestimmung der Feuchtdichte

	Schluff	
	$\sigma_r[\frac{g}{cm^3}]$	$\sigma_R[\frac{g}{cm^3}]$
Ausstechzylinder	0.015	0.021
Ballonverfahren	0.015	0.018
Sandersatzverfahren	0.018	0.027
Isotopensonde	0.020	0.028

Tabelle 5.2: Wiederhol- und Vergleichpräzisionen bei der Bestimmung der Trockendichte

5.3 Ermittlung des Prüffehlers bei Dichtemessungen mit Hilfe der Zeitreihenanalyse

Mit Hilfe der Zeitreihenanalyse ist die Möglichkeit gegeben, einen Schätzwert für die Standardabweichung σ_r bei Dichtemessungen unter Wiederholbedingungen zu ermitteln. Außerdem kann der Anteil der Varianz des Meßfehlers an der Gesamtvarianz der Merkmalswerte erhalten werden. Damit kann die Brauchbarkeit des Meßverfahrens bezüglich des zufälligen Fehlers beurteilt werden.

In ALBER,REITMEIER (1986) wurde gezeigt, daß für den Verlauf von Bodenkennwerten ein ARIMA(1,1,1)-Prozeß (vgl. BOX,JENKINS (1970)) angenommen werden kann. Dieser Prozeß ist auf Bodenkennwerte von natürlichen und geschütteten, bindigen und nicht-bindigen Böden anwendbar.

In Box/Jenkins-Schreibweise läßt sich ein ARIMA(1,1,1)-Prozeß nach Gleichung (5.5) darstellen.

$$(1 - B)(1 - \Phi B)z_t = (1 - \Theta B)a_t \quad (5.5)$$

mit

- Φ = autoregressiver (AR)-Parameter
- Θ = moving average (MA)-Parameter
- B = Differenzenoperator
- a_t = zufällige Störung, die an der Stelle t auf den Prozeß einwirkt und die $(0, \sigma_a)$ -normalverteilt angenommen werden kann
- z_t = Merkmalswert an der Stelle t

Bei einer Reihenmessung sind der zufällige Meßfehler ϵ (vgl. Gleichung (5.1)) und die zufällige Störung a_t überlagert. Zur Ermittlung von σ_ϵ müssen beide voneinander getrennt werden.

Für ein ARIMA(1,1,1)-Modell gilt (vgl. auch WU/EL-JANDALI (1985)):

$$\sigma_{Gem}^2 = \Phi_1 C_1 + \left(1 - \frac{\Theta_1}{\Phi_1 - \Theta_1}\right) \sigma_a^2 + \sigma_\epsilon^2 \quad (5.6)$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_a^2 + 2\sigma_\epsilon^2 \quad (5.7)$$

mit

- σ_N^2 = Varianz der Residuals
- C_1 = Autokovarianz zum Abstand (lag) 1
- σ_ϵ^2 = Varianz des Meßfehlers

Der prozentuale Anteil R_ϵ der Varianz des Meßfehlers σ_ϵ^2 an der Gesamtvarianz σ_{Gem}^2 ergibt sich zu

$$R_\epsilon = \frac{\sigma_\epsilon^2}{\sigma_{Gem}^2} * 100 \quad (5.8)$$

Aus einer Zeitreihe mit n Messungen im konstanten Abstand t können Maximum-Likelihoodschätzer für die Parameter Φ und Θ gewonnen und die Varianz σ_{Gem}^2 , die Autokovarianz C_1 und die Residualvarianz σ_N^2 geschätzt werden. Dies wurde mit Hilfe des Statistikprogrammes BMDP2T (BMDP (1981)) durchgeführt. Aus den zwei Gleichungen (5.6) und (5.7) läßt sich σ_a und die gesuchte Standardabweichung σ_e berechnen.

Graphisch läßt sich $\frac{\sigma_e^2}{\sigma_{Gem}^2}$ aus der extrapolierten Autokorrelationsfunktion zum Lag 0 ermitteln (Abbildung 5.2) (BAECHER (1982) zitiert in WU/EL-JANDALI (1985)). In Tabelle 5.3 sind die erhaltenen Ergebnisse von vier

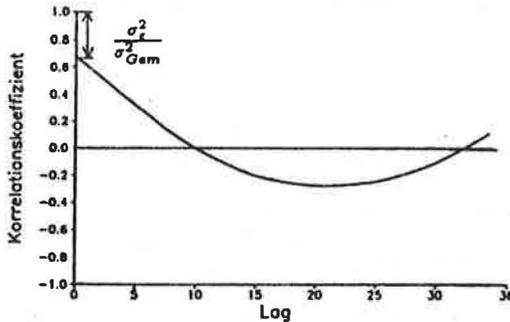


Abbildung 5.2: σ_e aus der Autokorrelationsfunktion

Meßreihen der Feuchtdichten aus ALBER,REITMEIER (1986) und von vier eigenen Meßreihen auf schluffigem Kies, Sand, schluffigem Sand und tonigem Schluff enthalten. Tabelle 5.4 enthält die Ergebnisse für die Trockendichte aus den gleichen Meßreihen. Ferner sind die verwendeten Dichtemeßverfahren, die Stichprobenanzahl n , die geschätzten Prozeßparameter, die Bodenart, und die Größe R_e in den Tabellen verzeichnet.

In den Tabellen 5.3 und 5.4 bedeuten:

- l : Abstand der Meßpunkte
- A : Ausstechzylinder
- T : Isotopeneinstichsonde (Modell Troxler)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	σ_z	σ_R	Φ_1	Θ_1	n	σ_A	σ_e	R_e	l		
	$[\frac{g}{cm^3}]$	$[\frac{g}{cm^3}]$				$[\frac{g}{cm^3}]$	$[\frac{g}{cm^3}]$	[%]	[m]		p_i
1	0.0372	0.0258	0.5900	0.9100	91	0.0118	0.0162	19.04	1.25	A	0.540
2	0.0427	0.0276	0.5278	0.8951	70	0.0158	0.0160	14.06	2.50	A	0.478
3	0.0420	0.0363	0.5641	0.9853	96	0.0142	0.0236	31.60	1.00	A	0.013
4	0.0378	0.0322	0.3198	0.8183	49	0.0177	0.0190	25.26	0.50	T	0.658
5	0.0776	0.0540	0.3354	0.7413	110	0.0369	0.0279	12.94	1.25	T	3.571
6	0.0320	0.0297	0.3406	0.9730	100	0.0150	0.0181	32.07	1.25	T	0.025
7	0.0396	0.0333	0.5310	0.9906	98	0.0156	0.0212	28.58	1.25	T	0.005
8	0.0370	0.0388	0.4161	0.9799	90	0.0160	0.0211	32.44	1.25	T	0.015

Tabelle 5.3: Ergebnisse für die Feuchtdichte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	σ_z	σ_R	Φ_1	Θ_1	n	σ_A	σ_e	R_e	l		
	$[\frac{g}{cm^3}]$	$[\frac{g}{cm^3}]$				$[\frac{g}{cm^3}]$	$[\frac{g}{cm^3}]$	[%]	[m]		p_i
1	0.0601	0.0343	0.6000	0.8600	91	0.0184	0.0205	11.56	1.25	A	1.512
2	0.0694	0.0360	0.5069	0.8288	70	0.0262	0.0174	6.31	2.50	A	1.361
3	0.0400	0.0333	0.5656	0.9893	96	0.0138	0.0214	28.70	1.00	A	0.007
4	0.0406	0.0322	0.3251	0.7538	49	0.0188	0.0185	20.76	0.50	T	1.368
5	0.1059	0.0696	0.5412	0.8245	110	0.0353	0.0424	16.04	1.25	T	2.545
6	0.0260	0.0248	0.3153	0.9759	100	0.0123	0.0152	34.05	1.25	T	0.019
7	0.0317	0.0294	0.2479	0.8898	98	0.0159	0.0175	30.47	1.25	T	0.372
8	0.0364	0.0338	0.2264	0.8195	90	0.0183	0.0200	30.54	1.25	T	0.096

Tabelle 5.4: Ergebnisse für die Trockendichte

Bodenarten:

- Zeile 1 : Ton
- Zeile 2 : Ton
- Zeile 3 : Sand
- Zeile 4 : Kies
- Zeile 5 : schluffiger Kies
- Zeile 6 : Sand
- Zeile 7 : schluffiger Sand
- Zeile 8 : toniger Schluff

Die Meßreihen 1 und 2 wurden in einer Tongrube, also auf natürlichem Boden durchgeführt. Die Meßreihe 5 erfolgte auf anstehendem, verdichtetem Boden. Alle weiteren Meßreihen wurden auf geschüttetem Boden durchgeführt.

Aus den Tabellen ist ersichtlich, daß der Anteil des Meßfehlers an der Ge-

samtvarianz bis zu 30% betragen kann. Das Meßverfahren ist damit nach STANGE (1971) nur bedingt für die Messung des Merkmals geeignet.

5.4 Wiederhol- und Vergleichpräzision beim Proctorversuch

Die Proctordichte (DIN 18127) stellt die Bezugsdichte bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades dar. Die in einer Ringanalyse (PAULMANN (1980)) für die Proctordichte erhaltenen Wiederhol- und Vergleichstreuungen sind in Tabelle 5.5 in Abhängigkeit von der Bodenart dargestellt.

Boden	Ausführungsart	s_r [$\frac{g}{cm^3}$]	s_R [$\frac{g}{cm^3}$]	Anzahl der beteiligten Labors	
1	TA	Hand	0.00751	0.03882	15
2a	UL	Hand	0.00822	0.01948	14
2b	UL	Maschine	0.00573	0.02138	8
3	SÜ	Hand	0.00455	0.01473	16
4	SE	Hand	0.00858	0.02321	15
5a	0/32 GW	Hand	0.00486	0.02355	8
5b	0/32 GW	Maschine	0.00582	0.01535	8

Tabelle 5.5: Schätzwerte für die Wiederhol- und Vergleichpräzision bei der Bestimmung der Proctordichte

5.5 Wiederhol- und Vergleichpräzision bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades

Der Verdichtungsgrad D_{Pr} ist definiert zu

$$D_{Pr}[\%] = \frac{\rho_d}{\rho_{Pr}} * 100 \quad (5.9)$$

ρ_d = Trockendichte im Feld

ρ_{Pr} = Proctordichte des Bodens

Die Größen ρ_d und ρ_{Pr} sind mit einem systematischen und einem zufälligen Fehler behaftet und können gemäß Gleichung (5.1) in verschiedene Komponenten zerlegt werden.

Die Proctordichte ρ_{Pr} ist eine Funktion der Kornverteilung. Die Trockendichte ρ_d im Feld ist dagegen im wesentlichen von der eingetragenen Verdichtungsleistung abhängig. Eine Korrelation zwischen ρ_{Pr} und ρ_d ist deshalb kaum vorhanden.

Die Meßfehler bei der Bestimmung der Trockendichte und der Proctordichte sind ebenfalls nicht miteinander korreliert.

Der zufällige Fehler $s_{D_{Pr}}$ des Verdichtungsgrades D_{Pr} kann dann mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (LUDWIG (1969)) zu

$$s_{D_{Pr}} = \sqrt{\left(\frac{100}{\rho_{Pr}} s_d\right)^2 + \left(\frac{\rho_d 100}{\rho_{Pr}^2} s_{Pr}\right)^2} \quad (5.10)$$

errechnet werden. Durch Einsetzen der Schätzwerte s_r (s_R) aus den jeweiligen Ringanalysen für s_d und s_{Pr} erhält man die Standardabweichung $s_{D_{Pr,r}}$ und $s_{D_{Pr,R}}$ des Verdichtungsgrades unter Wiederhol- und Vergleichbedingungen.

Die Tabellen 5.6 und 5.7 enthalten die Werte $s_{D_{Pr,r}}$ und $s_{D_{Pr,R}}$ in Abhängigkeit der absoluten Größen ρ_d und ρ_{Pr} . Die Wiederholstandardabweichung des Verdichtungsgrades kann unabhängig von der Bodenart, des Meßverfahrens und der absoluten Größe des Verdichtungsgrades im Mittel zu 1.0 % Verdichtungsgrad angenommen werden. Eine genauere Aufschlüsselung nach einzelnen Meßverfahren ist nicht sinnvoll, da die Schätzwerte s_r und s_R jeweils für σ_d und σ_{Pr} selbst Zufallsvariablen sind, die einer Verteilung unterliegen (vgl. MANDEL/LASHOF (1987)). Eine Erhöhung der Genauigkeit der Schätzungen für σ_d und σ_{Pr} läßt sich nur durch eine höhere Anzahl der beteiligten Prüfinstitute an den Ringanalysen erreichen.

Die Standardabweichung s_{sys} des laborspezifischen, systematischen Meßfehlers ergibt sich zu

$$s_{sys} = \sqrt{s_R^2 - s_r^2} \quad (5.11)$$

	Kiessand		Schluff	
	$\rho_{Pr} = 2.2 \frac{g}{cm^3}$		$\rho_{Pr} = 1.8 \frac{g}{cm^3}$	
	$s_{Pr} = 0.0058 \frac{g}{cm^3}$		$s_{Pr} = 0.0082 \frac{g}{cm^3}$	
	$\rho_d = 0.95\rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03\rho_{Pr}$		$\rho_d = 0.95\rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03\rho_{Pr}$	
Ausstech.	—	—	0.94	0.96
Ballonver.	0.60	0.61	0.94	0.96
Sanders.	0.94	0.95	1.09	1.11
Isotopen.	0.77	0.78	1.19	1.21

Tabelle 5.6: Schätzwerte für die Wiederholstreuungen bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades in %-Verdichtungsgrad

	Kiessand		Schluff	
	$\rho_{Pr} = 2.2 \frac{g}{cm^3}$		$\rho_{Pr} = 1.8 \frac{g}{cm^3}$	
	$s_{Pr} = 0.0058 \frac{g}{cm^3}$		$s_{Pr} = 0.0082 \frac{g}{cm^3}$	
	$\rho_d = 0.95\rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03\rho_{Pr}$		$\rho_d = 0.95\rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03\rho_{Pr}$	
Ausstech.	—	—	1.61	1.67
Ballonver.	0.95	0.99	1.49	1.56
Sanders.	1.32	1.34	1.87	1.92
Isotopen.	1.28	1.31	1.91	1.97

Tabelle 5.7: Schätzwerte für die Vergleichstreuungen bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades in %-Verdichtungsgrad

und kann aus Tabelle 5.8 entnommen werden. Die Zahlenwerte für ρ_d und ρ_{Pr} sowie s_d und s_{Pr} liegen jeweils in der gleichen Größenordnung. Werden nun ρ_d und ρ_{Pr} als Fixwerte aufgefaßt, so kann für die Verteilung des zufälligen Fehlers $\epsilon_{D_{Pr}}$ des Verdichtungsgrades in guter Näherung Normalverteilung unterstellt werden. Die Überprüfung dieser Annahme erfolgt durch Berechnung der Verteilung des Quotienten zweier normalverteilter Zufallsvariablen. Da die zufälligen Fehler s_d und s_{Pr} nicht miteinander korreliert sind und $\rho_{Pr} > 0$ immer gilt, lautet die Verteilungsfunktion von D_{Pr} in erster Näherung (vgl. HINKLEY (1969))

$$F_H(D_{Pr}) = \Phi \left(\frac{\rho_{Pr} D_{Pr} - \rho_d 100}{100 s_d s_{Pr} a(D_{Pr})} \right) \quad (5.12)$$

mit

$$a(D_{Pr}) = \sqrt{\left(\frac{D_{Pr}}{s_d 100} \right)^2 + \frac{1}{s_{Pr}^2}} \quad (5.13)$$

	Kiessand		Schluff	
	$\rho_{Pr} = 2.2 \frac{g}{cm^3}$ $s_{Pr} = 0.0058 \frac{g}{cm^3}$ $\rho_d = 0.95 \rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03 \rho_{Pr}$		$\rho_{Pr} = 1.8 \frac{g}{cm^3}$ $s_{Pr} = 0.0082 \frac{g}{cm^3}$ $\rho_d = 0.95 \rho_{Pr} \quad \rho_d = 1.03 \rho_{Pr}$	
Ausstech.	—	—	1.31	1.37
Ballonver.	0.74	0.78	1.16	1.23
Sanders.	0.93	0.95	1.52	1.57
Isotopen.	1.02	1.05	1.49	1.55

Tabelle 5.8: Schätzwerte für die Standardabweichung des laborspezifischen, systematischen Fehlers bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades

Nach Umformung von (5.12) und (5.13) ergibt sich

$$F_H(D_{Pr}) = \Phi \left(\frac{D_{Pr} - \frac{\rho_d}{\rho_{Pr}} 100}{\sqrt{\left(\frac{s_d 100}{\rho_{Pr}}\right)^2 + \left(D_{Pr} \frac{s_{Pr}}{\rho_{Pr}}\right)^2}} \right) \quad (5.14)$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet die Verteilungsfunktion von D_{Pr}

$$F_F(D_{Pr}) = \Phi \left(\frac{D_{Pr} - \frac{\rho_d}{\rho_{Pr}} 100}{s_{D_{Pr}}} \right) \quad (5.15)$$

Mit $s_{D_{Pr}}$ nach (5.10) und einigen Umformungen erhält man

$$F_F(D_{Pr}) = \Phi \left(\frac{D_{Pr} - \frac{\rho_d}{\rho_{Pr}} 100}{\sqrt{\left(\frac{s_d 100}{\rho_{Pr}}\right)^2 + \left(\frac{\rho_d 100 s_{Pr}}{\rho_{Pr} \rho_{Pr}}\right)^2}} \right) \quad (5.16)$$

Die Unterschied zwischen (5.14) und (5.16) im zweiten Summanden des Nenners ist bei praxisrelevanten Größenordnungen für ρ_d und ρ_{Pr} vernachlässigbar, die obige Annahme einer Normalverteilung für den zufälligen Fehler $\epsilon_{D_{Pr}}$ ist damit berechtigt.

6 Anordnung der Versuchspunkte

6.1 Allgemeines

Die Autokorrelation der Merkmalswerte kann im Erdbau einen Einfluß auf die Varianz eines geschätzten Mittelwertes haben. Allerdings ist dieser Einfluß bei Fragen der Qualitätskontrolle mittels des Verdichtungsgrades wesentlich weniger entscheidend als zum Beispiel bei Fragestellungen der Varianzreduktion bei Böschungen und Fundamenten. Bei letzteren ist immer die Autokorrelationsstruktur der *wahren* Bodenkenwerte für die Berechnung einer Versagenswahrscheinlichkeit von Bedeutung. Diese kann jedoch nicht festgestellt werden, da jedes Meßverfahren immer mit einem Meßfehler behaftet ist. Die *wahre* Autokorrelation wird also immer wegen des Meßfehlers unterschätzt. Der Meßfehler wirkt sich als „white noise“-Prozeß aus, der dem wahren Verlauf des Merkmals überlagert ist.

Bei Fragestellungen in der Qualitätskontrolle ist jedoch die Autokorrelation der *gemessenen*, also mit einem Prüffehler behafteten Werte zu beachten. Die Varianz des Prüffehlers bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades kann aber bis zu 30 % der Varianz der Grundgesamtheit betragen (vgl. Abschnitt 5). Die Autokorrelation der gemessenen Werte ist deshalb nicht sehr ausgeprägt und von untergeordneter Bedeutung (vgl. Abbildung 6.1).

Da in einem geschütteten Los im Normalfall keine linearen oder periodischen Trends auftreten, kann durch eine rasterförmige Anordnung der Versuchspunkte die wirksamste Schätzung des Mittelwertes erhalten werden. Der Beginn des Rasters wird dabei zufällig gewählt.

6.2 Anhaltswerte für den Probenabstand mit Hilfe des ARIMA-Modells

In Abbildung 6.1 sind die Autokorrelationsfunktionen der Trockendichte der Meßreihen 5 ÷ 8 aus Tabelle 5.4 enthalten. Nach ALBER (1987) kann der einem Bodenkenwert unterliegende ARIMA(1,1,1)-Prozeß in einen stationären und einen instationären Anteil aufgespalten werden. Eine Autokorrelation der Meßwerte über den stationären Prozeßanteil wird vermieden, wenn die Versuche weiter als ca. 15 Meter auseinanderliegend ausgeführt werden.

Beim Verdichtungsgrad ist der instationäre Prozeßanteil in der Regel nicht

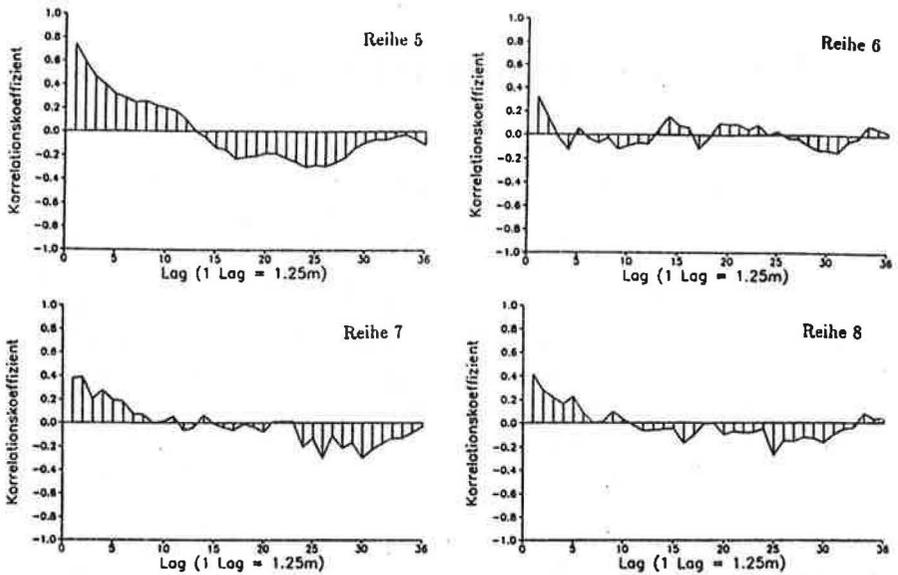


Abbildung 6.1: Empirische Autokorrelationsfunktionen von vier Trockendichte-
temeßreihen

sehr ausgeprägt. Der Parameter p_l stellt das Verhältnis der Varianz des Mittelwertprozesses zur Varianz des AR(1)-Anteiles dar.

$$p_l = \frac{\text{Var}[\text{Mittelwertprozeß}]}{\text{Var}[\text{AR}(1) - \text{Prozeß}]} \quad (6.1)$$

Aus Tabelle 5.3 und 5.4 sind geschätzten Werte p_l für die einzelnen Meßreihen abzulesen. Diese sind für geschüttete Böden sehr klein. Eine Autokorrelation über den Mittelwertanteil kann deshalb vernachlässigt werden. Dies läßt sich auch aus den empirischen Autokorrelationsfunktionen in Abbildung 6.1 ersehen.

Für die Stichprobenentnahme ist es damit ausreichend, wenn der Rasterabstand mindestens 15 Meter beträgt.

7 Anwendung des dargelegten Überwachungskonzeptes

7.1 Die Anforderung unter Einbeziehung des Prüffehlers

Die Varianz der *gemessenen* Merkmalswerte im Prüflös setzt sich nach Gleichung (5.3) aus der Varianz der *wahren* Merkmalswerte und der Varianz des zufälligen Prüffehlers (Wiederholstreuung) zusammen. Wird für die *gemessenen* Merkmalswerte eine 10%-Fraktile bezüglich eines Grenzwertes T_u gefordert, also

$$p_{Gem} = 10\% = \Phi\left(\frac{T_u - \mu}{\sigma_{Gem}}\right) \quad (7.1)$$

so ergeben sich die Schlechtanteile der *wahren* Merkmalswerte zu

$$p_{w,\gamma_{h,j}=0} = \Phi\left(\frac{V_o}{\sigma_w}\right) \quad (7.2)$$

mit

$$T_u - \mu = V_o \quad (7.3)$$

V_o : Vorhaltemaß

$\gamma_{h,j}$: laborspezifischer, systematischer Meßfehler

Tabelle 7.1 enthält für eine Wiederholstandardabweichung von $\sigma_r = 1\%$ (vgl. Kapitel 5) die berechneten Schlechtanteile $p_{w,\gamma}$ der *wahren* Merkmalswerte des Verdichtungsgrades in Abhängigkeit von σ_w . Dabei wurde der systematische Fehler $\gamma_{h,j}$ gleich null gesetzt. Der *wahre* Schlechtanteil liegt also zwischen 0.2% und 9.3%, wenn eine 10%-Fraktile für die gemessenen Werte gefordert wird.

In der Regel wird die Kontrolle eines Prüflöses von *einer* Prüfstelle (Labor) durchgeführt. Die erhaltenen Meßwerte sind deshalb mit einem laborspezifischen, systematischen Meßfehler $\gamma_{h,j}$ (vgl. Gleichung (5.1) und Abbildung 5.1) behaftet. Unter Einbeziehung des Meßfehlers $\gamma_{h,j}$ errechnet sich der Schlechtanteil der *wahren* Werte zu

$$p_{w,\gamma_{h,j}} = \Phi\left(\frac{T_u - \mu + \gamma_{h,j}}{\sigma_w}\right) \quad (7.4)$$

Für $\gamma_{h,j}$ wird das 1.281-fache (90%-Fraktile) der Standardabweichung des laborspezifischen, systematischen Meßfehlers s_{sys} (vgl. Gleichung (5.4))

σ_r	σ_w	σ_{Gem}	V_o	$\gamma = 0$		$\gamma = +0.95\%$	$\gamma = -0.95\%$	$\gamma = +2.01\%$	$\gamma = -2.01\%$
				p_w	p_{Gem}	p_w	p_w	p_w	p_w
1.0	0.5	1.12	1.43	0.2	10.0	0.0	16.6	0.0	87.7
1.0	1.0	1.41	1.81	3.5	10.0	0.3	19.4	0.0	57.9
1.0	1.5	1.80	2.31	6.2	10.0	1.5	18.2	0.2	42.1
1.0	2.0	2.24	2.87	7.6	10.0	2.8	16.9	0.7	33.5
1.0	2.5	2.69	3.45	8.4	10.0	3.9	15.8	1.4	28.2
1.0	3.0	3.16	4.05	8.9	10.0	4.8	15.0	2.2	24.8
1.0	3.5	3.64	4.66	9.1	10.0	5.4	14.4	2.8	22.4
1.0	4.0	4.12	5.28	9.3	10.0	6.0	13.9	3.4	20.7

Tabelle 7.1: Schlechtanteile der wahren Werte (Verdichtungsgrad) in Abhängigkeit von σ_{Gem} und $\gamma_{h,j}$

des Verdichtungsgrades nach Tabelle 5.8 angenommen. Die Berechnung der Schlechtanteile der wahren Werte erfolgt für den kleinsten Wert $s_{sys} = 0.74\%$ beim Ballonverfahren und für den größten Wert $s_{sys} = 1.57\%$ beim Sandersatzverfahren. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 7.1 enthalten. Im ungünstigsten Fall (kleine Standardabweichung σ_{Gem}) kann sich also ein Schlechtanteil von 19.4 % für die wahren Werte ergeben, obwohl bei einer Messung mit dem Ballonverfahren eine 10.0 %- Fraktile eingehalten ist. Bei einer Anwendung des Sandersatzverfahren kann dieser Anteil im ungünstigsten Fall auf 87.7 % (!) steigen. Dieser Effekt ist allein auf den systematischen Meßfehler $\gamma_{h,j}$ zurückzuführen. Einer Ausschaltung dieses Fehlers durch eine normgerechte Ausführung der Versuche kommt unter diesem Gesichtspunkt entscheidende Bedeutung zu. Allerdings treten diese hohen Schlechtanteile für die wahren Werte nur bei sehr kleinen Standardabweichungen σ_w auf. Der prozentuale Anteil der Merkmalswerte, die im sicherheitsrelevanten Bereich, also ca. 2 % Verdichtungsgrad unterhalb des Grenzwertes T_u liegen, ist deshalb relativ klein.

Eine Verkleinerung der zu fordernden Fraktile aus Sicherheitsgründen ist jedoch nicht sinnvoll, da sonst ein so großes Vorhaltemaß V_o bei $\gamma_{h,j} = 0$ eingehalten werden müßte, das technisch nicht mehr ausführbar ist. Die Forderung einer 10%-Fraktile als Gutgrenze stellt also unter Berücksichtigung der Wiederholstreuung σ_r und des systematischen Meßfehlers $\gamma_{h,j}$ einen akzeptablen Kompromiß dar.

7.2 Parameter der Stichprobenprüfpläne

In Kapitel 3 wurden die theoretischen Grundlagen für die verschiedenen Prüfplanarten dargelegt. Tabelle 7.2 enthält die berechneten Prüfplanparameter. Dabei wurde ein AQL-Wert von $p_1 = 10\%$ zugrunde gelegt. Die

Parameter wurden so ermittelt, daß die Operationscharakteristik durch die Punkte $P_1(p_1 = 10.0\%; 1 - \alpha)$ und $P_2(p_2 = 25.0\%; \beta)$ verläuft.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	l	α	β	n_s	k_s	n_{σ}	k_{σ}	n_A	c_A	$n_{D,\sigma}$	$k_{A,\sigma}$	$k_{D,\sigma}$	$k_{R,\sigma}$	$n_{D,s}$	$k_{A,s}$	$k_{D,s}$	$k_{R,s}$
m^2	m	[%]	[%]														
1000	50	21.7	41.7	4	0.88	3	0.830	7	1	2	1.35	0.96	0.55	2	2.61	1.02	0.58
1500	100	19.9	39.3	5	0.88	3	0.793	8	1	2	1.33	0.96	0.59	3	2.41	1.02	0.60
2000	150	18.2	37.3	6	0.88	4	0.827	8	1	3	1.32	0.96	0.59	3	2.27	1.02	0.62
2500	200	16.7	35.7	7	0.88	5	0.849	8	1	3	1.31	0.96	0.60	4	2.18	1.01	0.62
3000	250	15.3	43.2	8	0.88	6	0.864	13	2	3	1.31	0.98	0.61	4	2.08	1.01	0.63
3500	300	14.1	32.9	9	0.88	6	0.842	13	2	4	1.30	0.97	0.62	5	2.02	1.01	0.65
4000	350	13.0	31.7	10	0.88	7	0.855	13	2	4	1.30	0.97	0.62	5	1.96	1.01	0.65
4500	400	11.9	30.9	11	0.88	8	0.865	18	3	4	1.30	0.97	0.62	6	1.92	1.01	0.66
5000	450	11.0	29.6	12	0.88	8	0.848	18	3	5	1.30	0.97	0.63	6	1.87	1.01	0.68
5500	500	10.2	28.6	13	0.88	9	0.858	18	3	5	1.29	0.97	0.63	7	1.81	1.01	0.68
6000	550	9.4	27.7	14	0.88	10	0.866	23	4	5	1.29	0.97	0.64	7	1.79	1.01	0.68
6500	600	8.7	26.9	15	0.88	11	0.872	23	4	6	1.29	0.97	0.64	8	1.76	1.01	0.69
7000	650	8.1	26.1	16	0.88	11	0.860	24	4	6	1.29	0.98	0.65	8	1.75	1.01	0.70
7500	700	7.5	25.3	17	0.88	12	0.866	24	4	7	1.29	0.98	0.65	9	1.71	1.01	0.70
8000	750	7.0	24.6	18	0.88	13	0.872	29	5	7	1.29	0.98	0.66	9	1.68	1.01	0.70
8500	800	6.5	23.9	19	0.88	13	0.861	29	5	7	1.29	0.98	0.67	10	1.67	1.01	0.71
9000	850	6.0	23.2	20	0.88	14	0.866	29	5	8	1.29	0.98	0.68	10	1.66	1.01	0.71
9500	900	5.6	22.6	21	0.88	15	0.871	29	5	8	1.29	0.98	0.68	11	1.64	1.01	0.71
10000	950	5.2	22.0	22	0.88	16	0.875	34	6	8	1.29	0.99	0.69	11	1.62	1.01	0.71
10500	1000	4.8	21.4	23	0.88	16	0.866	34	6	9	1.29	0.99	0.69	12	1.60	1.01	0.71
11000	1050	4.5	20.9	24	0.88	17	0.870	39	7	9	1.29	0.99	0.69	12	1.58	1.01	0.72
11500	1100	4.2	20.4	25	0.88	18	0.874	39	7	9	1.30	0.99	0.70	13	1.56	1.01	0.72
12000	1150	3.9	19.8	26	0.88	18	0.866	39	7	10	1.30	0.99	0.70	13	1.54	1.01	0.71
12500	1200	3.6	19.3	27	0.88	19	0.870	44	8	10	1.29	0.99	0.70	14	1.53	1.01	0.71
13000	1250	3.4	18.9	28	0.88	20	0.873	44	8	11	1.29	0.99	0.70	14	1.52	1.01	0.71
13500	1300	3.2	18.4	29	0.88	21	0.876	49	9	11	1.28	0.99	0.70	15	1.51	1.01	0.71

Tabelle 7.2: Parameter verschiedener Prüfpläne in Abhängigkeit von α und β

In Tabelle 7.2 bedeuten:

Spalte	
1	: angenommene Quadratmeterzahl des Prüfloses
2	: angenommene Länge des Prüfloses bei Leitungsgräben
3,4	: Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β für $p_1 = 10.0\%$ und $p_2 = 25.0\%$
5,6	: Stichprobenumfang n_s nach (3.29) und Annahmefaktor k_s nach (3.28) eines Einfachstichprobenplanes mit unbekannter Standardabweichung
7,8	: Stichprobenumfang n_σ nach (3.11) und Annahmefaktor k_σ nach (3.12) eines Einfachstichprobenplanes mit bekannter Standardabweichung
9,10	: Stichprobenumfang n_A und Annahmezahl c_A eines Attributprüfplanes
11,12,13,14	: Stichprobenumfang $n_{D,\sigma}$, Annahmefaktor $k_{A,\sigma}$, Rückweisefaktor $k_{R,\sigma}$ und $k_{D,\sigma}$ eines doppelten Stichprobenprüfplanes für Variablenprüfung mit bekannter Standardabweichung
15,16,17,18	: Stichprobenumfang $n_{D,s}$, Annahmefaktor $k_{A,s}$, Rückweisefaktor $k_{R,s}$ und $k_{D,s}$ eines doppelten Stichprobenprüfplanes für Variablenprüfung mit unbekannter Standardabweichung

Abbildung 7.1 zeigt die Abnahme der Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β in Abhängigkeit des Stichprobenumfanges eines Einfachstichprobenplanes mit unbekannter Standardabweichung.

Aus Tabelle 7.3 sind die Hilfsgrößen h_2 und h_3 nach (3.49) und (3.50) für Variablenfolgepläne mit bekannter Standardabweichung und die Hilfsgrößen A und B für Attributfolgeprüfpläne zu entnehmen.

In Abbildung 7.2 ist der Erwartungswert $E(n)$ des Stichprobenumfanges für Variablenfolgeprüfpläne mit bekannter Standardabweichung nach Gleichung (3.53) in Abhängigkeit des Schlechtanteiles p aufgetragen.

Die Tabellen 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 und 7.9 enthalten die Annahmefaktoren $G_{A,s}$ und die Rückweisefaktoren $G_{R,s}$ nach (3.58) und (3.59) von Variablenfolgeprüfplänen mit unbekannter Standardabweichung für $l = 4 \dots 33$.

Aus den Tabellen 7.10 und 7.11 kann der Stichprobenumfang und der Annahmefaktor von Schwachstellenprüfplänen in Abhängigkeit der Irrtumswahrscheinlichkeiten und des Faktors m entnommen werden.

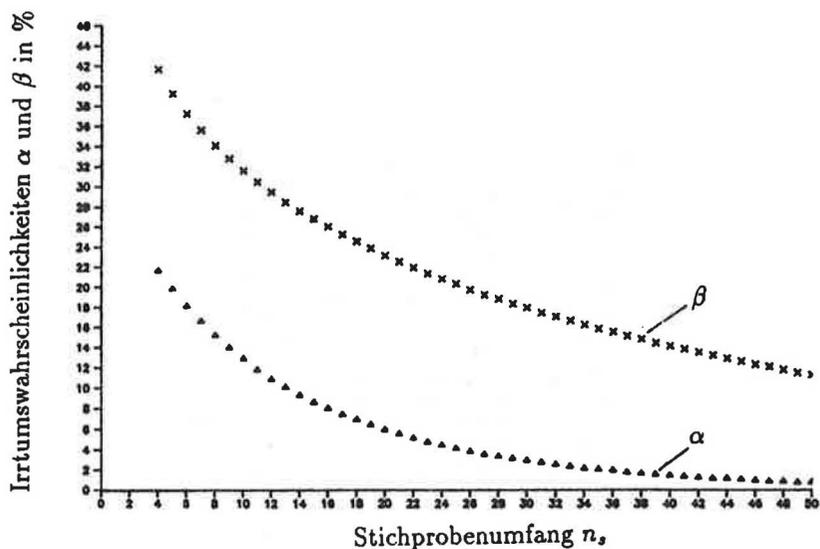


Abbildung 7.1: Irrtumswahrscheinlichkeiten von einfachen Stichprobenprüfplänen mit unbekannter Standardabweichung als Funktion von n_s , $k_s = 0.88$

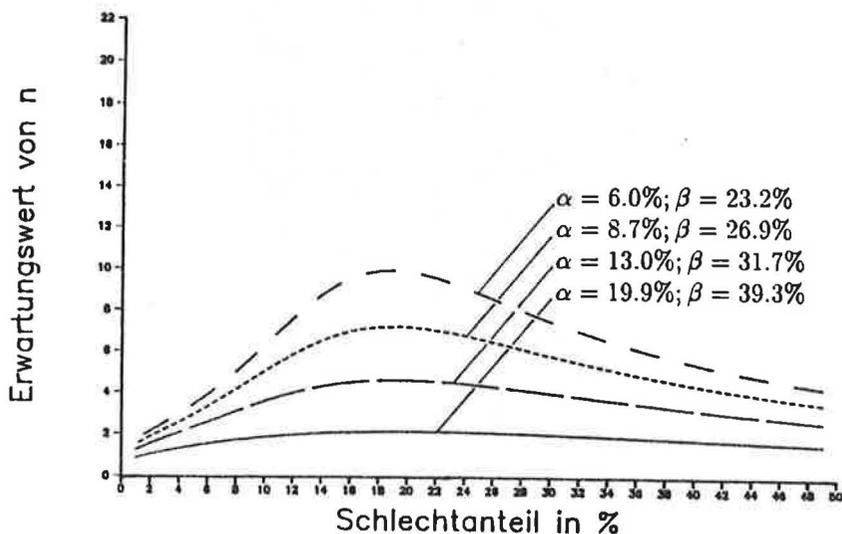


Abbildung 7.2: $E(n)$ als Funktion von p, α und β , Standardabweichung bekannt

α	β	A	B	h_2	h_3
21.7	41.7	.631	.990	-1.04	-1.63
19.9	39.3	.714	1.118	-1.18	-1.84
18.2	37.3	.785	1.238	-1.29	-2.04
16.7	35.7	.849	1.351	-1.40	-2.23
15.3	34.2	.907	1.459	-1.49	-2.40
14.1	32.9	.961	1.562	-1.58	-2.57
13.0	31.7	1.011	1.663	-1.66	-2.74
11.9	30.6	1.058	1.760	-1.74	-2.90
11.0	29.6	1.102	1.854	-1.82	-3.05
10.2	28.6	1.144	1.947	-1.88	-3.21
9.4	27.7	1.184	2.037	-1.95	-3.36
8.7	26.9	1.223	2.125	-2.01	-3.50
8.1	26.1	1.260	2.212	-2.08	-3.64
7.5	25.3	1.296	2.298	-2.13	-3.79
7.0	24.6	1.331	2.382	-2.19	-3.92
6.5	23.9	1.364	2.465	-2.25	-4.06
6.0	23.2	1.397	2.547	-2.30	-4.20
5.6	22.6	1.429	2.628	-2.35	-4.33
5.2	22.0	1.460	2.708	-2.40	-4.46
4.8	21.4	1.490	2.788	-2.45	-4.59
4.5	20.9	1.520	2.866	-2.50	-4.72
4.2	20.4	1.549	2.944	-2.55	-4.85
3.9	19.8	1.577	3.021	-2.60	-4.98
3.6	19.3	1.606	3.097	-2.64	-5.10
3.4	18.9	1.633	3.173	-2.69	-5.23
3.2	18.4	1.660	3.248	-2.73	-5.35
3.0	18.0	1.687	3.323	-2.78	-5.47
2.8	17.5	1.713	3.397	-2.82	-5.60
2.6	17.1	1.739	3.471	-2.86	-5.72
2.4	16.7	1.765	3.544	-2.91	-5.84
2.2	16.3	1.790	3.617	-2.95	-5.96
2.1	15.9	1.815	3.690	-2.99	-6.08
2.0	15.6	1.840	3.762	-3.03	-6.20
1.8	15.2	1.864	3.833	-3.07	-6.31
1.7	14.9	1.888	3.905	-3.11	-6.43
1.6	14.5	1.912	3.976	-3.15	-6.55
1.5	14.2	1.936	4.046	-3.19	-6.67
1.4	13.9	1.960	4.117	-3.23	-6.78
1.3	13.6	1.983	4.187	-3.27	-6.90
1.2	13.3	2.006	4.257	-3.30	-7.01
1.2	13.0	2.029	4.326	-3.34	-7.13
1.1	12.7	2.052	4.395	-3.38	-7.24
1.0	12.4	2.075	4.464	-3.42	-7.35
0.9	12.2	2.097	4.533	-3.45	-7.47
0.9	11.9	2.119	4.602	-3.49	-7.58
0.8	11.6	2.142	4.670	-3.53	-7.69
0.8	11.4	2.164	4.738	-3.56	-7.81
0.7	11.2	2.186	4.806	-3.60	-7.92
0.7	10.9	2.208	4.874	-3.64	-8.03
0.6	10.7	2.229	4.941	-3.67	-8.14

Tabelle 7.3: Hilfsgrößen für Variablenfolgeprüfpläne mit bekannter Standardabweichung und für Attributfolgeprüfpläne

α	β	$l = 4$	$l = 5$	$l = 6$	$l = 7$	$l = 8$	$l = 9$	$l = 10$	$l = 11$	$l = 12$	$l = 13$
21.7	41.7	1.495	1.343	1.262	1.211	1.176	1.150	1.130	1.114	1.102	1.091
19.9	39.3	1.622	1.419	1.316	1.254	1.211	1.179	1.156	1.137	1.122	1.109
18.2	37.3	1.754	1.494	1.368	1.293	1.243	1.207	1.179	1.158	1.140	1.126
16.7	35.7	1.890	1.564	1.416	1.329	1.272	1.230	1.200	1.176	1.157	1.141
15.3	34.2	2.046	1.639	1.464	1.365	1.300	1.254	1.220	1.194	1.172	1.155
14.1	32.9	2.214	1.710	1.510	1.398	1.327	1.276	1.239	1.210	1.187	1.168
13.0	31.7	2.406	1.785	1.556	1.430	1.352	1.298	1.257	1.225	1.200	1.180
11.9	30.6	2.641	1.865	1.602	1.464	1.378	1.318	1.275	1.241	1.214	1.192
11.0	29.6	2.907	1.943	1.647	1.496	1.402	1.338	1.291	1.255	1.226	1.203
10.2	28.6	3.264	2.032	1.695	1.528	1.427	1.358	1.307	1.269	1.239	1.214
9.4	27.7	3.754	2.125	1.744	1.561	1.451	1.377	1.323	1.283	1.251	1.225
8.7	26.9	4.435	2.217	1.789	1.591	1.472	1.395	1.338	1.296	1.262	1.235
8.1	26.1	5.637	2.325	1.836	1.623	1.496	1.413	1.353	1.308	1.273	1.245
7.5	25.3	9.136	2.438	1.890	1.656	1.520	1.432	1.369	1.322	1.285	1.255
7.0	24.6		2.556	1.941	1.687	1.543	1.449	1.383	1.334	1.295	1.264
6.5	23.9		2.705	1.996	1.720	1.567	1.468	1.398	1.347	1.306	1.274
6.0	23.2		2.869	2.054	1.756	1.591	1.487	1.414	1.360	1.317	1.284
5.6	22.6		3.035	2.109	1.787	1.613	1.504	1.428	1.372	1.327	1.293
5.2	22.0		3.228	2.168	1.821	1.638	1.521	1.442	1.383	1.338	1.302
4.8	21.4		3.490	2.238	1.856	1.662	1.539	1.457	1.395	1.348	1.311
4.5	20.9		3.756	2.299	1.888	1.683	1.555	1.470	1.406	1.357	1.320
4.2	20.4		4.074	2.365	1.923	1.704	1.573	1.484	1.417	1.367	1.328
3.9	19.8		4.645	2.452	1.968	1.733	1.594	1.499	1.431	1.379	1.338
3.6	19.3		5.256	2.534	2.006	1.760	1.612	1.514	1.443	1.389	1.347
3.4	18.9		6.103	2.604	2.038	1.781	1.628	1.526	1.452	1.398	1.354
3.2	18.4		7.958	2.699	2.083	1.807	1.647	1.542	1.465	1.408	1.363
3.0	18.0			2.796	2.119	1.831	1.663	1.555	1.475	1.417	1.371
2.8	17.5			2.912	2.164	1.859	1.685	1.570	1.489	1.428	1.380
2.6	17.1			3.029	2.210	1.885	1.703	1.584	1.501	1.438	1.389
2.4	16.7			3.146	2.259	1.911	1.722	1.599	1.512	1.448	1.397
2.2	16.3			3.307	2.310	1.939	1.742	1.614	1.525	1.458	1.406
2.1	15.9			3.486	2.361	1.967	1.763	1.629	1.537	1.468	1.414
2.0	15.6			3.625	2.406	1.994	1.779	1.641	1.546	1.476	1.421
1.8	15.2			3.849	2.465	2.028	1.802	1.658	1.560	1.487	1.430
1.7	14.9			4.087	2.514	2.054	1.820	1.671	1.570	1.496	1.438
1.6	14.5			4.397	2.583	2.091	1.842	1.689	1.584	1.507	1.448
1.5	14.2			4.742	2.639	2.121	1.861	1.703	1.595	1.516	1.456
1.4	13.9			5.158	2.711	2.152	1.881	1.718	1.607	1.525	1.464
1.3	13.6			5.758	2.781	2.185	1.903	1.733	1.619	1.535	1.474
1.2	13.3			6.559	2.858	2.222	1.925	1.749	1.631	1.545	1.482
1.2	13.0			7.868	2.939	2.258	1.947	1.765	1.642	1.556	1.490
1.1	12.7			10.766	3.032	2.290	1.971	1.782	1.656	1.567	1.499
1.0	12.4				3.149	2.334	1.993	1.798	1.670	1.580	1.508
.9	12.2				3.222	2.365	2.011	1.811	1.680	1.587	1.515
.9	11.9				3.338	2.411	2.039	1.831	1.695	1.598	1.526
.8	11.6				3.479	2.466	2.070	1.852	1.713	1.610	1.537
.8	11.4				3.574	2.501	2.090	1.866	1.723	1.619	1.542

Tabelle 7.4: Annahmehzahlen $G_{A,l}$ für $l = 4 \dots 13$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$l = 14$	$l = 15$	$l = 16$	$l = 17$	$l = 18$	$l = 19$	$l = 20$	$l = 21$	$l = 22$	$l = 23$
21.7	41.7	1.082	1.074	1.068	1.062	1.057	1.052	1.048	1.045	1.041	1.038
19.9	39.3	1.099	1.090	1.082	1.075	1.069	1.064	1.059	1.055	1.051	1.048
18.2	37.3	1.114	1.104	1.095	1.088	1.081	1.075	1.070	1.065	1.061	1.057
16.7	35.7	1.127	1.116	1.106	1.098	1.091	1.084	1.078	1.073	1.068	1.064
15.3	34.2	1.140	1.128	1.117	1.108	1.100	1.093	1.087	1.081	1.076	1.071
14.1	32.9	1.152	1.139	1.127	1.117	1.109	1.101	1.094	1.088	1.082	1.077
13.0	31.7	1.163	1.149	1.137	1.126	1.117	1.109	1.101	1.095	1.089	1.084
11.9	30.6	1.174	1.159	1.146	1.134	1.125	1.116	1.108	1.101	1.095	1.089
11.0	29.6	1.184	1.168	1.154	1.142	1.132	1.123	1.115	1.107	1.101	1.095
10.2	28.6	1.194	1.177	1.163	1.150	1.139	1.129	1.121	1.113	1.106	1.100
9.4	27.7	1.203	1.186	1.171	1.158	1.146	1.136	1.127	1.119	1.112	1.105
8.7	26.9	1.213	1.194	1.178	1.164	1.152	1.142	1.133	1.124	1.117	1.110
8.1	26.1	1.222	1.202	1.185	1.171	1.159	1.148	1.138	1.130	1.122	1.115
7.5	25.3	1.231	1.210	1.193	1.178	1.165	1.154	1.144	1.135	1.127	1.119
7.0	24.6	1.239	1.218	1.200	1.185	1.171	1.159	1.149	1.140	1.131	1.124
6.5	23.9	1.248	1.226	1.207	1.191	1.177	1.165	1.154	1.145	1.136	1.128
6.0	23.2	1.257	1.234	1.215	1.198	1.183	1.171	1.160	1.150	1.141	1.133
5.6	22.6	1.264	1.241	1.221	1.204	1.189	1.176	1.165	1.154	1.145	1.137
5.2	22.0	1.273	1.248	1.228	1.210	1.195	1.181	1.170	1.159	1.149	1.141
4.8	21.4	1.281	1.256	1.234	1.216	1.200	1.187	1.174	1.164	1.154	1.145
4.5	20.9	1.288	1.262	1.240	1.221	1.205	1.191	1.179	1.168	1.158	1.149
4.2	20.4	1.296	1.269	1.246	1.227	1.210	1.196	1.183	1.172	1.161	1.152
3.9	19.8	1.305	1.277	1.253	1.234	1.216	1.202	1.188	1.177	1.166	1.157
3.6	19.3	1.312	1.284	1.260	1.239	1.222	1.206	1.193	1.181	1.170	1.161
3.4	18.9	1.319	1.289	1.265	1.244	1.226	1.211	1.197	1.185	1.173	1.164
3.2	18.4	1.327	1.296	1.271	1.250	1.232	1.216	1.202	1.189	1.178	1.167
3.0	18.0	1.333	1.302	1.277	1.256	1.237	1.220	1.206	1.193	1.181	1.171
2.8	17.5	1.342	1.310	1.284	1.262	1.242	1.225	1.211	1.198	1.185	1.175
2.6	17.1	1.349	1.317	1.290	1.267	1.247	1.230	1.215	1.201	1.189	1.178
2.4	16.7	1.356	1.324	1.296	1.272	1.252	1.234	1.219	1.205	1.193	1.182
2.2	16.3	1.364	1.331	1.302	1.278	1.257	1.239	1.224	1.209	1.197	1.186
2.1	15.9	1.372	1.337	1.308	1.283	1.262	1.244	1.228	1.213	1.201	1.189
2.0	15.6	1.378	1.342	1.313	1.288	1.266	1.248	1.232	1.217	1.204	1.192
1.8	15.2	1.386	1.350	1.320	1.294	1.272	1.253	1.236	1.221	1.208	1.196
1.7	14.9	1.393	1.356	1.325	1.299	1.276	1.257	1.240	1.225	1.211	1.199
1.6	14.5	1.402	1.363	1.331	1.305	1.282	1.262	1.245	1.229	1.216	1.203
1.5	14.2	1.408	1.369	1.336	1.310	1.287	1.267	1.248	1.233	1.219	1.207
1.4	13.9	1.415	1.376	1.342	1.315	1.291	1.271	1.252	1.236	1.222	1.210
1.3	13.6	1.423	1.382	1.348	1.320	1.296	1.275	1.256	1.240	1.226	1.213
1.2	13.3	1.431	1.388	1.354	1.325	1.301	1.279	1.260	1.244	1.230	1.217
1.2	13.0	1.438	1.394	1.360	1.331	1.306	1.284	1.265	1.248	1.233	1.220
1.1	12.7	1.445	1.401	1.366	1.336	1.311	1.288	1.269	1.252	1.237	1.223
1.0	12.4	1.453	1.409	1.373	1.342	1.316	1.293	1.274	1.256	1.240	1.227
.9	12.2	1.459	1.414	1.377	1.346	1.319	1.297	1.277	1.259	1.243	1.229
.9	11.9	1.467	1.422	1.384	1.352	1.325	1.302	1.281	1.263	1.247	1.233
.8	11.6	1.476	1.429	1.391	1.359	1.331	1.307	1.286	1.268	1.251	1.237
.8	11.4	1.482	1.435	1.395	1.363	1.334	1.310	1.289	1.271	1.254	1.239

Tabelle 7.5: Annahmezahlen $G_{A,l}$ für $l = 14 \dots 23$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$l = 24$	$l = 25$	$l = 26$	$l = 27$	$l = 28$	$l = 29$	$l = 30$	$l = 31$	$l = 32$	$l = 33$
21.7	41.7	1.036	1.033	1.031	1.029	1.027	1.025	1.023	1.022	1.020	1.019
19.9	39.3	1.045	1.042	1.039	1.037	1.035	1.032	1.030	1.029	1.027	1.025
18.2	37.3	1.053	1.050	1.047	1.044	1.041	1.039	1.037	1.035	1.033	1.031
16.7	35.7	1.060	1.057	1.053	1.050	1.047	1.045	1.042	1.040	1.038	1.036
15.3	34.2	1.067	1.063	1.059	1.056	1.053	1.050	1.048	1.045	1.043	1.041
14.1	32.9	1.073	1.069	1.065	1.061	1.058	1.055	1.053	1.050	1.048	1.045
13.0	31.7	1.079	1.074	1.070	1.066	1.063	1.060	1.057	1.054	1.052	1.049
11.9	30.6	1.084	1.080	1.075	1.072	1.068	1.064	1.061	1.058	1.056	1.053
11.0	29.8	1.089	1.084	1.080	1.076	1.072	1.069	1.065	1.062	1.059	1.057
10.2	28.6	1.095	1.089	1.085	1.080	1.076	1.073	1.069	1.066	1.063	1.060
9.4	27.7	1.100	1.094	1.089	1.085	1.080	1.077	1.073	1.070	1.067	1.064
8.7	26.9	1.104	1.098	1.093	1.088	1.084	1.080	1.076	1.073	1.070	1.067
8.1	26.1	1.108	1.102	1.097	1.092	1.088	1.084	1.080	1.076	1.073	1.070
7.5	25.3	1.113	1.107	1.101	1.096	1.092	1.087	1.083	1.080	1.076	1.073
7.0	24.6	1.117	1.111	1.105	1.100	1.095	1.091	1.086	1.083	1.079	1.076
6.5	23.9	1.121	1.115	1.109	1.103	1.098	1.094	1.090	1.086	1.082	1.079
6.0	23.2	1.125	1.119	1.113	1.107	1.102	1.097	1.093	1.089	1.085	1.081
5.6	22.6	1.129	1.122	1.116	1.110	1.105	1.100	1.096	1.092	1.088	1.084
5.2	22.0	1.133	1.126	1.120	1.114	1.109	1.103	1.099	1.095	1.090	1.087
4.8	21.4	1.137	1.130	1.123	1.117	1.112	1.107	1.102	1.098	1.093	1.089
4.5	20.9	1.140	1.133	1.126	1.120	1.115	1.109	1.104	1.100	1.096	1.092
4.2	20.4	1.144	1.136	1.130	1.123	1.118	1.112	1.107	1.102	1.098	1.094
3.9	19.8	1.148	1.140	1.133	1.127	1.121	1.116	1.110	1.105	1.101	1.097
3.6	19.3	1.152	1.144	1.137	1.130	1.124	1.118	1.113	1.108	1.104	1.099
3.4	18.9	1.155	1.147	1.139	1.133	1.126	1.121	1.115	1.110	1.106	1.101
3.2	18.4	1.158	1.150	1.143	1.136	1.129	1.123	1.118	1.113	1.108	1.104
3.0	18.0	1.162	1.153	1.145	1.139	1.132	1.126	1.120	1.115	1.110	1.106
2.8	17.5	1.166	1.157	1.149	1.142	1.135	1.129	1.123	1.118	1.113	1.109
2.6	17.1	1.169	1.160	1.152	1.145	1.138	1.132	1.126	1.120	1.115	1.111
2.4	16.7	1.172	1.163	1.155	1.147	1.141	1.134	1.128	1.123	1.118	1.113
2.2	16.3	1.176	1.167	1.158	1.150	1.143	1.137	1.131	1.125	1.120	1.116
2.1	15.9	1.179	1.170	1.161	1.153	1.146	1.140	1.134	1.128	1.123	1.118
2.0	15.6	1.182	1.173	1.164	1.156	1.148	1.142	1.136	1.130	1.124	1.120
1.8	15.2	1.186	1.176	1.167	1.159	1.151	1.145	1.138	1.132	1.127	1.122
1.7	14.9	1.188	1.178	1.169	1.161	1.154	1.147	1.140	1.135	1.129	1.124
1.6	14.5	1.192	1.182	1.173	1.165	1.157	1.150	1.143	1.137	1.132	1.126
1.5	14.2	1.195	1.185	1.176	1.167	1.159	1.152	1.146	1.139	1.134	1.129
1.4	13.9	1.198	1.188	1.178	1.170	1.162	1.154	1.148	1.142	1.136	1.131
1.3	13.6	1.201	1.191	1.181	1.172	1.164	1.157	1.150	1.144	1.138	1.133
1.2	13.3	1.204	1.194	1.184	1.175	1.167	1.159	1.153	1.146	1.140	1.135
1.2	13.0	1.207	1.197	1.187	1.178	1.170	1.162	1.155	1.149	1.142	1.137
1.1	12.7	1.211	1.200	1.190	1.181	1.173	1.165	1.158	1.151	1.145	1.139
1.0	12.4	1.214	1.203	1.193	1.184	1.175	1.167	1.160	1.153	1.147	1.141
.9	12.2	1.217	1.205	1.195	1.186	1.177	1.169	1.162	1.155	1.148	1.143
.9	11.9	1.220	1.209	1.198	1.189	1.180	1.172	1.164	1.158	1.151	1.145
.8	11.6	1.224	1.212	1.202	1.192	1.183	1.175	1.167	1.160	1.153	1.147
.8	11.4	1.226	1.215	1.204	1.194	1.185	1.177	1.169	1.162	1.155	1.149

Tabelle 7.6: Annahmezahlen $G_{A,\alpha}$ für $l = 24 \dots 33$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$	$l=9$	$l=10$	$l=11$	$l=12$	$l=13$
21.7	41.7	.474	.558	.618	.662	.697	.724	.747	.766	.782	.796
19.9	39.3	.429	.519	.583	.631	.669	.699	.723	.744	.761	.777
18.2	37.3	.387	.483	.551	.603	.643	.675	.701	.723	.742	.758
16.7	35.7	.350	.451	.523	.577	.619	.653	.682	.705	.725	.742
15.3	34.2	.313	.420	.495	.552	.597	.633	.662	.687	.708	.726
14.1	32.9	.280	.391	.470	.530	.576	.614	.645	.671	.693	.712
13.0	31.7	.247	.364	.446	.508	.557	.596	.628	.655	.679	.699
11.9	30.6	.213	.336	.422	.486	.537	.577	.611	.639	.663	.684
11.0	29.6	.182	.311	.400	.467	.519	.561	.596	.625	.650	.672
10.2	28.6	.152	.286	.379	.448	.502	.545	.581	.612	.637	.660
9.4	27.7	.120	.261	.357	.429	.484	.529	.566	.598	.624	.647
8.7	26.9	.089	.237	.337	.411	.468	.514	.552	.585	.612	.636
8.1	26.1	.060	.215	.318	.394	.453	.500	.540	.573	.601	.625
7.5	25.3	.029	.192	.298	.377	.437	.486	.526	.560	.589	.614
7.0	24.6		.170	.281	.361	.423	.473	.514	.549	.579	.604
6.5	23.9		.147	.262	.344	.408	.459	.502	.537	.567	.594
6.0	23.2		.123	.241	.327	.392	.445	.488	.525	.556	.583
5.6	22.6		.101	.224	.312	.379	.433	.477	.514	.546	.573
5.2	22.0		.078	.205	.296	.365	.419	.465	.503	.535	.563
4.8	21.4		.052	.185	.279	.349	.406	.452	.491	.524	.553
4.5	20.9		.031	.169	.265	.337	.394	.442	.481	.515	.544
4.2	20.4		.008	.152	.250	.324	.383	.431	.471	.505	.535
3.9	19.8			.133	.234	.310	.370	.419	.460	.495	.526
3.6	19.3			.112	.217	.295	.356	.407	.449	.484	.515
3.4	18.9			.097	.205	.284	.347	.398	.440	.477	.508
3.2	18.4			.081	.192	.273	.336	.388	.431	.468	.500
3.0	18.0			.064	.178	.261	.326	.378	.422	.460	.492
2.8	17.5			.046	.163	.248	.314	.368	.413	.451	.484
2.6	17.1			.026	.147	.234	.302	.357	.402	.441	.475
2.4	16.7			.004	.130	.220	.289	.345	.391	.431	.465
2.2	16.3				.111	.204	.275	.332	.379	.420	.455
2.1	15.9				.100	.195	.267	.325	.373	.414	.449
2.0	15.6				.090	.186	.259	.317	.366	.407	.443
1.8	15.2				.066	.166	.242	.302	.352	.394	.431
1.7	14.9				.053	.156	.233	.294	.344	.387	.424
1.6	14.5				.039	.144	.222	.285	.336	.379	.417
1.5	14.2				.024	.132	.212	.275	.327	.371	.409
1.4	13.9				.008	.119	.201	.265	.318	.363	.401
1.3	13.6					.105	.189	.254	.308	.354	.392
1.2	13.3					.089	.175	.243	.298	.344	.383
1.2	13.0					.089	.175	.242	.297	.343	.383
1.1	12.7					.072	.161	.230	.286	.333	.373
1.0	12.4					.054	.145	.216	.273	.321	.362
.9	12.2					.033	.128	.201	.260	.309	.351
.9	11.9					.032	.127	.200	.259	.308	.350
.8	11.6					.009	.108	.183	.244	.294	.337
.8	11.4					.008	.107	.183	.244	.294	.337

Tabelle 7.7: Rückweisefaktoren $G_{R,s}$ für $l = 4 \dots 13$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$l = 14$	$l = 15$	$l = 16$	$l = 17$	$l = 18$	$l = 19$	$l = 20$	$l = 21$	$l = 22$	$l = 23$
21.7	41.7	.808	.818	.827	.836	.843	.850	.856	.861	.866	.871
19.9	39.3	.790	.801	.811	.820	.828	.836	.842	.848	.854	.859
18.2	37.3	.773	.785	.796	.806	.814	.822	.830	.836	.842	.847
16.7	35.7	.757	.771	.782	.793	.802	.810	.818	.825	.832	.837
15.3	34.2	.742	.756	.769	.780	.790	.799	.807	.814	.821	.827
14.1	32.9	.729	.744	.757	.768	.779	.788	.797	.805	.812	.818
13.0	31.7	.716	.731	.745	.757	.768	.778	.787	.795	.803	.810
11.9	30.6	.702	.719	.733	.746	.757	.767	.777	.785	.793	.801
11.0	29.6	.691	.707	.722	.735	.747	.758	.768	.777	.785	.793
10.2	28.6	.679	.697	.712	.726	.738	.749	.759	.769	.777	.785
9.4	27.7	.668	.685	.701	.716	.728	.740	.750	.760	.769	.777
8.7	26.9	.657	.675	.691	.706	.719	.731	.742	.752	.761	.770
8.1	26.1	.647	.666	.682	.697	.711	.723	.734	.745	.754	.763
7.5	25.3	.636	.656	.673	.688	.702	.715	.726	.737	.747	.755
7.0	24.6	.627	.647	.664	.680	.694	.707	.719	.730	.740	.749
6.5	23.9	.617	.637	.655	.672	.686	.700	.712	.723	.733	.742
6.0	23.2	.606	.627	.646	.662	.677	.691	.704	.715	.725	.735
5.6	22.6	.597	.619	.638	.655	.670	.684	.697	.708	.719	.729
5.2	22.0	.588	.610	.629	.647	.662	.676	.689	.701	.712	.722
4.8	21.4	.578	.600	.620	.638	.654	.668	.682	.694	.705	.715
4.5	20.9	.570	.592	.613	.631	.647	.662	.675	.688	.699	.710
4.2	20.4	.561	.584	.605	.623	.640	.655	.669	.682	.693	.704
3.9	19.8	.552	.576	.597	.615	.632	.648	.662	.675	.687	.698
3.6	19.3	.543	.567	.588	.607	.624	.640	.654	.668	.680	.691
3.4	18.9	.536	.560	.582	.601	.619	.635	.649	.663	.675	.686
3.2	18.4	.528	.553	.575	.595	.613	.629	.644	.657	.670	.681
3.0	18.0	.521	.546	.568	.588	.606	.623	.638	.651	.664	.676
2.8	17.5	.512	.538	.561	.581	.599	.616	.631	.645	.658	.670
2.6	17.1	.504	.530	.553	.574	.592	.609	.625	.639	.652	.664
2.4	16.7	.495	.521	.545	.566	.585	.602	.618	.632	.645	.658
2.2	16.3	.485	.512	.536	.557	.576	.594	.610	.625	.638	.651
2.1	15.9	.479	.507	.531	.552	.572	.590	.606	.621	.635	.647
2.0	15.6	.474	.501	.526	.548	.567	.585	.602	.617	.631	.643
1.8	15.2	.462	.490	.515	.537	.558	.576	.593	.608	.622	.635
1.7	14.9	.456	.484	.509	.532	.552	.571	.588	.603	.618	.631
1.6	14.5	.449	.478	.503	.526	.547	.565	.583	.598	.613	.626
1.5	14.2	.442	.471	.497	.520	.541	.560	.577	.593	.608	.621
1.4	13.9	.434	.464	.490	.513	.535	.554	.571	.587	.602	.616
1.3	13.6	.426	.456	.483	.506	.528	.547	.565	.581	.596	.610
1.2	13.3	.418	.448	.475	.499	.521	.540	.559	.575	.590	.604
1.2	13.0	.417	.448	.474	.499	.520	.540	.558	.575	.590	.604
1.1	12.7	.408	.439	.466	.491	.513	.533	.551	.568	.583	.598
1.0	12.4	.398	.429	.457	.482	.504	.525	.543	.560	.576	.591
.9	12.2	.387	.419	.447	.472	.495	.516	.535	.552	.568	.583
.9	11.9	.387	.418	.447	.472	.495	.516	.535	.552	.568	.583
.8	11.6	.374	.407	.436	.462	.485	.506	.525	.543	.559	.574
.8	11.4	.374	.407	.436	.461	.485	.506	.525	.543	.559	.574

Tabelle 7.8: Rückweisefaktoren $G_{R,\beta}$ für $l = 14 \dots 23$ von Variablenfolgeteplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$l = 24$	$l = 25$	$l = 26$	$l = 27$	$l = 28$	$l = 29$	$l = 30$	$l = 31$	$l = 32$	$l = 33$
21.7	41.7	.875	.879	.882	.886	.889	.892	.894	.897	.899	.901
19.9	39.3	.863	.868	.872	.875	.879	.882	.885	.888	.890	.893
18.2	37.3	.853	.857	.862	.866	.869	.873	.876	.879	.882	.885
16.7	35.7	.843	.848	.852	.857	.861	.865	.868	.871	.875	.878
15.3	34.2	.833	.839	.844	.848	.852	.856	.860	.864	.867	.870
14.1	32.9	.825	.830	.835	.840	.845	.849	.853	.857	.860	.864
13.0	31.7	.816	.822	.828	.833	.838	.842	.846	.850	.854	.857
11.9	30.6	.807	.814	.819	.825	.830	.834	.839	.843	.847	.851
11.0	29.6	.800	.806	.812	.818	.823	.828	.833	.837	.841	.845
10.2	28.6	.792	.799	.805	.811	.816	.822	.826	.831	.835	.839
9.4	27.7	.785	.792	.798	.804	.810	.815	.820	.825	.829	.833
8.7	26.9	.777	.785	.791	.798	.803	.809	.814	.819	.823	.828
8.1	26.1	.771	.778	.785	.791	.798	.803	.808	.813	.818	.823
7.5	25.3	.764	.771	.779	.785	.791	.797	.803	.808	.813	.817
7.0	24.6	.758	.765	.773	.779	.786	.792	.797	.803	.808	.812
6.5	23.9	.751	.759	.766	.774	.780	.786	.792	.797	.802	.807
6.0	23.2	.744	.752	.760	.767	.774	.780	.786	.792	.797	.802
5.6	22.6	.738	.746	.754	.762	.769	.775	.781	.787	.792	.797
5.2	22.0	.732	.740	.748	.756	.763	.770	.776	.782	.787	.792
4.8	21.4	.725	.734	.742	.750	.757	.764	.770	.776	.782	.787
4.5	20.9	.720	.729	.737	.745	.752	.759	.766	.772	.778	.783
4.2	20.4	.714	.723	.732	.740	.747	.754	.761	.767	.773	.778
3.9	19.8	.708	.717	.726	.734	.742	.749	.756	.762	.768	.774
3.6	19.3	.701	.711	.720	.728	.736	.743	.750	.757	.763	.769
3.4	18.9	.697	.706	.715	.724	.732	.739	.746	.753	.759	.765
3.2	18.4	.692	.702	.711	.719	.727	.735	.742	.749	.755	.761
3.0	18.0	.687	.697	.706	.715	.723	.731	.738	.745	.751	.757
2.8	17.5	.681	.691	.701	.710	.718	.726	.733	.740	.747	.753
2.6	17.1	.675	.686	.695	.704	.713	.721	.728	.735	.742	.748
2.4	16.7	.669	.680	.690	.699	.707	.716	.723	.730	.737	.744
2.2	16.3	.663	.673	.683	.693	.702	.710	.718	.725	.732	.738
2.1	15.9	.659	.670	.680	.689	.698	.707	.715	.722	.729	.736
2.0	15.6	.655	.666	.676	.686	.695	.703	.711	.719	.726	.733
1.8	15.2	.647	.658	.669	.679	.688	.697	.705	.712	.720	.726
1.7	14.9	.643	.654	.665	.675	.684	.693	.701	.709	.716	.723
1.6	14.5	.638	.650	.661	.671	.680	.689	.697	.705	.712	.720
1.5	14.2	.634	.645	.656	.666	.676	.685	.693	.701	.709	.716
1.4	13.9	.629	.640	.651	.662	.671	.680	.689	.697	.705	.712
1.3	13.6	.623	.635	.646	.657	.667	.676	.684	.693	.700	.708
1.2	13.3	.617	.630	.641	.651	.661	.671	.679	.688	.696	.703
1.2	13.0	.617	.629	.641	.651	.661	.670	.679	.688	.695	.703
1.1	12.7	.611	.623	.635	.645	.656	.665	.674	.682	.690	.698
1.0	12.4	.604	.617	.628	.639	.650	.659	.668	.677	.685	.693
.9	12.2	.597	.610	.621	.633	.643	.653	.662	.671	.679	.687
.9	11.9	.597	.609	.621	.632	.643	.653	.662	.671	.679	.687
.8	11.6	.588	.601	.614	.625	.636	.646	.655	.664	.672	.680
.8	11.4	.588	.601	.613	.625	.635	.645	.655	.664	.672	.680

Tabelle 7.9: Rückweisefaktoren $G_{R,l}$ für $l = 24 \dots 33$ von Variablenfolgeplänen mit unbekannter Standardabweichung

α	β	$m = 3$		$m = 5$		$m = 10$		$m = 20$	
		$n_{0,\sigma}$	$k_{0,\sigma}$	$n_{0,\sigma}$	$k_{0,\sigma}$	$n_{0,\sigma}$	$k_{0,\sigma}$	$n_{0,\sigma}$	$k_{0,\sigma}$
21.7	41.7	2	-.02	1	-.33	1	-.71	1	-1.04
19.9	39.3	2	-.05	1	-.37	1	-.75	1	-1.08
18.2	37.3	2	-.02	2	-.34	1	-.71	1	-1.04
16.7	35.7	3	.00	2	-.31	2	-.69	1	-1.02
15.3	34.2	3	.02	3	-.30	2	-.68	2	-1.00
14.1	32.9	3	.00	3	-.32	2	-.70	2	-1.03
13.0	31.7	4	.01	3	-.31	2	-.68	2	-1.01
11.9	30.6	4	.02	4	-.30	3	-.67	2	-1.00
11.0	29.6	4	.00	4	-.31	3	-.69	2	-1.02
10.2	28.6	5	.01	4	-.30	3	-.68	2	-1.01
9.4	27.7	6	.02	4	-.30	3	-.67	3	-1.00
8.7	26.9	6	.03	5	-.29	4	-.67	3	-1.00
8.1	26.1	6	.01	5	-.30	4	-.68	3	-1.01
7.5	25.3	7	.02	5	-.30	4	-.67	3	-1.00
7.0	24.6	7	.03	6	-.29	4	-.67	4	-1.00
6.5	23.9	7	.01	6	-.30	4	-.68	4	-1.01
6.0	23.2	8	.02	6	-.30	5	-.67	4	-1.00
5.6	22.6	8	.02	7	-.29	5	-.67	4	-1.00
5.2	22.0	9	.03	7	-.29	6	-.66	4	-.99
4.8	21.4	9	.02	7	-.30	6	-.67	4	-1.00
4.5	20.9	10	.02	8	-.29	6	-.67	5	-1.00
4.2	20.4	10	.03	8	-.29	6	-.66	5	-.99
3.9	19.8	10	.02	8	-.30	6	-.67	5	-1.00
3.6	19.3	11	.02	9	-.29	7	-.67	5	-1.00
3.4	18.9	11	.03	9	-.29	7	-.67	5	-.99
3.2	18.4	12	.03	9	-.29	7	-.66	6	-.99
3.0	18.0	12	.02	9	-.29	7	-.67	6	-1.00
2.8	17.5	12	.03	10	-.29	8	-.67	6	-.99
2.6	17.1	13	.03	10	-.29	8	-.66	6	-.99
2.4	16.7	13	.02	10	-.29	8	-.67	6	-1.00
2.2	16.3	13	.03	11	-.29	8	-.67	7	-1.00
2.1	15.9	14	.03	11	-.29	9	-.66	7	-.99
2.0	15.6	15	.03	12	-.29	9	-.66	7	-.99
1.8	15.2	15	.03	12	-.29	9	-.67	7	-1.00
1.7	14.9	15	.03	12	-.29	9	-.66	7	-.99
1.6	14.5	16	.03	13	-.29	10	-.66	8	-.99
1.5	14.2	16	.03	13	-.28	10	-.66	8	-.99
1.4	13.9	16	.03	13	-.29	10	-.67	8	-.99
1.3	13.6	17	.03	13	-.29	10	-.66	8	-.99
1.2	13.3	17	.03	14	-.29	11	-.66	9	-.99
1.2	13.0	17	.03	14	-.29	11	-.67	9	-.99
1.1	12.7	18	.03	14	-.29	11	-.66	9	-.99

Tabelle 7.10: Parameter von Schwachstellenprüfplänen in Abhängigkeit von α und β , Standardabweichung bekannt

α	β	$m = 3$		$m = 5$		$m = 10$		$m = 20$	
		$n_{0,s}$	$k_{0,s}$	$n_{0,s}$	$k_{0,s}$	$n_{0,s}$	$k_{0,s}$	$n_{0,s}$	$k_{0,s}$
21.7	41.7	2	.05	2	-.48	2	-1.27	3	-2.06
19.9	39.3	2	.05	2	-.48	3	-1.23	4	-2.01
18.2	37.3	2	.05	2	-.48	3	-1.23	4	-2.01
16.7	35.7	3	.05	3	-.46	4	-1.20	5	-1.99
15.3	34.2	3	.05	3	-.46	4	-1.20	6	-1.97
14.1	32.9	4	.05	3	-.46	4	-1.20	6	-1.97
13.0	31.7	4	.05	4	-.45	5	-1.19	7	-1.96
11.9	30.6	4	.05	4	-.45	5	-1.19	8	-1.95
11.0	29.6	5	.05	4	-.45	6	-1.18	8	-1.95
10.2	28.6	5	.05	5	-.45	6	-1.18	9	-1.95
9.4	27.7	6	.05	5	-.45	6	-1.18	9	-1.95
8.7	26.9	6	.05	5	-.45	7	-1.17	10	-1.94
8.1	26.1	6	.05	6	-.44	7	-1.17	11	-1.88
7.5	25.3	7	.05	6	-.44	8	-1.16	11	-1.88
7.0	24.6	7	.05	6	-.44	8	-1.16	12	-1.88
6.5	23.9	8	.05	7	-.44	9	-1.16	12	-1.88
6.0	23.2	8	.05	7	-.44	9	-1.16	13	-1.88
5.6	22.6	8	.05	8	-.44	9	-1.16	13	-1.88
5.2	22.0	9	.05	8	-.44	10	-1.15	14	-1.88
4.8	21.4	9	.05	8	-.44	10	-1.15	15	-1.88
4.5	20.9	10	.05	9	-.44	11	-1.12	15	-1.88
4.2	20.4	10	.05	9	-.44	11	-1.12	16	-1.88
3.9	19.8	10	.05	9	-.44	11	-1.12	16	-1.88
3.6	19.3	11	.05	10	-.43	12	-1.12	17	-1.88
3.4	18.9	11	.05	10	-.43	12	-1.12	18	-1.88
3.2	18.4	12	.05	10	-.43	12	-1.12	18	-1.88
3.0	18.0	12	.05	11	-.42	13	-1.12	19	-1.88
2.8	17.5	13	.05	11	-.42	13	-1.12	20	-1.88
2.6	17.1	13	.05	11	-.42	14	-1.12	20	-1.88
2.4	16.7	13	.05	12	-.42	14	-1.12	21	-1.88
2.2	16.3	14	.05	12	-.42	15	-1.12	21	-1.88
2.1	15.9	14	.05	12	-.42	15	-1.12	22	-1.88
2.0	15.6	15	.05	13	-.42	16	-1.12	23	-1.88
1.8	15.2	15	.05	13	-.42	16	-1.12	23	-1.88
1.7	14.9	15	.05	13	-.42	16	-1.12	24	-1.88
1.6	14.5	16	.05	14	-.42	17	-1.12	25	-1.88
1.5	14.2	16	.05	14	-.42	17	-1.12	25	-1.88
1.4	13.9	17	.05	15	-.42	18	-1.12	26	-1.88
1.3	13.6	17	.05	15	-.42	18	-1.12	27	-1.88
1.2	13.3	17	.05	15	-.42	19	-1.12	27	-1.88
1.2	13.0	18	.05	16	-.42	19	-1.12	28	-1.88
1.1	12.7	18	.05	16	-.42	19	-1.12	28	-1.88

Tabelle 7.11: Parameter von Schwachstellenprüfplänen in Abhängigkeit von α und β , Standardabweichung unbekannt

8 Das ungefilterte Produktionsangebot im Erdbau

In der Qualitätskontrolle wird zwischen dem ungefilterten und dem gefilterten Produktionsangebot⁴ unterschieden. Das ungefilterte Produktionsangebot ist im Erdbau dasjenige, das der Unternehmer dem Auftraggeber zur Prüfung vorlegt. Das gefilterte Produktionsangebot ist dasjenige, welches nach der Kontrolle, also nach einer Filterung durch Abnahmevorschriften zum Einbau gelangt.

Um die Auswirkungen statistischer Abnahmekriterien auf das Produktionsangebot zu untersuchen, ist es notwendig, die statistischen Kennwerte des ungefilterten Produktionsangebotes zu erfassen. Dazu wurde in sechs Bundesländern eine sehr umfangreiche Datensammlung von Prüfungen des Verdichtungsgrades und des Verformungsmodulus von Schüttlosen im Straßenbau vorgenommen. Ziel war die Ermittlung verschiedener statistischer Parameter der Schüttlose. Diese waren:

1. der Mittelwert μ des Merkmals,
2. die Standardabweichung σ des Merkmals,
3. das Vorhaltemaß V_o ,
4. der Schlechtanteil p des Merkmals,
5. der Variationskoeffizient.

Insgesamt wurden die Ergebnisse von ca. 20000 Prüfungen gesichtet, für die endgültige Auswertung war allerdings nur 25 % des Datenmaterials brauchbar. Dies hatte folgende Gründe:

1. Es sollten die *wahren* statistischen Parameter μ, σ, p, V_o , also möglichst unter Ausschluß von statistischen Unsicherheiten festgestellt werden. Dazu mußte immer eine ausreichende Anzahl von Versuchen vorhanden sein. Als ausreichend wurden mindestens 17 Versuche angesehen. (Der Ausdruck *wahr* wird hier *nicht* im Sinne von Kapitel 5 verwendet, da

⁴Der Begriff „Produktionsangebot“, der aus der fertigen Industrie stammt, wird sinngemäß für den Erdbau beibehalten, obwohl die Verdichtung eines Schüttgutes im eigentlichen Sinn keine Produktion darstellt.

- sich alle Angaben in den folgenden Kapiteln immer auf die gemessenen Werte beziehen.)
2. Zum derzeitigem Stadium der Qualitätsprüfungen werden die Versuche oft an „Schwachstellen“ angesetzt (vgl. Kapitel 1.2). Prüfungen, die an solchen Stellen ausgeführt wurden, sind nicht verwendet worden, da statistische Kennwerte solcher Prüfungen einen systematischen Bias aufweisen.
 3. Bei der Archivierung der Versuchsergebnisse werden oft nur diejenigen Versuche erfaßt, die ein der Anforderung entsprechendes Versuchsergebnis aufweisen, da die Qualität des letztendlich eingebauten Schüttmaterials festgehalten werden soll. Versuche, die vor einer eventuellen Nachverdichtung ausgeführt wurden, werden nicht festgehalten. Genau diese Versuche sind aber für die Feststellung des ungefilterten Produktionsangebotes unbedingt notwendig.
 4. Es wurden nur Versuche ausgewertet, die in den letzten 12 Jahren ausgeführt wurden, da sich in dieser Zeitspanne die Abnahmeregeln für die Verdichtungskontrolle in Deutschland nicht geändert haben.
 5. Die Versuche innerhalb eines Loses mußten alle in einer gleich klassifizierten Bodenart ausgeführt sein. Gerade im Bereich des Unterbaues von Straßen werden jedoch oft recht heterogene Schüttmaterialien eingebaut.

Angaben aus der Literatur zu statistischen Parametern von Prüflosen sind in die Auswertung nicht eingegangen, da diese Daten oft nicht den oben genannten Kriterien genügten, bzw. diese meist nicht mehr feststellbar waren.

8.1 Korrelationen zwischen Prüflosparametern

8.1.1 Verdichtungsgrad

Tabelle 8.3 enthält die festgestellten statistischen Parameter des Verdichtungsgrades von 60 Erdbaulosen. Sie stellen das ungefilterte Produktionsangebot dar.

In den Tabellen 8.2, 8.3, 8.6, 8.7 und 8.8 bedeuten:

- μ : Mittelwert
- σ : Standardabweichung
- R : Spannweite
- n : Stichprobenumfang
- Sc : Schiefe der Verteilung
- Ex : Exzeß der Verteilung
- V_{Ko} : Variationskoeffizient
- T_u : geforderter Grenzwert
- p : Schlechtanteil
- δ : Signifikanzniveau des Kolmogorow-Smirnow Testes auf Normalverteilung

Der mittlere Stichprobenumfang je Los beträgt 34 Versuche. Aus den Daten der Tabelle 8.3 wurden die Produkt-Momenten-Korrelationskoeffizienten r zwischen verschiedenen, statistischen Kenngrößen und dem geforderten Grenzwert T_u berechnet.

$$\begin{aligned}r_{T_u;\mu} &= 0.660 \\r_{T_u;\sigma} &= -0.515 \\r_{T_u;p} &= 0.186 \\r_{T_u;V_o} &= -0.666\end{aligned}$$

Eine Unterscheidung nach einzelnen Bodenarten ist, wie verschiedene Vergleichsrechnungen gezeigt haben, nicht notwendig, da die im folgenden aufgezählten Zusammenhänge durch eine Aufspaltung nach Bodenarten nicht genauer quantifiziert werden können.

Mit steigendem geforderten Grenzwert nimmt im Mittel der Mittelwert der Lose zu und gleichzeitig die Standardabweichung σ der Lose ab. Abbildung 8.1 verdeutlicht dies.

Dagegen ist der geforderte Grenzwert T_u nur sehr schwach mit dem Schlechtanteil des Loses korreliert ($r_{T_u;p} = 0.186$). Der Schlechtanteil ist also weitgehend unabhängig vom geforderten Grenzwert. Dies bedeutet für eine statistische Abnahme, daß eine einheitliche Fraktileforderung unabhängig vom geforderten Grenzwert möglich ist.

Das Vorhaltemaß V_o wird im Mittel mit größerem geforderten Grenzwert T_u kleiner. Dies ergibt sich auch zwangsläufig aus den oben dargelegten Zusammenhängen. Ein höherer geforderter Grenzwert bewirkt also in erster Linie, daß der Unternehmer die Verdichtung gleichmäßiger (geringere Standardabweichung) ausführt, da er aus bodenmechanischen Gründen das Vorhaltemaß nicht beliebig steigern kann.

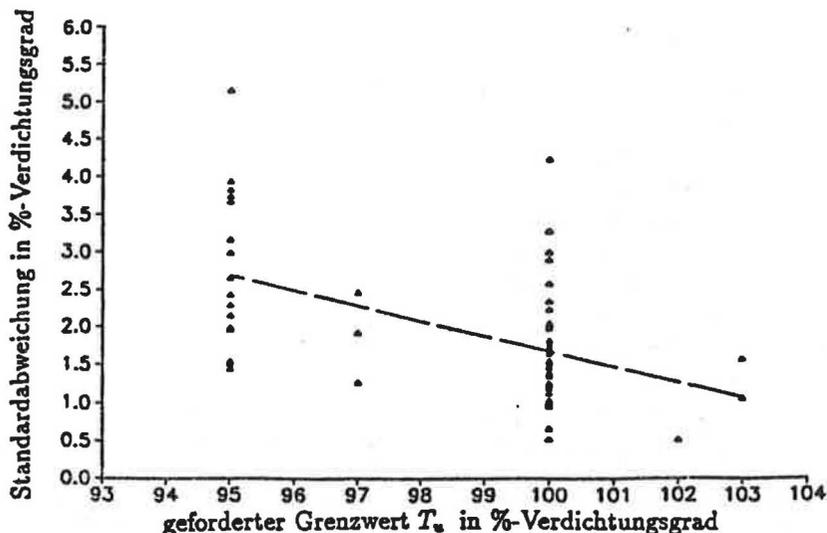


Abbildung 8.1: Standardabweichung σ als Funktion des geforderten Grenzwertes

Für die Quantifizierung von Mittelwert und Standardabweichung als Vorinformation müssen deshalb die Lose in Gruppen mit gleichem gefordertem Grenzwert T_u eingeteilt werden.

Die Korrelationskoeffizienten zwischen verschiedenen statistischen Parametern bei *gleichem* gefordertem Grenzwert T_u enthält Tabelle 8.1. Dabei wurden nur jeweils Lose mit $T_u = 95\%$ und $T_u = 100\%$ berücksichtigt, da hier eine ausreichende Losanzahl für eine sinnvolle Berechnung vorhanden war. Aus den Korrelationskoeffizienten ist ersichtlich, daß bei gleichem geforder-

	zementverfestigte Lose		
	$T_u = 95\%$ $k = 17$	$T_u = 100\%$ $k = 37$	$T_u = 98\%$ $k = 8$
$r_{\mu;\sigma} = r_{V_0;\sigma}$	0.405	0.637	-0.471
$r_{\mu;p}$	-0.562	-0.594	-0.981
$r_{p,\sigma}$	0.465	0.192	0.456

Tabelle 8.1: Korrelationen zwischen verschiedenen Prüflosparametern bei gleichem gefordertem Grenzwert T_u — Verdichtungsgrad

tem Grenzwert die Standardabweichung mit größerem Mittelwert zunimmt. Der Schlechtanteil p wird dagegen mit zunehmendem Mittelwert kleiner.

Auf einen Vergleich der absoluten Größen des Mittelwertes und der Standardabweichung bei unterschiedlichem gefordertem Grenzwert wird in Abschnitt 8.2 eingegangen.

Tabelle 8.2 enthält die statistischen Parameter von zementverfestigten Losen. Die verfestigte Bodenart war bei allen Losen ein enggestufter Sand, der geforderte Grenzwert beträgt 98% Verdichtungsgrad. Die Korrelationskoeff-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	μ	σ	R	n	Sc	Ex	V_{K_o}	T_u	p	δ	<i>Boden</i>
1	101.2	1.2	3.8	22	.14	-1.35	1.1	98.0	.3	70.8	<i>SE</i>
2	101.1	1.5	5.3	18	-.32	-.80	1.5	98.0	1.9	77.1	<i>SE</i>
3	99.1	2.1	10.4	35	-.20	.43	2.1	98.0	29.8	77.0	<i>SE</i>
4	96.9	1.9	7.0	19	.28	-.81	2.0	98.0	71.9	99.5	<i>SE</i>
5	99.6	1.9	7.1	20	-.48	-.54	1.9	98.0	19.7	68.2	<i>SE</i>
6	98.7	1.7	6.7	22	.39	-.44	1.7	98.0	33.8	93.5	<i>SE</i>
7	98.4	1.6	5.6	26	-.32	-.87	1.7	98.0	40.4	56.9	<i>SE</i>
8	99.6	2.3	11.7	86	-.11	-.15	2.3	98.0	24.6	79.2	<i>SE</i>

Tabelle 8.2: Statistische Kennwerte von 8 zementverfestigten Losen — Verdichtungsgrad

fizienten zwischen den statistischen Prüflosparametern sind ebenfalls aus Tabelle 8.1 ersichtlich. Allerdings ist dabei zu beachten, daß nur acht Prüflose für eine Auswertung zur Verfügung standen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	μ	σ	R	n	Sc	Ex	$V_{K\sigma}$	T_u	p	δ	Boden
1	102.3	1.12	3.5	22	.21	-1.53	1.1	100	2.0	71.8	Sand
2	102.6	1.25	4.0	17	-.11	-1.13	1.2	100	1.9	77.3	Sand
3	101.4	1.45	5.5	34	-.27	-.43	1.4	100	16.7	54.3	Sand
4	101.6	1.55	4.9	18	.36	-1.39	1.5	100	15.1	50.4	Sand
5	101.9	2.04	8.1	21	.05	-.56	2.0	100	17.6	94.7	Sand
6	102.1	1.97	8.4	18	-.62	.41	1.9	100	14.3	93.7	Sand
7	101.5	1.03	3.5	26	.18	-1.02	1.0	100	7.3	86.9	Sand
8	103.0	1.20	3.6	20	.04	-1.62	1.2	100	.6	72.6	Sand
9	102.4	1.48	3.6	19	-.10	-1.80	1.4	100	5.6	59.9	Sand
10	100.9	.66	2.4	19	-.63	-.60	.7	100	9.4	22.2	Sand
11	102.2	1.53	4.4	21	-.09	-1.42	1.5	100	7.8	83.9	Sand
12	101.0	1.47	5.9	24	.58	-.07	1.5	100	25.5	72.3	Sand
13	100.6	1.34	5.3	17	-1.04	.58	1.3	100	33.8	65.0	Sand
14	101.1	1.99	7.8	17	.05	-.56	2.0	100	29.2	95.7	Sand
15	101.0	1.37	4.6	19	.06	-1.32	1.4	100	22.8	79.1	Sand
16	100.4	2.23	9.8	21	-1.84	3.41	2.2	100	43.8	26.9	Sand
17	101.5	1.51	6.1	24	-.30	-.28	1.5	100	16.4	87.5	Sand
18	100.8	1.70	5.3	19	-1.66	1.40	1.7	100	31.1	18.7	Sand
19	99.3	1.99	9.7	135	-.03	-.70	2.0	95	1.6	38.6	Sand
20	102.5	.51	3.2	77	1.14	3.03	.5	102	15.9	56.3	Sand
21	101.0	1.00	5.1	67	.62	.12	1.0	100	17.1	32.3	Sand
22	101.3	1.40	5.4	23	1.17	.80	1.4	100	17.5	53.7	Sand
23	97.8	1.54	4.6	24	.19	-1.38	1.6	95	3.4	71.0	Sand
24	99.3	3.75	12.8	19	-.87	-.11	3.9	95	12.9	71.4	Sand
25	100.8	.52	2.2	34	.97	.79	.5	100	6.9	53.2	Sand
26	101.4	1.36	6.0	22	.20	-.10	1.3	100	15.7	84.4	Sand
27	98.2	1.26	5.8	40	.53	.29	1.3	97	17.5	45.4	Sand
28	101.4	.89	3.0	18	.82	-.51	1.0	100	8.2	75.2	Sand
29	101.1	1.21	4.9	17	.27	-.44	1.2	100	17.5	78.6	Sand
30	100.9	1.67	8.1	40	-.57	.77	.6	100	28.9	81.3	Sand
31	103.8	5.17	18.0	17	-.66	-.77	5.0	95	4.5	42.7	Sand
32	102.4	3.68	12.2	19	-.52	-1.09	3.6	95	2.2	69.6	Sand
33	104.2	3.00	10.3	21	-.25	-1.24	2.9	100	7.9	78.1	Sand
34	102.9	2.34	6.4	23	.39	-1.64	2.3	100	10.4	48.0	Sand
35	101.4	2.58	9.2	27	.63	-.45	2.5	100	29.5	77.3	Sand
36	100.6	1.18	3.7	18	.52	-1.14	1.2	100	30.9	84.7	Sand
37	103.7	4.24	14.1	19	-1.24	.40	4.1	100	19.0	73.9	Sand
38	103.0	2.02	5.9	20	.25	-1.42	2.0	100	7.1	67.9	Sand
39	103.4	3.28	11.3	23	-.21	-1.12	3.2	100	14.9	98.0	Sand
40	101.8	1.75	7.2	23	1.17	1.18	1.7	100	15.3	60.6	Sand
41	103.9	2.90	16.5	182	.12	-.27	2.8	100	8.9	91.9	Sand
42	102.5	1.81	9.1	164	.34	-.39	1.8	100	8.4	66.2	Sand
43	99.0	1.92	9.4	31	-.57	1.06	1.9	97	15.5	55.2	Kies
44	98.6	2.46	11.8	37	-.66	.61	2.5	97	25.8	92.2	Sandstein
45	97.5	3.95	12.4	19	-1.02	-.36	4.0	95	26.5	57.2	SÜ
46	102.6	1.64	5.1	18	-.48	-1.24	1.6	100	5.4	59.9	Su'
47	101.7	.95	2.6	17	.02	-1.65	.9	100	3.8	68.4	Sand
48	103.9	1.05	4.1	20	-.61	.22	1.0	103	19.8	86.9	gebr.Sandstein
49	103.7	1.57	6.1	24	.36	-.49	1.5	103	32.8	90.5	Kies
50	100.0	2.15	11.4	104	.06	.21	2.2	95	1.1	85.7	Kies
51	97.8	2.29	12.3	47	-.01	.21	2.3	95	10.7	92.1	GÜ
52	101.1	2.43	12.5	39	-.07	.73	2.4	95	.6	45.3	SÜ - GÜ
53	99.3	2.65	12.9	26	-1.23	2.02	2.7	95	5.2	41.6	GW
54	102.8	3.17	11.8	22	-.90	.13	3.1	95	.7	80.9	GÜ
55	97.1	3.84	15.1	32	-.75	-.28	4.0	95	29.0	43.8	Schluff
56	99.2	2.99	15.5	42	.81	1.64	3.0	95	8.2	39.2	Sand
57	100.8	1.44	5.8	17	-.60	.01	1.4	95	.0	85.5	verw.Schiefer-ton
58	98.0	1.50	5.9	38	.09	-.83	1.5	95	2.2	74.4	SÜ
59	98.6	1.98	7.9	71	-.04	-.85	2.0	95	3.3	48.5	Lehm
60	97.4	1.96	8.7	33	.58	-.27	2.0	95	10.8	17.2	Lehm

Tabelle 8.3: Statistische Kennwerte von 60 Losen — Verdichtungsgrad

8.1.2 Verformungsmodul

In den Tabellen 8.6, 8.7, 8.8 sind die festgestellten statistischen Parameter des E_{v1} -Modules, des E_{v2} -Modules und des Verhältnisses $\frac{E_{v1}}{E_{v2}} = E_{12}$, die mit dem Plattendruckversuch nach DIN 18134 bestimmt wurden, zusammengestellt. Die Korrelationskoeffizienten der statistischen Parameter des E_{v2} -Modules und des Verhältnisses E_{12} zum jeweils geforderten Grenzwert können Tabelle 8.4 entnommen werden. Der Schlechtanteil p des E_{v2} -Modules und der ge-

	E_{v2} - Modul	E_{12}
$r_{T_u;\mu}$	0.518	0.290
$r_{T_u;\sigma}$	-0.199	0.129
$r_{T_u;p}$	0.242	-0.261
$r_{T_u;V_o}$	-0.428	-0.388

Tabelle 8.4: Korrelationskoeffizienten zwischen Prüflosparametern und dem geforderten Grenzwert — E_{v2} -Modul

forderte Grenzwert sind nur sehr schwach miteinander korreliert.

Mit höherem gefordertem Grenzwert nimmt im Mittel das Vorhaltemaß V_o ab. Diese Korrelation ist beim E_{v2} -Modul allerdings schwächer als beim Verdichtungsgrad. Da der E_{v2} -Modul mit steigendem Verdichtungsgrad überlinear zunimmt, ist es für den Unternehmer leichter den E_{v2} -Modul zu steigern als den Verdichtungsgrad. Dementsprechend sind beim E_{v2} -Modul die Korrelationskoeffizienten $r_{T_u;\sigma}$ und $r_{T_u;p}$ auch kleiner (absolute Werte) als beim Verdichtungsgrad. Die Korrelationen sind allerdings sehr schwach ausgeprägt und zeigen nur Tendenzen auf.

Für das Verhältnis E_{12} gelten bezüglich $r_{T_u;\sigma}$ und $r_{T_u;p}$ die gleichen Aussagen wie für den E_{v2} -Modul. Nur stellt hier der absolut niedrigere Grenzwert die höhere Anforderung dar, die Vorzeichen bei $r_{T_u;\sigma}$ und $r_{T_u;p}$ sind deshalb vertauscht.

Tabelle 8.5 zeigt die Korrelationskoeffizienten in Abhängigkeit vom geforderten Grenzwert T_u . Für die Abhängigkeiten zwischen den Prüflosparametern in Tabelle 8.5 gelten hier die gleichen Aussagen wie beim Verdichtungsgrad.

	$T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$ $k = 24$	$T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$ $k = 14$	$T_u = 120 \frac{MN}{m^2}$ $k = 7$
$r_{\mu;\sigma} = r_{V_0;\sigma}$	0.486	0.611	0.216
$r_{\mu,p}$	-0.692	-0.815	-0.917
$r_{p,\sigma}$	-0.073	-0.195	0.217

Tabelle 8.5: Korrelationen zwischen Prüflosparametern bei gleichem geforderten Grenzwert — E_{v2} -Modul

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	μ	σ	R	n	Sc	Ex	V_{Ko}	δ	Boden
	$[\frac{MN}{m^2}]$	$[\frac{MN}{m^2}]$	$[\frac{MN}{m^2}]$				[%]	[%]	
1	92.1	23.6	81	20	.37	-1.17	25.6	74.5	GW
2	70.4	23.9	107	25	.61	.39	33.9	97.0	GW
3	52.9	28.4	76	18	.27	-1.27	53.7	76.8	GW
4	45.4	21.0	59	19	1.01	-.75	46.2	45.2	GW
5	52.1	43.9	125	21	1.05	-.53	84.2	32.1	SU
6	52.0	22.5	57	19	-.45	-1.71	43.2	60.3	SU
7	20.5	8.0	34	24	.30	-.33	39.0	99.7	UL
8	37.9	18.8	70	24	.84	.10	49.6	98.9	Gu
9	28.4	19.3	108	44	2.16	6.37	67.9	9.7	GW
10	48.1	32.8	171	30	2.48	7.05	68.3	12.8	GW
11	39.2	19.5	72	32	.41	-.81	49.8	86.1	GW - GU
12	49.6	18.7	67	22	.00	-1.00	37.7	97.1	GU
13	64.7	12.8	35	17	.21	-1.77	19.9	87.4	Su'
14	36.8	12.5	46	21	.80	-.32	33.9	53.9	Sandstein
15	43.6	12.6	30	18	.49	-1.79	28.8	47.8	Sandstein
16	31.6	9.8	34	20	-.31	-.78	31.0	95.5	Schluffstein
17	65.1	13.1	55	27	-.24	-.25	20.0	97.5	GW - GU
18	72.1	30.7	143	40	1.02	1.39	42.5	54.2	GW - GU
19	52.2	28.3	125	74	1.11	.72	54.2	10.7	GU
20	50.4	20.6	107	30	1.75	4.61	40.9	56.9	GW - GU
21	49.5	34.6	123	22	1.33	.64	70.0	14.5	GÜ
22	54.4	24.3	161	160	1.55	4.28	44.7	1.4	GU - GW
23	39.9	18.5	63	26	.64	-.77	46.4	36.6	Gu _x
24	65.1	19.5	73	21	-.11	-.92	29.9	90.4	Gu _x '
25	56.3	13.8	60	27	.33	-.20	24.6	79.1	G _x
26	59.0	16.6	64	22	-.19	-.51	28.2	77.7	Gu _x
27	55.9	19.9	55	26	.28	-1.70	35.7	40.5	Gu
28	61.1	11.8	48	41	-.51	-.31	19.3	69.5	Gu
29	51.0	13.0	63	69	1.66	2.72	25.5	1.9	SE
30	49.0	7.3	33	80	.57	-.23	14.8	28.9	GW
31	76.8	24.2	125	74	.60	.71	31.6	33.8	GW
32	92.8	24.5	139	71	.38	.49	26.4	29.4	GW
33	71.3	12.8	65	40	-.86	.89	17.9	9.6	GW
34	80.2	26.0	112	44	1.69	2.10	32.4	1.9	GW
35	77.2	19.5	84	48	.29	-.16	25.2	62.2	GW
36	69.7	31.9	113	17	.35	-.83	45.8	99.0	GW
37	80.8	20.3	80	25	-.11	-.64	25.2	73.9	GW
38	41.4	15.5	56	19	-.35	-.98	37.5	48.8	GW
39	57.9	16.7	64	20	1.42	1.36	28.9	36.1	GW
40	62.2	17.1	85	84	.72	.68	27.4	24.8	GW
41	74.3	16.2	59	21	.09	-1.21	21.8	84.8	GW
42	52.7	12.8	49	24	-1.14	1.21	24.3	72.4	GW
43	103.7	23.1	79	22	-.73	-.35	22.2	66.9	Sandstein
44	92.8	18.5	66	29	.22	-.95	19.9	70.5	GW
45	73.1	13.1	50	23	.43	-.27	18.0	96.6	GW
46	69.5	21.0	70	25	1.28	.33	30.3	16.8	GW
47	54.6	14.3	50	20	-.51	-.95	26.1	26.3	SE
48	55.6	17.3	68	21	.16	-.61	31.1	97.7	GW

Tabelle 8.6: Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen -- E_{01} -Modul

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	μ	σ	R	n	Sc	Ex	$V_{K\sigma}$	T_u	p	δ	Boden
	$[\frac{MN}{m^2}]$	$[\frac{MN}{m^2}]$	$[\frac{MN}{m^2}]$				[%]	$[\frac{MN}{m^2}]$	[%]	[%]	
1	203.6	47.0	171	20	.23	-1.11	23.1	45	.0	92.3	GW
2	157.1	46.7	166	25	.32	-1.02	29.7	45	.8	90.9	GW
3	122.0	61.7	159	18	.16	-1.90	50.5	45	10.6	85.4	GW
4	94.2	36.7	109	19	.90	-.74	39.0	45	9.0	63.9	GW
5	113.9	61.4	195	21	.57	-1.04	53.9	45	13.1	69.7	SU
6	112.8	41.4	120	19	-.51	-1.26	36.7	45	5.1	69.8	SU
7	48.3	16.6	73	24	-.13	-.12	34.4	45	42.2	95.4	UL
8	68.9	29.6	109	24	.43	-.36	43.0	45	21.0	97.7	Gsu
9	61.0	34.0	175	44	1.59	3.58	55.7	45	31.9	48.0	GW
10	88.9	40.9	202	30	2.01	5.01	46.0	60	24.0	16.7	GW
11	89.0	33.7	127	32	.79	-.14	37.8	45	9.5	51.4	GW - GU
12	117.7	37.4	160	22	.80	.13	31.8	80	15.7	40.8	GU
13	108.1	14.3	37	17	.25	-1.76	13.2	45	.0	84.6	Su'
14	77.8	18.7	77	21	.58	-.04	24.0	45	4.0	98.9	Sandstein
15	82.0	15.0	41	18	-.14	-1.66	18.3	45	.7	98.4	Sandstein
16	57.6	16.9	58	20	.03	-.79	29.4	45	22.9	81.3	Schluffstein
17	133.2	24.0	110	27	.17	-.24	18.0	45	.0	79.8	GW - GU
18	140.4	39.4	190	40	.29	.38	28.1	45	.8	76.5	GW - GU
19	107.9	47.1	211	74	.80	.33	43.6	45	9.1	9.2	GU
20	111.8	36.5	172	30	.78	1.05	32.6	45	3.3	97.7	GW - GU
21	101.9	47.8	174	22	1.02	.20	46.9	45	11.7	44.2	GÜ
22	114.1	40.5	270	160	1.01	3.10	35.5	45	4.4	.6	GU - GW
23	82.5	34.3	136	26	1.11	.60	41.6	45	13.7	37.5	Guz
24	133.1	37.6	132	21	.41	-.90	28.2	100	18.9	82.0	Guz'
25	111.3	21.9	98	27	.66	.64	19.7	45	.1	26.2	Gz
26	124.9	22.4	86	22	1.27	1.13	17.9	100	13.3	33.1	Guz
27	108.2	31.6	124	26	.54	-.24	29.2	45	2.3	87.7	Gu
28	121.1	17.0	71	41	.65	-.21	14.1	100	10.8	26.8	Gu
29	110.0	18.1	89	69	.76	.77	16.5	100	29.0	3.8	SE
30	113.2	19.4	107	80	1.49	2.74	17.1	45	.0	.5	GW
31	154.5	39.4	180	74	.40	-.22	25.5	100	8.3	64.9	GW
32	185.8	43.3	221	71	.38	.05	23.3	100	2.4	59.7	GW
33	144.2	28.4	155	40	.04	.80	19.7	100	6.0	64.6	GW
34	155.3	49.9	202	44	1.70	2.14	32.1	100	13.4	4.3	GW
35	157.6	33.8	143	48	.06	-.35	21.4	100	4.4	45.2	GW
36	147.5	61.5	217	17	.77	-.50	41.7	100	22.0	69.8	GW
37	172.6	37.2	147	25	-.34	-.79	21.6	100	2.5	78.7	GW
38	92.0	29.1	89	19	-.73	-1.14	31.6	100	60.8	29.9	GW
39	123.1	30.5	105	20	.59	-.60	24.7	100	22.4	91.3	GW
40	128.8	23.6	111	84	.23	-.61	18.3	120	35.4	.0	GW
41	138.5	27.3	92	21	-.05	-1.47	19.7	120	24.9	43.1	GW
42	113.9	14.5	51	24	.29	-.63	12.7	120	66.4	73.7	GW
43	171.5	24.9	91	22	-.95	.34	14.5	120	1.9	26.1	Sandstein
44	167.9	23.6	94	29	.65	-.29	14.0	120	2.1	38.3	GW
45	147.1	14.1	46	23	-.54	-.88	9.6	120	2.7	47.7	GW
46	140.3	37.1	127	25	1.57	1.24	26.4	120	29.2	19.3	GW
47	109.0	19.9	73	20	-.31	-.98	18.3	80	7.3	88.4	SE
48	112.6	22.6	71	21	.39	-1.29	20.1	100	28.9	66.6	GW

Tabelle 8.7: Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen — E_{v2} -Modul

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	μ	σ	R	n	Sc	Ex	V_{Ko} [%]	T_u	p [%]	δ [%]	Boden
1	2.23	.250	.83	20	-.53	-1.22	11.5	2.5	14.0	31.0	GW
2	2.27	.260	1.30	25	-.57	1.24	11.7	2.5	18.8	85.0	GW
3	2.34	.150	.38	18	-.20	-1.92	6.8	2.5	14.3	92.0	GW
4	2.59	.310	.96	19	-.02	-1.44	12.2	2.5	61.4	99.0	GW
5	2.65	.810	3.00	21	.80	.20	30.6	2.5	57.3	94.0	SU
6	2.27	.420	1.48	19	1.00	.34	18.5	2.5	29.2	52.0	SU
7	2.43	.530	2.28	24	.28	-.30	22.2	2.5	44.7	90.0	UL
8	1.87	.300	.95	24	.59	-.91	49.7	2.5	1.8	89.0	Gsu
9	2.35	.770	3.25	44	.69	-.02	33.0	2.5	42.3	54.0	GW
10	2.05	.480	2.30	30	.97	1.41	23.9	2.5	17.4	80.0	GW
11	2.63	1.220	5.90	32	2.19	5.01	46.6	2.5	54.2	5.0	GW - GU
12	2.53	.700	3.40	22	1.63	2.97	27.6	2.5	51.7	19.0	GU
13	1.69	.210	.63	17	.86	-.92	12.7	2.5	.0	65.0	Su'
14	2.18	.270	1.05	21	.21	-.53	12.6	2.5	11.8	96.0	Sandstein
15	1.94	.350	.95	18	.63	-1.39	18.2	2.5	5.5	61.0	Sandstein
16	1.85	.170	.68	20	.67	.46	9.2	2.5	.0	91.0	Schluffstein
17	2.07	.220	.94	27	-.02	-.41	11.0	2.5	2.5	90.0	GW - GU
18	2.07	.480	3.16	40	3.22	14.56	23.5	2.5	18.5	12.0	GW - GU
19	2.17	.350	1.54	74	.25	-.66	16.2	2.5	17.3	41.0	GU
20	2.28	.370	1.97	30	1.61	4.79	16.5	2.5	27.6	31.0	GW - GU
21	2.30	.460	1.64	22	-.13	-1.18	20.0	2.5	33.2	59.0	GÜ
22	2.17	.310	2.11	160	.33	1.54	14.6	2.5	14.4	23.0	GU - GW
23	2.23	.760	2.54	26	.91	-.50	34.0	2.5	36.1	32.0	Guz
24	2.09	.380	1.63	21	.58	.12	18.3	2.5	14.0	99.0	Guz'
25	2.02	.340	1.60	27	.87	1.12	16.8	2.5	7.9	41.0	Gx
26	2.24	.610	2.60	22	1.94	3.35	27.5	2.5	33.5	1.0	Guz
27	2.02	.430	1.42	26	.38	-.99	21.7	2.5	13.2	90.0	Gu
28	2.02	.280	1.58	41	1.63	4.76	14.2	2.5	4.3	10.0	Gu
29	2.20	.360	1.50	69	-.29	-.63	16.6	2.5	20.2	78.0	SE
30	2.33	.410	2.40	80	1.08	1.85	17.8	2.5	33.9	38.0	GW
31	2.07	.262	1.81	74	1.34	5.96	12.7	2.2	30.3	.8	GW
32	2.04	.304	2.50	71	2.93	19.19	14.9	2.2	30.2	.2	GW
33	2.03	.186	.76	40	-.62	-.39	9.2	2.2	17.9	58.6	GW
34	1.95	.177	.71	44	.06	-.99	9.1	2.2	7.6	82.7	GW
35	2.09	.475	.70	48	4.55	24.75	22.7	2.2	41.2	.0	GW
36	2.24	.484	1.79	17	1.09	.15	21.6	2.2	53.0	18.9	GW
37	2.17	.263	1.13	25	.51	.43	12.1	2.2	45.5	36.2	GW
38	2.34	.551	2.48	19	1.01	.99	23.6	2.2	60.0	50.8	GW
39	2.21	.558	1.86	20	.02	-1.18	25.3	2.2	50.7	99.0	GW
40	2.14	.388	2.24	84	1.18	2.03	18.1	2.2	44.3	.0	GW
41	1.90	.330	1.16	21	.80	-.03	17.4	2.2	17.9	86.8	GW
42	2.31	.785	3.17	24	2.63	6.08	34.0	2.2	55.7	5.2	GW
43	1.70	.229	.63	22	.68	-1.21	13.5	2.2	1.4	65.9	Sandstein
44	1.84	.191	.76	29	.05	-.52	10.4	2.2	2.9	81.3	GW
45	2.05	.237	.85	23	-.81	-.14	11.6	2.2	25.8	93.7	GW
46	2.05	.233	.72	25	-.14	-1.53	11.4	2.2	26.1	82.7	GW
47	2.08	.473	2.10	20	2.02	4.31	22.7	2.2	40.0	16.4	SE
48	2.17	.641	2.40	21	1.56	1.61	29.5	2.2	48.2	22.5	GW

Tabelle 8.8: Statistische Kennwerte von 48 Erdbaulosen — Verhältnis E_{12}

8.2 Modellierung der Vorinformation

Die mathematische Modellierung des Datenmaterials (Tabelle 8.3 und 8.7) als Vorinformation kann am wirkungsvollsten im Rahmen der Bayesschen Theorie erfolgen. Für ausführliche Darstellungen dieser Theorie sei auf HARTIGAN (1983), ANG,TANG (1984), BOX,TIAO (1973) und STANGE (1977) verwiesen. Hier sollen nur einige Grundzüge kurz erläutert werden.

Die Theorie von Bayes gestattet die Kombination von Vorkenntnissen, z.B. über einen Parameter, und aktuellen, z.B. aus einer Stichprobe erhaltenen Informationen zu einer Gesamtinformation über diesen Parameter. Die a-priori-Dichte beinhaltet die Vorkenntnisse und ergibt in Kombination mit der Likelihood, die die Information aus der aktuellen Stichprobe enthält, durch Anwendung des Bayesschen Satzes die posteriori-Dichte.

$$\psi(\Theta | \vec{x}_n) = \frac{\psi(\Theta) \psi(\vec{x}_n | \Theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\Theta) \psi(\vec{x}_n | \Theta) d\Theta} = \frac{1}{k} \psi(\Theta) \psi(\vec{x}_n | \Theta) \quad (8.1)$$

- Θ : Parameter
- \vec{x}_n : n-dimensionaler Stichprobenvektor
- $\psi(\Theta | \vec{x}_n)$: posteriori-Dichte von Θ unter der Bedingung \vec{x}_n
- $\psi(\Theta)$: a-priori-Verteilung von Θ
- $\psi(\vec{x}_n | \Theta)$: Likelihood von \vec{x}_n bei festem Θ
- $\frac{1}{k}$: Normierungsfaktor

Gleichung (8.1) ist in der Mehrzahl der Fälle nur numerisch lösbar. Durch geschickte Wahl der a-priori-Dichte $\psi(\Theta)$ in Abhängigkeit der Verteilung der Zufallsvariablen x können für die posteriori-Dichte $\psi(\Theta | \vec{x}_n)$ jedoch Verteilungen erhalten werden, die vom gleichen Typ wie die a-priori-Dichte sind. Diese Verteilungen werden konjugierte a-priori-Verteilungen genannt. Die Parameter der posteriori-Verteilung lassen sich dann mathematisch einfach aus den Parametern der a-priori-Verteilung und der Likelihood berechnen.

Unterliegt die Zufallsvariable x einer Normalverteilung, so stellt die Normal-Gamma-2-Verteilung die konjugierte a-priori-Verteilung für den Vektor (μ, h) dar. $h = \frac{1}{\sigma^2}$ wird „Präzision“⁵ genannt. Die Parameter μ und h , die innerhalb eines Loses fest sind, werden also hier selbst als Zufallsvariable aufgefaßt und unterliegen einer Normal-Gamma-2-Verteilung (vgl. RAIFFA, SCHLAIFER

⁵Der Begriff „Präzision“ darf nicht mit der Präzision eines Meßverfahrens verwechselt werden (vgl. Kapitel 5.1)

(1969)).

Die Normal-inverse-Gamma-2-Verteilung für μ und σ als konjugierte a-priori-Verteilung ist zwar formal gleichwertig und anschaulicher als die Normal-Gamma-2-Verteilung, da der Ingenieur vornehmlich an den Größen μ und σ interessiert ist. Für die Parameterschätzung der Normal-Gamma-2-Verteilung existieren jedoch Maximum-Likelihood-Schätzer. Da ML-Schätzer im allgemeinen die größte Effizienz bei Schätzproblemen aufweisen, sind diese im folgenden verwendet worden.

Die Dichtefunktion der Normal-Gamma-2-Verteilung lautet (RAIFFA, SCHLAIFER (1969)) :

$$\begin{aligned} f_{N\Gamma}(\mu, h|\bar{x}_0; s_0^2; n_0; f_0) &= f_N(\mu|\bar{x}_0; h; n_0) * f_{\Gamma}(h|s_0^2; f_0) \\ &= \frac{\sqrt{hn_0} \left(\frac{1}{2}f_0s_0^2h\right)^{\frac{1}{2}f_0-1}}{\sqrt{2\pi} \frac{2\Gamma(\frac{f_0}{2})}{\Gamma(\frac{f_0}{2})}} f_0s_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}hn_0(\mu - \bar{x}_0)^2 - \frac{1}{2}f_0s_0^2h\right] \end{aligned} \quad (8.2)$$

Das Datenmaterial in den Tabellen 8.3 und 8.7 stellt den Beobachtungsvektor $(\mu; h)$ dar. Die Parameter \bar{x}_0, s_0^2, n_0 und f_0 werden durch folgende ML-Schätzer ermittelt (PÖHLMANN, RACKWITZ (1981)):

$$\bar{x}_0 = \frac{h_1}{h_2} \quad (8.3)$$

$$n_0 = \frac{h_2}{h_3h_2 - h_1^2} \quad (8.4)$$

$$s_0^2 = \frac{1}{h_2} \quad (8.5)$$

$$f_0 \approx (\ln h_2 - h_4)^{-1} \quad (8.6)$$

mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sigma_i^2} & h_2 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2} \\ h_3 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 & h_4 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \frac{1}{\sigma_i^2} \end{aligned}$$

Die Formeln für die Varianzen der ML-Schätzer können ebenfalls PÖHLMANN, RACKWITZ (1981) entnommen werden.

Die Parameter $\bar{x}'' , s''^2 , n'' , f''$ der posteriori-Dichte ergeben sich dann nach

Gleichung (8.7) ÷ (8.10) aus den Parametern $\bar{x}_0, s_0^2, n_0, f_0$ der Vorinformation und Parametern \bar{x}', s'^2, n', f' der aktuellen Stichprobe zu

$$n'' = n_0 + n' \quad (8.7)$$

$$f'' = f_0 + f' + 1 \quad (8.8)$$

$$\bar{x}'' = \frac{1}{n_0 + n'} (n_0 \bar{x}_0 + n' \bar{x}') \quad (8.9)$$

$$s''^2 = \frac{1}{f''} \left(f' s'^2 + f_0 s_0^2 + \frac{n_0 n' (\bar{x}_0 - \bar{x}')^2}{n_0 + n'} \right) \quad (8.10)$$

Wird für die Präzision h , eine Gamma-2-Verteilung angenommen, so wird damit implizit für die Verteilung von σ eine inverse-Gamma-2-Verteilung verwendet. Das erste und zweite Moment und der Modalwert dieser Verteilung lassen sich aus den Parametern der Gamma-2-Verteilung berechnen und ergeben sich zu:

$$E(\sigma) = s_0 \sqrt{\frac{1}{2} f_0} \frac{\left(\frac{1}{2} f_0 - \frac{3}{2}\right)!}{\left(\frac{1}{2} f_0 - 1\right)!} \quad (8.11)$$

$$Var(\sigma) = s_0^2 \frac{f_0}{f_0 - 2} - [E(\sigma)]^2 \quad (8.12)$$

$$\sigma_{mod} = s_0 \sqrt{\frac{f_0}{f_0 + 1}} \quad (8.13)$$

Die Dichte- und Verteilungsfunktion des Schlechteiles p kann mit Hilfe des Transformationssatzes für mehrdimensionale Zufallsvariable aus der Normal-Gamma-2-Verteilung berechnet werden. Die Herleitung erfolgt im Anhang. Die Dichtefunktion lautet:

$$f(p) = \int_0^{+\infty} f_{N\Gamma}(T_u - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{h}}; h) \frac{2\pi}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{[\Phi(p)]^2}{2}\right) dh \quad (8.14)$$

Die Verteilungsfunktion ergibt sich daraus zu

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \int_0^{+\infty} f_{N\Gamma}(T_u - \frac{u}{\sqrt{h}}; h) \frac{2\pi}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) dh du \quad (8.15)$$

mit $f_{N\Gamma}(T_u - \frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{h}}; h)$ nach Gleichung (8.2).

Der Erwartungswert und die Varianz der Verteilung von p ergeben sich zu

$$E(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi(u_p) f_{N\Gamma}(T_u - \frac{u_p}{\sqrt{h}}; h) \frac{1}{\sqrt{h}} dh du_p \quad (8.16)$$

$$Var(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\Phi(u_p)]^2 f_{N\Gamma}(T_u - \frac{u_p}{\sqrt{h}}; h) \frac{1}{\sqrt{h}} dh du_p - [E(p)]^2 \quad (8.17)$$

8.2.1 Ergebnisse für den Verdichtungsgrad

Tabelle 8.9 zeigt die ML-Schätzer der Parameter der Vorinformation für den Verdichtungsgrad nach den Gleichungen (8.3)÷(8.6), (8.11), (8.13), (8.16). Die Varianzen der ML-Schätzer sind ebenfalls verzeichnet. Der Parameter n_0

		$T_u = 95\%$	$T_u = 100\%$	zementverfestigte Lose $T_u = 98\%$
		$k = 17$	$k = 37$	$k = 8$
\bar{x}_0	[%v]	99.15	101.42	99.69
n_0		2.128	2.952	1.375
s_0^2		5.058	1.6796	2.755
f_0		3.937	2.750	11.359
$E(\sigma)$	[%v]	2.831	1.863	—
σ_{mod}	[%v]	2.008	1.110	—
$E(p)$	[%]	10.17	22.5	—
$Var(\bar{x}_0)$		0.13986	0.01538	0.2503
$Var(n_0)$		0.5325	0.4709	0.4732
$Var(s_0^2)$		0.7647	0.0555	0.1670
$Var(f_0)$		1.8233	0.4088	32.256
$Var(\sigma)$		2.2648	2.6882	—

Tabelle 8.9: ML-Schätzer für den Verdichtungsgrad

kann dabei als Stichprobenumfang einer fiktiven Stichprobe zur Schätzung des Mittelwertes μ und der Parameter f_0 kann als Zahl der Freiheitsgrade zur Schätzung der Varianz σ^2 interpretiert werden.

Wie aus Tabelle 8.9 ersichtlich, sind die Werte für n_0 und f_0 klein, die Vorinformation ist damit relativ diffus. Trotzdem läßt sich mit den gegebenen Parametern insbesondere bei einer relativ kleinen, aktuellen Stichprobe die

vorhandene Information mit Hilfe der Gleichungen (8.7)÷(8.10) wirkungsvoll verbessern.

Der große Wert für $f_0 = 11.4$ bei zementverfestigten Losen ist auf Grund der großen Varianz dieses Schätzwertes für die weitere Berechnung nicht brauchbar. Durch weiteres Datenmaterial muß der Schätzwert für f_0 hier verbessert werden. Die aus diesem Schätzwert berechneten Größen $E(\sigma)$, σ_{mod} und $Var(\sigma)$ wurden deshalb nicht in die Tabelle aufgenommen.

Abbildung 8.2 zeigt das kumulative Häufigkeitsdiagramm für σ und die angepaßte Verteilungsfunktion. Diese wurde durch Einsetzen der in Tabelle 8.9 geschätzten Parameter in die Verteilungsfunktion der inversen Gamma-2-Verteilung ermittelt. Wie aus Tabelle 8.9 hervorgeht, nimmt die Standard-

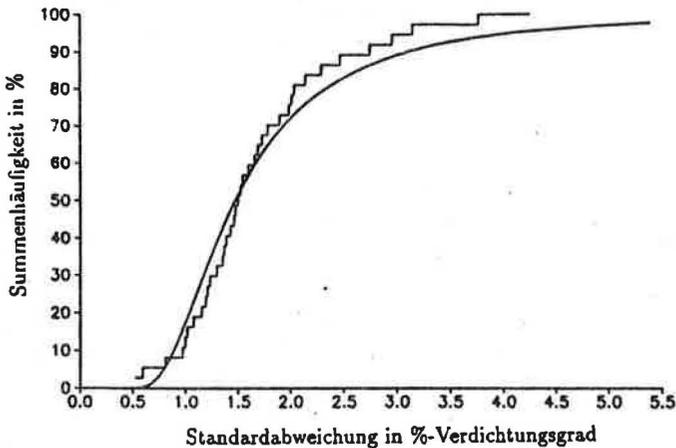


Abbildung 8.2: Häufigkeitsdiagramm und angepaßte Verteilungsfunktion (inverse-Gamma-2-Verteilung) für σ , ($T_u = 100\%$)

abweichung mit höherem gefordertem Grenzwert im Mittel von 2.82% auf 1.86% Verdichtungsgrad ab. Die Steigerung des Mittelwertes mit höherem gefordertem Grenzwert T_u ist dagegen relativ gering, von 99.15% auf 101.42% Verdichtungsgrad.

Der Erwartungswert der Schlechteile beträgt 10.2%(22.5%) bei einem gefordertem Grenzwert von $T_u = 95\%(100\%)$. Dabei ist zu beachten, daß die Verteilung der Schlechteile stark linksschief ist, der Modalwert also wesentlich niedriger liegt.

		$T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$ $k = 24$	$T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$ $k = 14$	$T_u = 120 \frac{MN}{m^2}$ $k = 7$
\bar{x}_0	$[\frac{MN}{m^2}]$	92.38	127.04	139.45
n_0		0.786	1.672	1.040
s_0^2		663.10	772.51	410.26
f_0		1.626	3.956	4.878
$E(\sigma)$	$[\frac{MN}{m^2}]$	37.88	34.94	24.21
σ_{mod}	$[\frac{MN}{m^2}]$	21.91	24.83	18.45
$E(p)$	$[\%]$	15.97	24.24	26.19
$Var(\bar{x}_0)$		35.149	33.011	56.345
$Var(n_0)$		0.0515	0.3991	0.3091
$Var(s_0^2)$		13951.9	21552.4	9859.4
$Var(f_0)$		0.5748	2.2353	6.797
$Var(\sigma)$		1346.2	341.54	109.1

Tabelle 8.10: ML-Schätzer für den E_{v_2} -Modul

8.2.2 Ergebnisse für den Verformungsmodul

Tabelle 8.10 enthält die geschätzten Parameter und Varianzen für den E_{v_2} -Modul. Die Parameter n_0 und f_0 sind wie beim Verdichtungsgrad relativ klein. Die Werte in der dritten Spalte der Tabelle 8.10 dürfen nicht überbewertet werden, da der Stichprobenumfang hier nur $k = 7$ beträgt und die Schätzer dementsprechend hohe Varianzen aufweisen.

Der Mittelwert der Lose beträgt bei einem geforderten Grenzwert von $T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$ ($120 \frac{MN}{m^2}$) im Mittel $92.38 \frac{MN}{m^2}$ ($139.45 \frac{MN}{m^2}$). Die Standardabweichung der Lose sinkt mit höherem geforderten Grenzwert im Mittel von $37.88 \frac{MN}{m^2}$ auf $24.21 \frac{MN}{m^2}$.

9 Die Prädiktorverteilung des Verdichtungsgrades und des $E_{v,2}$ -Modules

9.1 Theoretische Ableitung

Unter der Prädiktorverteilung versteht man die Verteilung einer Zufallsvariablen, die unter allen gegebenen Informationen wahrnehmungstheoretisch zu erwarten ist (vgl. AITCHISON/DUNSMORE (1975); RACKWITZ (1982)). Die gegebenen Informationen stellen hier zum einen die in Kapitel 8 quantifizierte Vorinformation dar und zum anderen die statistischen Abnahmekriterien mit ihren Entscheidungsregeln (Kapitel 3). Die Prädiktorverteilung ist ein statistisches Hilfsmittel zu Quantifizierung des „gefilterten Produktionsangebotes“. Sie stellt also die Verteilung dar, die erwartet werden kann, wenn eine Zufallsvariable aus der Grundgesamtheit der angenommenen Lose realisiert wird.

Die prädikative Dichte $f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma)$ der gemeinsamen Verteilung der Parameter μ und σ lautet unter Einbeziehung der Vorinformation über diese Parameter und einer statistischen Abnahmekontrolle, die zu einer Annahme des Prüfloses führt:

$$f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) = \frac{f_{N;\Gamma}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(\mu, \sigma)}{\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{N;\Gamma}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(\mu, \sigma) d\mu d\sigma} \quad (9.1)$$

$L(\mu, \sigma)$ stellt dabei die Operationscharakteristik des gewählten statistischen Prüfplanes dar und $f_{N;\Gamma}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A)$ die Dichte der Normal-inversen-Gamma-2-Verteilung.

$$f_{N;\Gamma}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) = \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{2\pi} s_0} \exp \left[-\frac{1}{2} n_0 \left(\frac{\mu - \bar{x}_0}{s_0} \right)^2 \right] * \\ \frac{2 \exp \left[-\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{f_0+1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} f_0 - 1 \right)! \left(\frac{1}{2} f_0 s_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (9.2)$$

Der Nenner in Gleichung (9.1) stellt die Wahrscheinlichkeit der Annahme eines Loses, das aus einer Grundgesamtheit mit Parametern $\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0$ stammt, dar.

Die Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardabweichung lautet:

$$f_{i\Gamma}(\sigma | s_0^2; f_0) = \frac{2 \exp \left[-\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma} \right)^2 \right]^{\frac{f_0+1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} f_0 - 1 \right)! \left(\frac{1}{2} f_0 s_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (9.3)$$

$$F_{i\Gamma}(\sigma | s_0^2; f_0) = \int_0^{\sigma} \frac{2 \exp \left[-\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma^*} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{2} f_0 \left(\frac{s_0}{\sigma^*} \right)^2 \right]^{\frac{f_0+1}{2}}}{\left(\frac{1}{2} f_0 - 1 \right)! \left(\frac{1}{2} f_0 s_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}} d\sigma^* \quad (9.4)$$

Die Dichte- und Verteilungsfunktion des Mittelwertes ergibt sich aus Gleichung (9.2) durch entsprechende Integration.

$$f_{Ni\Gamma}(\mu | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) = \int_0^{+\infty} f_{Ni\Gamma}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) d\sigma \quad (9.5)$$

$$F_{Ni\Gamma}(\mu | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) = \int_{-\infty}^{\mu} \int_0^{+\infty} f_{Ni\Gamma}(\mu^*, \sigma^* | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) d\sigma^* d\mu^* \quad (9.6)$$

Die Dichtefunktionen der Standardabweichung und des Mittelwertes nach einer positiven Abnahmeentscheidung bei der Kontrolle ergeben sich durch Integration von Gleichung (9.1) (marginale Dichten).

$$f_{pr\bar{a}}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\mu \quad (9.7)$$

$$f_{pr\bar{a}}(\mu) = \int_0^{+\infty} f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\sigma \quad (9.8)$$

Die entsprechenden Verteilungsfunktionen werden durch nochmalige Integration berechnet.

$$F_{pr\bar{a}}(\sigma) = \int_0^{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{pr\bar{a}}(\mu^*, \sigma^* | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\mu^* d\sigma^* \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} F_{pr\bar{a}}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\mu} \int_0^{+\infty} f_{pr\bar{a}}(\mu^*, \sigma^* | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\sigma^* d\mu^* \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\mu} \int_0^{+\infty} f_{Ni\Gamma}(\mu^*, \sigma^* | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(\mu, \sigma) d\sigma^* d\mu^*}{\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Ni\Gamma}(\mu^*, \sigma^* | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(\mu, \sigma) d\mu^* d\sigma^*} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Die prädikative Dichte des Merkmals lautet:

$$\psi_{pr\bar{a}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x|\mu; \sigma) f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\sigma d\mu \quad (9.11)$$

$\varphi(x|\mu; \sigma)$ ist dabei die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ .

Die Verteilungsfunktion des Merkmals kann wieder durch Integration über x erhalten werden:

$$\Psi_{pr\bar{a}}(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x^*|\mu; \sigma) f_{pr\bar{a}}(\mu, \sigma|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) d\sigma d\mu dx^* \quad (9.12)$$

In RACKWITZ (1982) werden ähnliche Ansätze mit teilweise unterschiedlichen Ergebnissen dargelegt. Vereinzelt werden auch Näherungslösungen obiger Integrale angegeben. In den Kapiteln 9.2 und 9.3 werden die exakten prädikativen Dichten und Verteilungsfunktionen für μ, σ und p für eine numerische Berechnung und graphische Veranschaulichung verwendet.

Die prädikative Dichte des Schlechtaufteiles p lautet:

$$f_{pr\bar{a}}(p|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) = \frac{f(p|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) * L(p)}{\int_0^1 f(p^*) L(p^*|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) dp^*} \quad (9.13)$$

mit $f(p)$ nach Gleichung (8.14). $L(p)$ stellt die Annahmewahrscheinlichkeit des Prüflosen in Abhängigkeit von p dar und ist vom gewählten Prüfplan abhängig.

Der Zähler in Gleichung (9.13) wird auch als „Trennfunktion“ bezeichnet. Er stellt keine Wahrscheinlichkeitsdichte dar.

Die Verteilungsfunktion von p nach der Kontrolle ergibt sich wieder durch Integration über p .

$$\begin{aligned} F_{pr\bar{a}}(p|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) &= \int_0^p f_{pr\bar{a}}(p^*|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0; A) dp^* \\ &= \frac{\int_0^p f(p^*|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(p^*) dp^*}{\int_0^1 f(p^*|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(p^*) dp^*} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Der Zähler in Gleichung (9.14) wird die „exakte Charakteristik“ genannt und stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß höchstens $p * 100\%$ Schlechtaufteil

durch die Kontrolle geht. $F_{pr\bar{a}}(p|\bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß unter den angenommenen Losen ein einzelnes Prüflös höchstens den Schlechtanteil p enthält. Die Verteilungsfunktionen in Gleichung (9.9), (9.10) und (9.14) werden deshalb auch „Durchschlupfverteilungen“ genannt.

Die mittlere Rückweiserate, also der Anteil der Lose des ungefilterten Produktionsangebotes, der im Mittel nicht akzeptiert wird, berechnet sich zu

$$R = 1 - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Nir}(\mu, \sigma | \bar{x}_0; n_0; s_0^2; f_0) L(\mu, \sigma) d\mu d\sigma \quad (9.15)$$

Ist die Standardabweichung im Prüflös bei der Abnahme bekannt, so muß für $L(\mu, \sigma)$ bei der Integration in den Gleichungen (9.1)÷(9.11) $L(\mu)$ eingesetzt werden und die Integrationen über σ können entfallen. Weitere Änderungen sind nicht nötig.

In den folgenden Abbildungen wird die Prädiktorverteilung des Schlechtanteiles p , des Mittelwertes μ , der Standardabweichung σ und des Merkmals für den Verdichtungsgrad und den $E_{v,2}$ -Modul graphisch dargestellt. Als Operationscharakteristik wurde immer eine nicht-zentrale t-Verteilung (einfacher Stichprobenprüfplan mit unbekannter Standardabweichung) mit $n_s = 3, 8, 13$ und $k_s = 0.88$ verwendet. Die Graphen wurden durch umfangreiche, numerische Integrationsrechnungen gewonnen.

9.2 Ergebnisse für den Verdichtungsgrad

geforderter Grenzwert $T_u = 95\%$ Verdichtungsgrad

In Abbildung 9.1 ist bei einem geforderten Grenzwert von $T_u = 95\%$ die Verteilungsfunktion des Schlechtanteiles p des ungefilterten Produktionsangebotes (keine Kontrolle) und die zu erwartenden Verteilungsfunktionen nach statistischen Abnahmeprüfungen (9.14) für verschiedene Stichprobenumfänge zu sehen. Ferner sind die Operationscharakteristiken der Einfachstichprobenprüfpläne mit unbekannter Standardabweichung für $n_s = 3, 8, 13$ und $k_s = 0.88$ eingezeichnet. Außerdem können die exakte Charakteristik und die zu den einzelnen Stichprobenumfängen gehörigen Rückweiseraten entnommen werden. Für die Vorinformationsparameter \bar{x}_0, s_0^2, n_0 und f_0 wurden die Werte der Tabelle 8.9 verwendet. Im ungefilterten Produktionsangebot treten Schlechtanteile größer 10 % mit 33%-iger Wahrscheinlichkeit auf. Durch fortlaufende statistische Abnahmeprüfungen mit $n_s = 3$ ($n_s = 13$) reduziert sich diese Wahrscheinlichkeit auf 20.5% (17%) im gefilterten Produktionsangebot. Schlechtanteile größer 25% sind nach einer Filterung mit $n_s = 3$ ($n_s = 13$) in

4.7% (1.9%) der Lose enthalten.

Die Abbildungen 9.2 und 9.3 zeigen die Dichte- und Verteilungsfunktion de

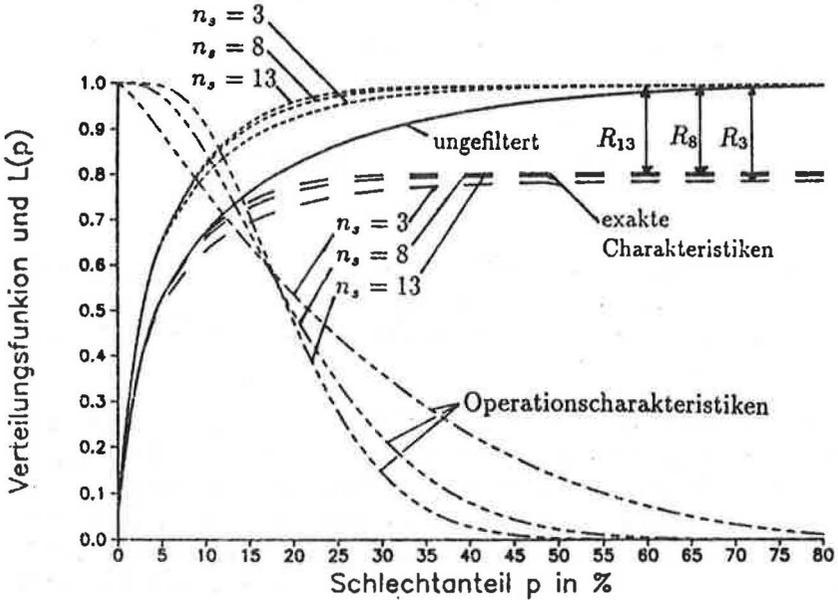


Abbildung 9.1: Operationscharakteristiken, exakte Charakteristiken und prädikative Verteilungsfunktionen des Schlechtes p , $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

Standardabweichung ohne und mit Abnahmeprüfungen nach den Gleichungen (9.3), (9.4), (9.7) und (9.9).

Abbildung 9.4 zeigt die Verteilungsfunktion des Mittelwertes des ungefilterten Produktionsangebotes und des durch Abnahmeprüfungen gefilterten Produktionsangebotes. Aus den Abbildungen 9.1 mit 9.4 ist ersichtlich, daß bereits Abnahmeprüfungen mit einem geringem Stichprobenumfang in Bezug auf die Filterung des ungefilterten Produktionsangebotes den entscheidenden Einfluß haben. Größere Stichprobenumfänge haben nur eine geringfügig bessere Filterwirkung. Dies drückt sich auch in den vom Stichprobenumfang weitgehend unabhängigen Rückweiseraten aus.

Abbildung 9.5 zeigt die Dichtefunktion des Schlechtes nach Gleichung (8.14) und die Trennfunktion (vgl. (9.13)). Die Flächen zwischen der Dichte- und der Trennfunktion bzw. zwischen der Trennfunktion und der Nulllinie sind ein Maß für die wahren Irrtumswahrscheinlichkeiten. Diese

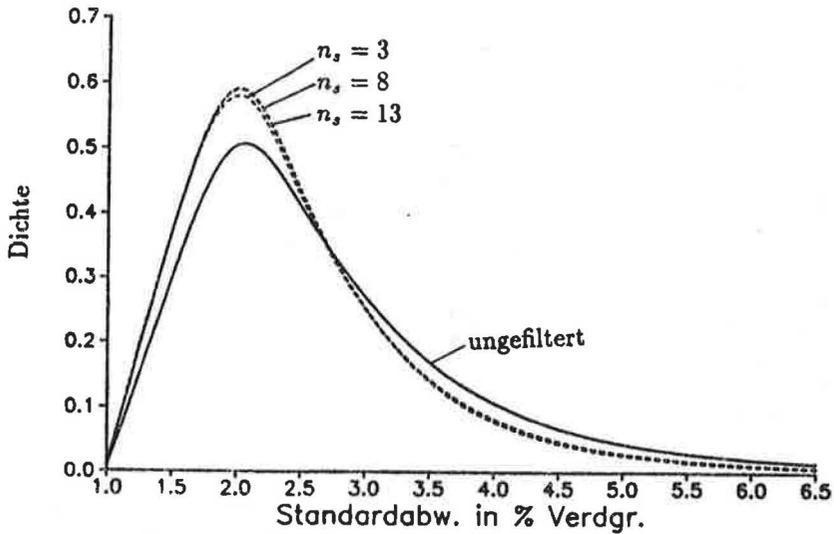


Abbildung 9.2: Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

können nur in Verbindung mit der Vorinformation erhalten werden, da die Operationscharakteristik nur die bedingten Irrtumswahrscheinlichkeiten angibt. Größere Stichprobenumfänge haben auf die Reduzierung der Irrtumswahrscheinlichkeiten einen stärkeren Einfluß als auf die Filterung des Produktionsangebotes.

geforderter Grenzwert $T_u = 100\%$ Verdichtungsgrad

Die Abbildungen 9.6 und 9.7 zeigen die Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardabweichung des ungefilterten Produktionsangebotes und des mittels statistischer Prüfpläne gefilterten Produktionsangebotes. Dabei wurden die Vorinformationsparameter aus Tabelle 8.9 bei einem geforderten Grenzwert von $T_u = 100\%$ Verdichtungsgrad verwendet.

In den Abbildungen 9.8 und 9.9 ist die Dichte- und Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach Abnahmeprüfungen nach (9.5) und (9.6), sowie (9.9) und (9.11) dargestellt. Aus den Abbildungen 9.6 mit 9.10 sind die Auswirkungen der statistischen Abnahmeprüfungen anschaulich ersichtlich. Durch die Abnahmeprüfungen wird nicht nur eine Fraktile überprüft, sondern gleichzeitig findet auch eine Filterung bezüglich der Standardabweichungen statt. Standardabweichungen größer 2.5% Verdichtungsgrad treten im ungefilterten Produktionsangebot mit einer Wahrscheinlichkeit von 16% auf, nach einer kontinuierlichen statistischen Abnahmeprüfung mit $n_s = 8$ dagegen nur noch mit 7%-iger Wahrscheinlichkeit im gefilterten Produktionsangebot. Legt

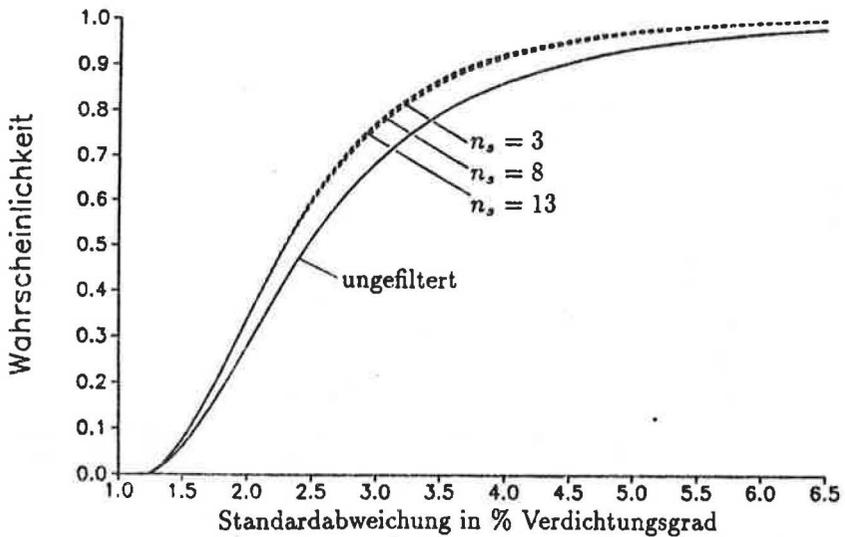


Abbildung 9.3: Verteilungsfunktion der Standardabweichungen vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

man als Grenzwert für eine homogene Schüttung einen Variationskoeffizienten von 5% zugrunde, so erkennt man aus Abbildung 9.7, daß dieser schon bei einer statistischen Abnahmeprüfung mit $n_s = 3$ in praktisch allen Fällen eingehalten ist, da Standardabweichungen größer 5% Verdichtungsgrad nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner 1% vorkommen und der Einfluß des Mittelwertes bei den relevanten Größenordnungen auf den Variationskoeffizienten relativ gering ist.

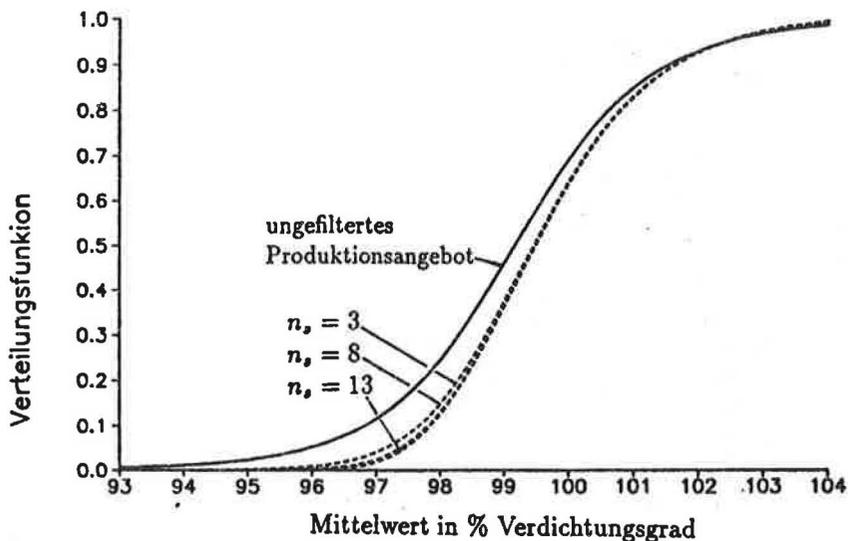


Abbildung 9.4: Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

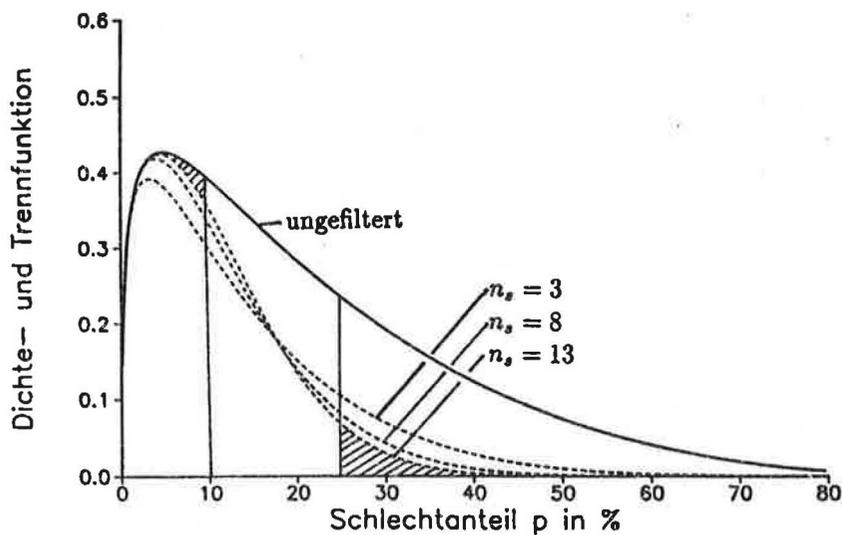


Abbildung 9.5: Dichte- und Trennfunktion des Schlechtanteiles p , $T_u = 95\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

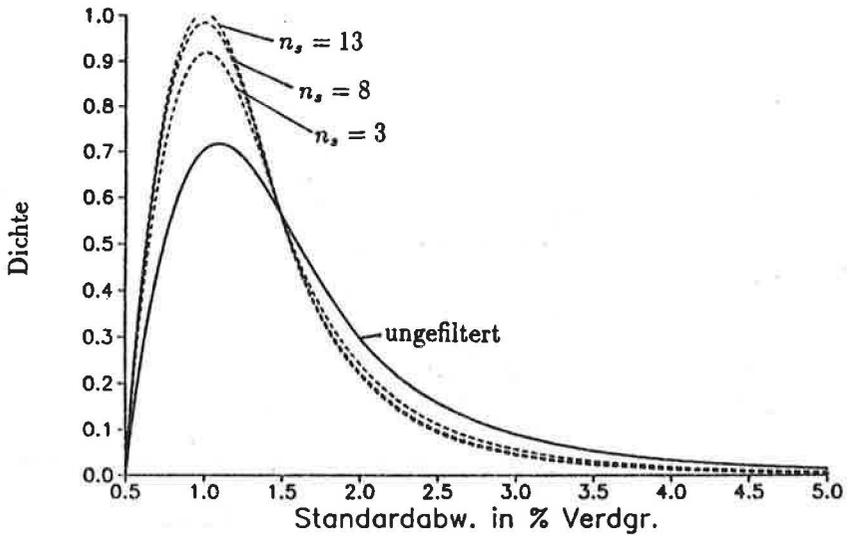


Abbildung 9.6: Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

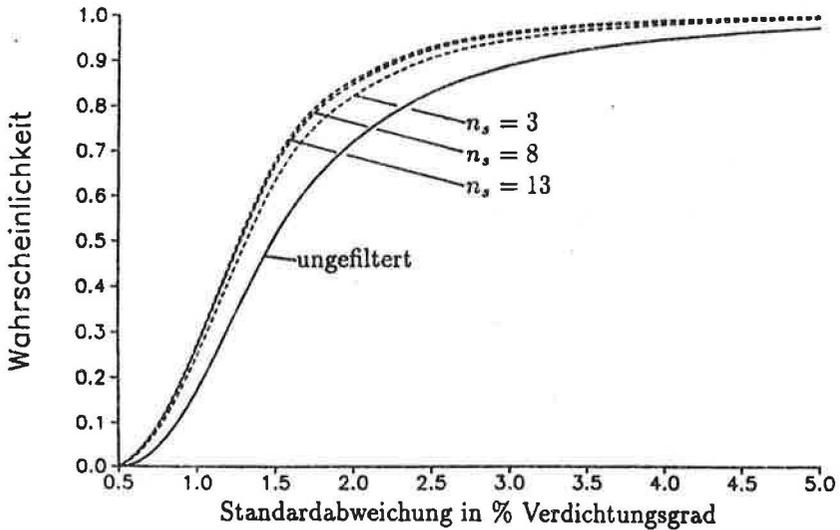


Abbildung 9.7: Verteilungsfunktion der Standardabweichung vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

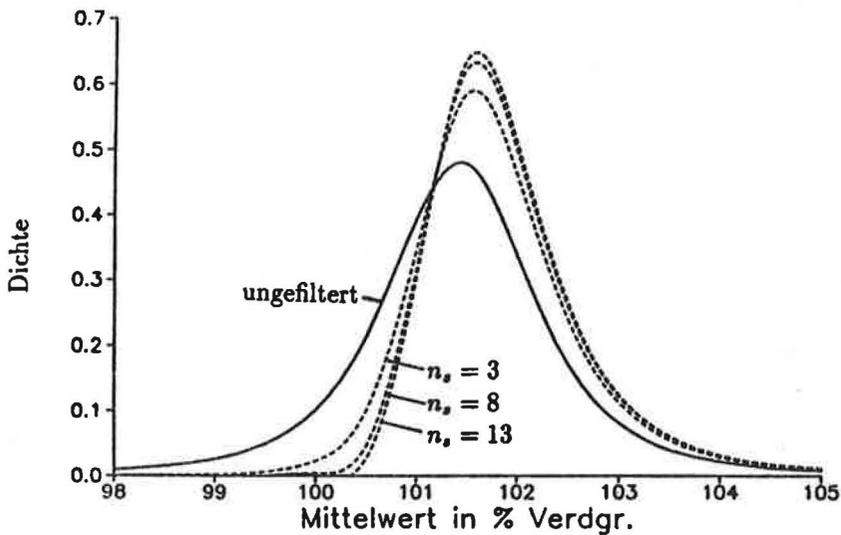


Abbildung 9.8: Dichtefunktionen des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

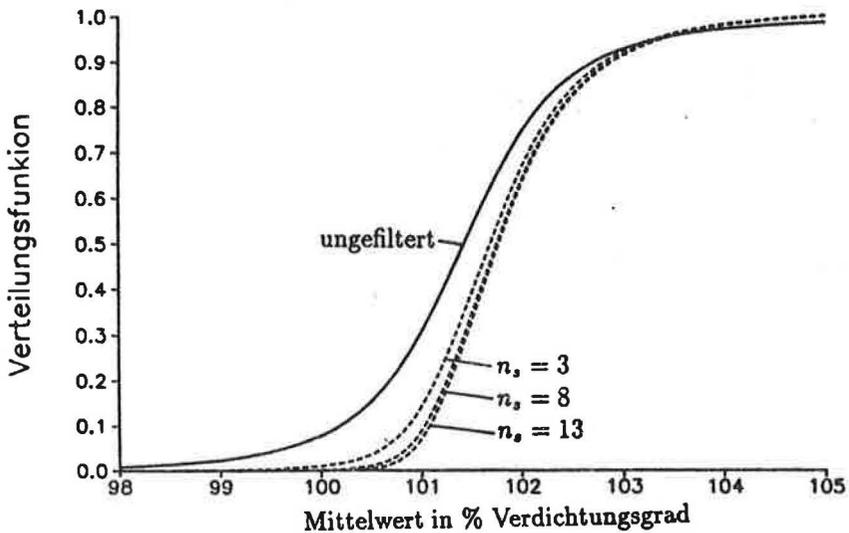


Abbildung 9.9: Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

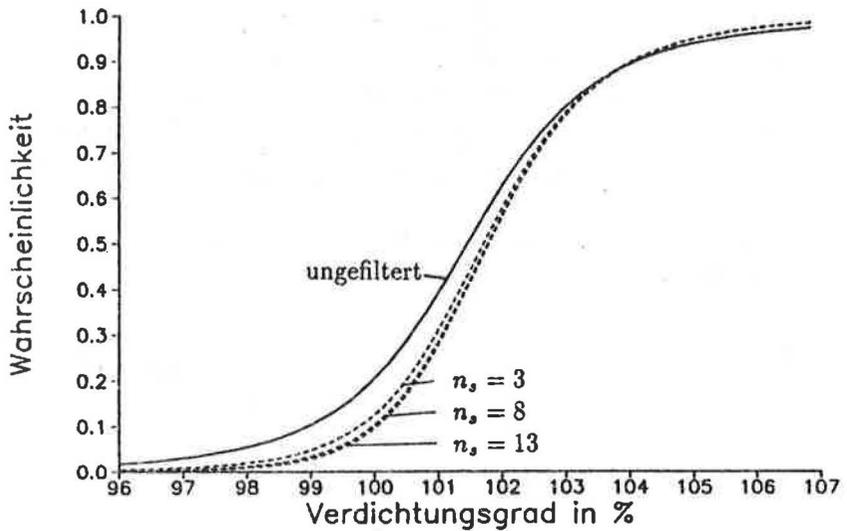


Abbildung 9.10: Verteilungsfunktion des Verdichtungsgrades vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100\%$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

9.3 Ergebnisse für den E_{v2} -Modul

geforderter Grenzwert $T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$

Die Abbildungen 9.11 und 9.12 zeigen die Dichte- und Verteilungsfunktionen der Standardabweichung des gefilterten und ungefilterten Produktionsangebotes. In Abbildung 9.13 ist die Verteilungsfunktion des Schlechtanteiles p

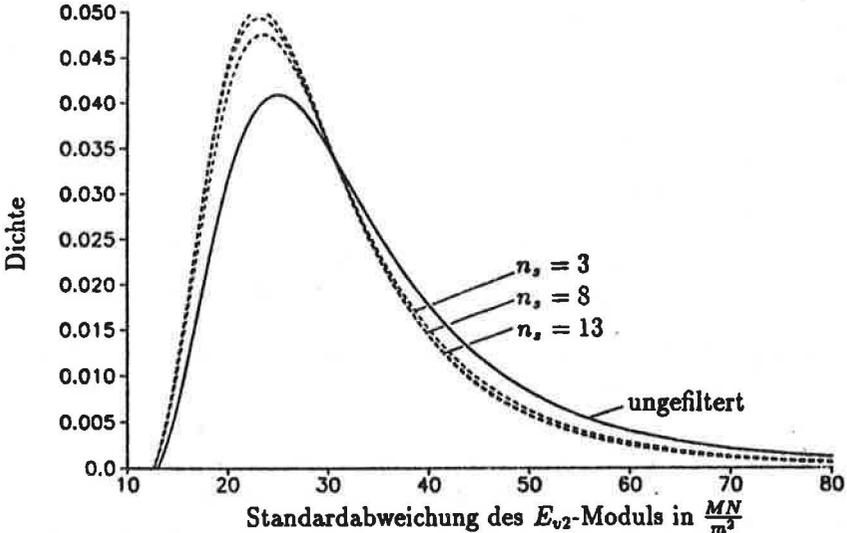


Abbildung 9.11: Dichtefunktion der Standardabweichung vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

vor und nach Abnahmeprüfungen nach (8.15) und (9.14) gezeichnet. Ferner sind die zugehörigen Operationscharakteristiken eingetragen. Auch hier gilt wieder, daß bereits eine statistische Abnahmeprüfung mit geringem Stichprobenumfang den entscheidenden Anteil an der Filterung des Produktionsangebotes hat.

geforderter Grenzwert $T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$

Die Abbildungen 9.14 und 9.15 zeigen die Dichte- und die Verteilungsfunktion des Mittelwertes nach den Gleichungen (9.5), (9.6), (9.8) und (9.10). Die zugehörigen Vorinformationsparameter sind in Tabelle 8.10 zu finden. Aus Abbildung 9.16 ist die Verteilungsfunktion des Schlechtanteiles, sowie die Operationscharakteristiken der verwendeten Prüfpläne ersichtlich.

Bezüglich der Stichprobenumfänge bei den Prüfplänen gelten hier die gleichen Aussagen wie beim Verdichtungsgrad. Die Abbildungen 9.11 mit 9.16 zeigen das gefilterte Produktionsangebot für verschiedene statistische Ab-

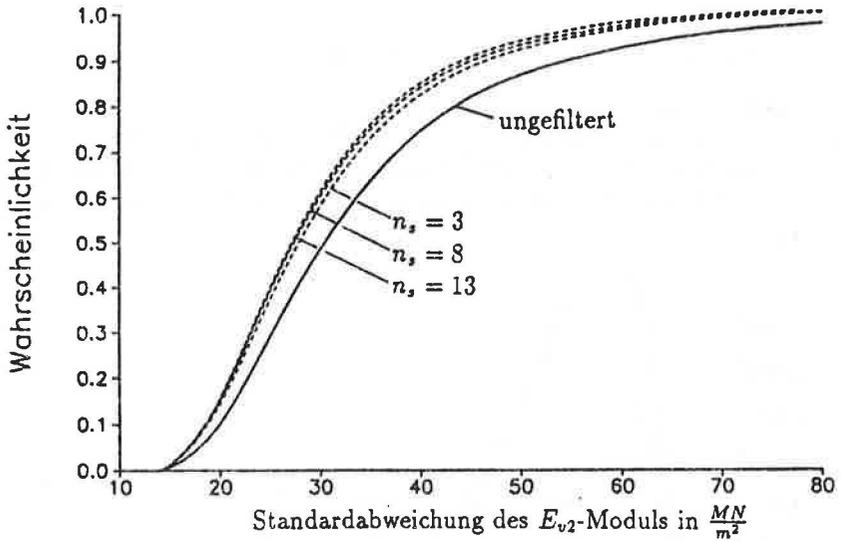


Abbildung 9.12: Verteilungsfunktion der Standardabweichung vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

nahmeprüfungen. Sind diese im Stadium der Bemessung nach der probabilistischen Sicherheitstheorie bekannt, so können die Verteilungsfunktionen des gefilterten Produktionsangebotes in die Berechnung Eingang finden. Ohne die statistischen Abnahmeprüfungen müßten die Verteilungsfunktionen des ungefilterten Produktionsangebotes verwendet werden. Die dadurch verbundene Verringerung der Versagenswahrscheinlichkeit ist von der gestellten Bemessungsaufgabe abhängig.

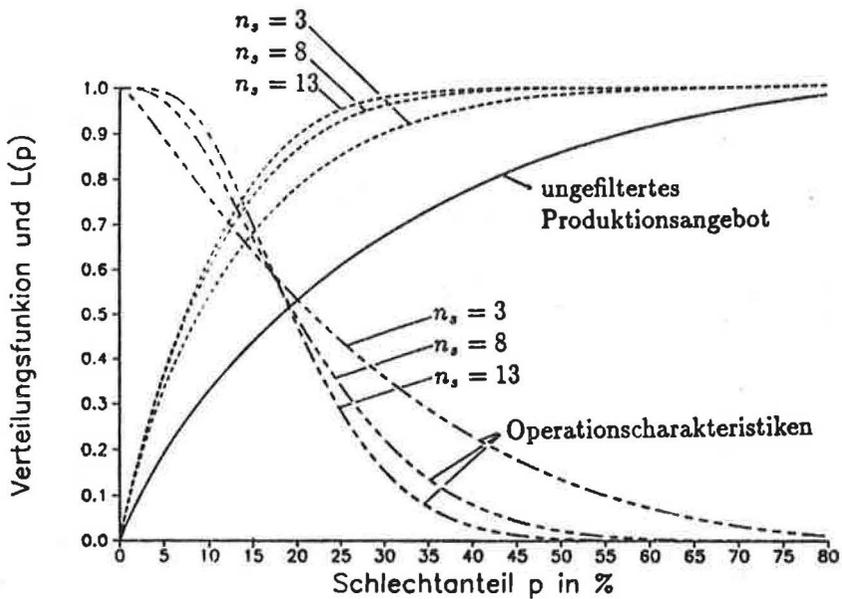


Abbildung 9.13: Verteilungsfunktion des Schlechtaufwands vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 100 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

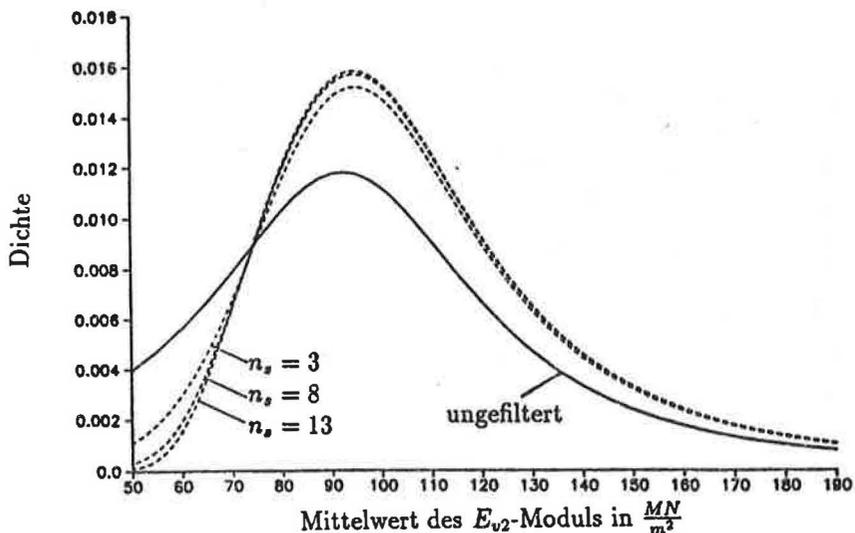


Abbildung 9.14: Dichtefunktionen des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

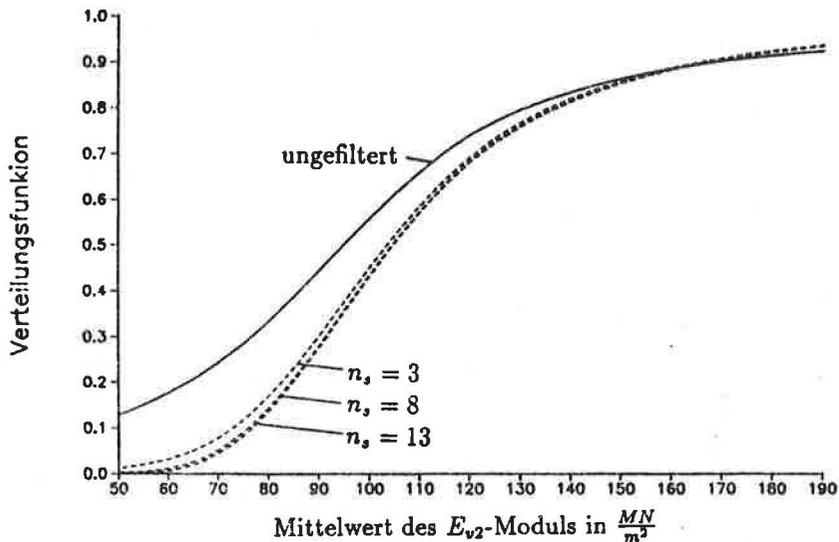


Abbildung 9.15: Verteilungsfunktion des Mittelwertes vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

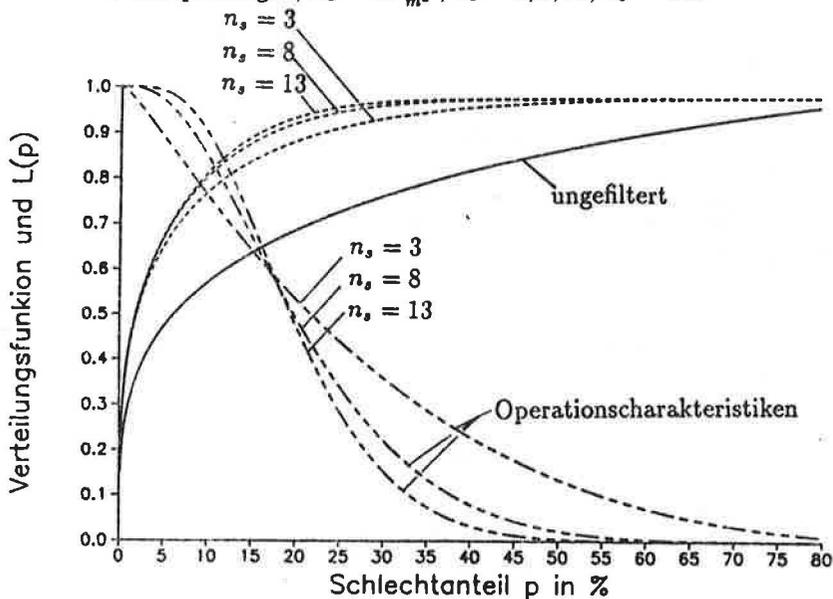


Abbildung 9.16: Verteilungsfunktion des Schlechteiles vor und nach statistischen Abnahmeprüfungen, $T_u = 45 \frac{MN}{m^2}$, $n_s = 3, 8, 13$, $k_s = 0.88$

10 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, die Überprüfung der Verdichtung im Erdbau auf eine wissenschaftliche Grundlage zu stellen. Die theoretischen Grundlagen für Prozeß- und Abnahmekontrollen wurden dargelegt und für die im Erdbau teilweise mögliche Schwachstellenprüfung wurde ein neuer, statistischer Prüfplan hergeleitet.

Der zufällige Prüffehler (Wiederhol- und Vergleichstreue) bei der Bestimmung des Verdichtungsgrades wurde berechnet und in die Formulierung der Anforderung miteinbezogen.

Die optimale, geometrische Anordnung der Versuchspunkte unter Berücksichtigung der Autokorrelation wird angegeben.

Da eine Aussage über die Auswirkungen von Abnahmekontrollen nur in Verbindung mit dem wirklichen Produktionsangebot möglich ist, wurde dieses in einer umfangreichen Datensammlung ermittelt und einer statistischen Analyse unterzogen. Die erhaltene Vorinformation wurde dann mittels Bayescher Theorie quantifiziert. Die Auswirkungen der statistischen Abnahmekontrollen auf das ungefilterte Produktionsangebot können aus den ermittelten Prädiktorverteilungen erhalten werden.

Damit ist es gelungen für den Erdbau ein System von Qualitätsprüfungen aufzustellen, das auf statistischen Grundlagen beruht und das für eine effektive Qualitätssicherung notwendig ist.

Für die praktische Anwendung wurden die benötigten Prüfplanparameter berechnet und in Tabellen zur Verfügung gestellt. Der Anwender muß nur noch entscheiden, welcher Prüfplan für ihn im Einzelfall die optimale Lösung darstellt.

11 Anhang

Fehlerabschätzung bei Vernachlässigung des letzten Summanden in Gleichung (3.90)

Es gilt:

$$\text{Cov}(\bar{x}_m; s_m) = f_{m,n} \sigma^2$$

mit $f_{m,n}$ nach Tabelle 3.4.

Mit (3.81) und (3.95) läßt sich (3.90) zu

$$\frac{\sigma_z}{\sigma} = A = \sqrt{\frac{\text{Var}(u_m)}{n_{o,s}} + k_{o,s}^2 \frac{v_{m,n}}{n_{o,s}} + 2k_{o,s} f_{m,n}} \quad (11.1)$$

umformen. Bei Vernachlässigung des letzten Summanden unter der Wurzel in (11.1) gilt

$$\frac{\sigma_z}{\sigma} = B = \sqrt{\frac{\text{Var}(u_m)}{n_{o,s}} + k_{o,s}^2 \frac{v_{m,n}}{n_{o,s}}} \quad (11.2)$$

Das Verhältnis $\frac{\sigma_z}{\sigma}$ wird bei Vernachlässigung des letzten Summanden je nach Vorzeichen von $k_{o,s}$ entweder über- oder unterschätzt. Der Fehler ist am Größten für große Werte von m . In Tabelle 11.1 ist der prozentuale Fehler

$$F = \frac{A - B}{A} 100 \quad (11.3)$$

bei Vernachlässigung des letzten Summanden in (11.1) in Abhängigkeit von m , $n_{o,s}$ und $k_{o,s}$ enthalten. Wie aus Tabelle 11.1 ersichtlich ist, ist der prozentuale Fehler relativ gering. Da, wie in Kapitel 3.4.3 erläutert wird, der Prüfplan so gewählt werden soll, daß sich möglichst kleine Absolutwerte für $k_{o,s}$ ergeben sollen, ist die Vernachlässigung des Summanden gerechtfertigt.

Herleitung der Dichtefunktion der Schlechtanteile p aus einer Normal-Gamma-2-Verteilung

Die Dichtefunktion $f_{N\Gamma}(\mu; h)$ der Normal-Gamma-2-Verteilung ist in Gleichung (8.2) gegeben.

Unter Verwendung des Transformationssatzes für mehrdimensionale Zufallsvariablen erhält man mit

$$\begin{aligned} u_p &= (T_u - \mu) \sqrt{h} = u_1 \\ h &= h = u_2 \end{aligned}$$

und der Konditionaldeterminante

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \frac{d\mu}{du_1} & \frac{d\mu}{du_2} \\ \frac{dh}{du_1} & \frac{dh}{du_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{h}} & \frac{1}{2}u_p h^{-\frac{3}{2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| -\frac{1}{\sqrt{h}} \right|$$

die Dichtefunktion von u_p zu

$$\psi(u_p) = \int_0^{\infty} f_{N\Gamma}(\mu; h) \mathbf{I} dh = \int_0^{\infty} f_{N\Gamma}\left(T_u - \frac{u_p}{\sqrt{h}}; h\right) \frac{1}{\sqrt{h}} dh$$

Die Dichtefunktion $f(p)$ erhält man durch die Substitution

$$p = \Phi(u_p)$$

und

$$f(p) = \frac{\psi(u_p)}{\frac{dp}{du_p}} = \frac{\psi(u_p)}{\varphi(u_p)}$$

mit

$$\varphi(u_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_p^2}{2}\right)$$

zu

$$\begin{aligned} f(p) &= \psi(u_p) \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{u_p^2}{2}\right) \\ &= \psi\left(\Phi^{-1}(p)\right) \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{[\Phi^{-1}(p)]^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$k_{o,s}$	$n_{o,s}$	$m = 3$	$m = 7$	$m = 14$	$m = 20$
.10	3.0	0.93	1.52	1.91	2.10
.10	6.0	0.97	1.63	2.07	2.28
.10	11.0	1.01	1.86	2.11	2.30
.50	3.0	3.84	6.03	7.50	8.19
.50	6.0	4.07	6.57	8.18	8.90
.50	11.0	4.23	7.45	8.36	8.99
.75	3.0	4.83	7.40	9.26	10.06
.75	6.0	5.18	8.23	10.16	10.99
.75	11.0	5.41	9.33	10.40	11.13
1.00	3.0	5.28	7.96	10.04	10.86
1.00	6.0	5.74	9.04	11.08	11.95
1.00	11.0	6.03	10.26	11.39	12.15

Tabelle 11.1: prozentualer Fehler bei der Berechnung von $\frac{\sigma_x}{\sigma}$ ohne den letzten Summanden in (11.1)

12 Literatur

- [1] AASHO (1962)
The AASHO Road Test, Materials and Construction,
Highway Research Board, Special Report 61B
- [2] AITCHISON, J.; DUNSMORE, I. (1975)
Statistical Prediction Analysis,
Cambridge
- [3] ALBER, D.; REITMEIER, W. (1986)
Beschreibung der räumlichen Streuungen von Bodenkennwerten mit Hilfe der Zeitreihenanalyse,
Heft 7 der Schriftenreihe des Lehrstuhles für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der TU München
- [4] ALBER, D. (1987)
Ein stochastisches Bodenmodell für geotechnische Aufgaben,
Heft 8 der Schriftenreihe des Lehrstuhles für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der TU München
- [5] ANG, A. H-S.; TANG, W. H. (1984)
Probability Concepts in Engineering Planning and Design,
Vol. 1 and 2, John Wiley & Sons, New York
- [6] BAECHER, G. B. (1982)
Simplified Geotechnical Data Analysis,
NATO Advanced Study Institute on Structural and Geotechnical Reliability, Ronne, Denmark
- [7] BAKER, R. F. (1966)
Materials Control and Test Procedures,
J. of the Construction Division, No.9, S.17
- [8] BECHINGER, W. (1971)
Lastplattenversuche und statistische Auswertungsmethoden der Versuchsergebnisse,
Strassen- und Tiefbau, H.3, S.187
- [9] BEHR, H. (1988)
Bestimmung der Wiederhol- und Vergleichpräzision mehrerer nicht zerstörungsfreier in-situ-Dichtemeßverfahren in einem Ringversuch,
28. Erfahrungsaustausch über Erdarbeiten im Straßenbau, Hann. Münden

- [10] BMDP (1981)
Statistical Software,
Department of Biomathematics, University of California, Los Angeles
- [11] BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. (1970)
Time Series Analysis, Forecasting and Control,
Holden Day
- [12] BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. (1973)
Bayesian Inference in Statistical Analysis,
Addison-Wesley Publishing Company
- [13] BUB, H. (1976)
Versagenswahrscheinlichkeit und Sicherheit,
Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Bodenmechanik, Nr.32,
S.35-44
- [14] BURR, J. W. (1976)
Statistical Quality Control Methods,
Marcel Dekker, Inc. New York
- [15] CHARBONNEAU, H. C.; WEBSTER, G. L. (1978)
Industrial Quality Control,
Prentice-Hall, Inc.
- [16] CORNISH, D. C.; JEPSON, G.; SMURTHWAITE, M. J. (1981)
Sampling Systems for Process Analysers,
Butterworths London
- [17] CORRAL, L. (1983)
*Advantages and disadvantages of the different routine tests for sta-
tistical quality control*,
4. ICASP, Florenz, S.1489
- [18] DAVIS, F. J. (1953)
Quality control of earth embankments,
3. Int. Conf. on Soil Mech. a. Found. Eng., Session 3/2, S.218
- [19] DEUTLER, T. (1987)
*Ringanalysen zur Bestimmung der Prüffehler von nicht zerstörungs-
freien Dichtemeßverfahren auf Baustellen, Teil 1, Schätzfunktion an-
hand eines mathematisch-statistischen Versuchsplan-Modells*,
Forschungsauftrag Nr.5.081, Bundesanstalt für Straßenwesen

- [20] DEUTLER, T. (1989)
Prüfpläne für Variablenprüfung anhand von fehlerbehafteten Werten bei vorgegebenem Grenzwert für wahre Werte,
 Discussion Paper 388, Universität Mannheim
- [21] DIN 18125 (1986)
Bestimmung der Dichte des Bodens,
 Teil 1 und 2
- [22] DIN 18127 (1976)
Proctorversuch
- [23] DIN 55350 (1987)
Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik
- [24] FANG, H. Y. (1975)
Sampling plans and construction control,
 2. ICASP, Aachen, S.323-327
- [25] FISZ, M. (1976)
Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik,
 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- [26] VAN DE FLIERT, C.; SCHRAMM, H. (1977)
Quality control of the Pavements in the Netherlands,
 Transportation Research Board, No. 652
- [27] FLOSS, R. (1973)
Organisation und Ausführung der Überwachung von Erdarbeiten,
 Straße und Autobahn, H.9, S.377
- [28] FLOSS, R. (1969)
Erdbautechnische Voraussetzungen für standardisierte Straßenbefestigungen,
 Straße und Autobahn, H.2, S.39-45
- [29] FLOSS, R. (1978)
Die Oberflächenverdichtung im Erdbau,
 Baupraxis, Nr.10, S.8
- [30] VAN GANZE, R. (1975)
Statistical interpretation of test results of disturbed soil samples,
 2. ICASP, Aachen, S.511-521

- [31] GEIGER, W. (1986)
Qualitätslehre,
Vieweg Verlag
- [32] GRAF, U.; HENNING H.-J.; STANGE, K.; WILRICH, P.-TH.
(1987)
Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik,
4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [33] GRUBBS, F. E. (1948)
On estimating precision of measuring instruments and product variability,
J. of the American Statistical Association, No. 42, S.243-264
- [34] GRUBER, N.; OBERMAYER, J.; FLOSS, R. (1983)
Beschleunigungsmessungen an Vibrationswalzen zum Nachweis der Bodenverdichtung,
Symposium Meßtechnik im Erd- und Grundbau, München
- [35] GUMBEL, E. J. (1958)
Statistics of Extremes,
Columbia University Press
- [36] HARTIGAN, J. A. (1983)
Bayes Theory,
Springer-Verlag, New York u. a.
- [37] HEINHOLD, J.; GAEDE, K.-W. (1979)
Ingenieurstatistik,
Oldenbourg Verlag
- [38] HINKLEY, D. V. (1969)
On the ratio of two correlated normal random variables,
Biometrika, Bd.56, Nr.3, S.635
- [39] JOHNSON, N. L.; KOTZ, S. (1970)
Continuous univariate distributions,
Teil 1 u. 2, Houghton Mifflin Company
- [40] JORGENSEN, J. L. (1969)
Measuring the Variability of Compacted Embankments,
Highway Research Record, No.290, S.23-34

- [41] JURAN, J. M. (1962)
Quality Control Handbook,
McGraw-Hill
- [42] JURAN, J. M.; GRYNA, F. M. (1980)
Quality planning and analysis,
McGraw-Hill, 2. Auflage
- [43] KENDALL, M. G.; BUCKLAND, W. R. (1971)
A Dictionary of Statistical Terms,
Longmann-Verlag
- [44] KENDALL, M. G.; STUART, A. (1977)
The Advanced Theory of Statistics,
Vol. 1, Charles Griffin & Company Ltd., London
- [45] KÖNIG, G.; HOSSER, D.; SCHOBBE, W. (1982)
Sicherheitsanforderungen für die Bemessung von baulichen Anlagen,
Der Bauingenieur, Bd.57, S.69
- [46] KREYSZIG, E. (1979)
Statistische Methoden und ihre Anwendungen,
Vandenhoeck & Ruprecht
- [47] KÜHLMAYER, M. (1970)
Die nicht-zentrale t-Verteilung,
Lecture Notes in operation research and mathematical systems,
Heft 31
- [48] KÜHLMAYER, M. (1974a)
Praxisnahe Stichprobenpläne mit Vorinformation,
Tech. Mitt. Krupp Forschungsberichte, S.63-74
- [49] KÜHLMAYER, M. (1974b)
Praxisbezogene Aussagen von Stichprobenplänen mit Vorinformation,
Qualität und Zuverlässigkeit, Nr.10, S. 225-227
- [50] KÜHLMAYER, M. (1981)
Construction of an Economic and Secure Inspection and Production Strategy,
Frontiers in Statistical Quality Control, Physica Verlag, S.148-164
- [51] KÜHLMAYER, M. (1984)
Testing at weakest points,
Frontiers in Statistical Quality Control, Physica Verlag, S.136

- [52] KÜHN, S. (1971)
Quality Control in Highway Construction,
 1. ICASP, Hongkong, S.282
- [53] LEE, I. K. (1974)
Soil Mechanics — New Horizons,
 Newnes-Butterworths
- [54] LUDWIG, R. (1969)
Methoden der Fehler und Ausgleichsrechnung,
 Vieweg Verlag
- [55] LUMB, P. (1966)
The variability of natural soils,
 Canadian Geotechnical Journal, S.73
- [56] LUMB, P. (1975)
Statistical estimation in soil engineering,
 2. ICASP, Aachen, S.155
- [57] MANDEL, J.; LASHOF, T. W. (1987)
The nature of repeatability and reproducibility J. of Quality Techno-
 logy, Vol.19, No.1, S.29
- [58] MITCHELL, M. F.; SEMMELINK, C. J.; MCQUEEN, A. L. (1977)
*Statistical Quality Assurance in Highway Engineering in South Af-
 rica*,
 Transportation Research Board, No.652
- [59] OBERMAYER, J. (1986)
*Erfahrungen mit der flächendeckenden dynamischen Verdichtungs-
 kontrolle bei nichtbindigen Böden*,
 Symposium Verdichtung von Böden, Korngemischen und Asphalten,
 Verdichtungstechniken und Prüfmethode, BVF Arsenal, Wien
- [60] OTT, E.R. (1975)
Process quality control,
 McGraw-Hill
- [61] OWEN, D. B. (1980)
A table of normal integrals,
 Commun. Statist.-Simula. Computa., Bd.9 Nr.4, S.389-419

- [62] PAULMANN, G. (1980)
Durchführung einer Ringanalyse zur Ermittlung der Wiederhol- und Vergleichvarianzen bei der Bestimmung der Proctordichte und des optimalen Wassergehaltes,
 Forschungsbericht FA 05.038 des Bundesministers für Verkehr
- [63] PETTIT, R. A. (1967)
Statistical analysis of density tests,
 J. of the Highway Division, ASCE, No.11, S.37
- [64] PÖHLMANN, S.; RACKWITZ, R. (1981)
Zwei Schätzprobleme bei Gauß'schen Folgen,
 Heft 53 des Sonderforschungsbereiches 96, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, TU München
- [65] POTTHARST, R. (1982)
Erläuterung des statistischen Sicherheitskonzeptes am Beispiel des Grundbruchs,
 Baugrundtagung, Braunschweig
- [66] RACKWITZ, R. (1982)
Predictive Distribution of Strength under Control,
 Heft 66 des Sonderforschungsbereiches 96, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, TU München
- [67] RAIFFA, H.; SCHLAIFER, R. (1969)
Applied Statistical Decision Theory,
 Massachusetts Institute of Technology Press
- [68] RESNIKOFF, G. J.; LIEBERMANN, G. J. (1957)
Tables of the Noncentral t-Distribution,
 Stanford University Press, Stanford
- [69] RETHATI, L. (1979)
Number of soil samples and safety,
 8. ICSMFE, Brighton, Bd.1, S.239
- [70] RUBINSTEIN, R. Y. (1981)
Simulation and the Monte Carlo Methods,
 John Wiley, New York
- [71] SACHS, L. (1974)
Angewandte Statistik,
 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York

- [72] SCHAAFSMA, A. H.; WILLEMZE, F. G. (1973)
Moderne Qualitätskontrolle,
 Deutsche Philips GmbH
- [73] SCHULTZE, E. (1971)
Frequency distributions and correlations of soil properties,
 1. ICASP, Hong Kong, S.372-387
- [74] SHERMAN, G. B.; WATKINS, R. O.; PRY SOCK, R. H. (1967)
A statistical Analysis of Embankment Compaction,
 Highway Research Record, No. 177, S.157-185
- [75] SMITH, C. S. (1971)
Exakte Methoden der Qualitätskontrolle und Zuverlässigkeitsprüfung,
 verlag moderne industrie
- [76] SNV 640 585 A (1971)
Verdichtung,
 Schweizer Normblatt
- [77] SOMMER, K. (1979)
Probennahme von Pulvern und körnigen Massengütern,
 Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [78] SOARES, G. (1977)
Application of the statistical Method in the Control of Compaction of Soils,
 Proc. of the 9th ICSMFE, Tokio, Spec. Sess. No.2, S.109-103
- [79] STAMATOPOULOS, A. C.; KOTZIAS, P. C. (1975)
Statistical quality control at Kastraki earth dam,
 J. of the Geotech. Eng. Div., H.9, S.837
- [80] STANGE, K. (1960)
Pläne für messende Prüfung,
 Zeitschrift für wirtschaftliche Fertigung,
 Teil 1, Nr.1, S.38,
 Teil 2, Nr.3, S.129,
 Teil 3, Nr.6, S.278,
 Teil 4, Nr.12, S.525
- [81] STANGE, K. (1966)
Die zeichnerische Ermittlung von Folgeplänen für messende Prüfung

bei bekannter Varianz der Fertigung,
Biometrische Zeitschrift, Bd. 8, Nr.1

- [82] STANGE, K. (1969)
Die Wirksamkeit von Kontrollkarten,
Zeitschrift für wirtschaftliche Fertigung, Bd.64, Nr.11, S.615–621
- [83] STANGE, K. (1971)
Angewandte Statistik,
Teil 1 u. 2, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [84] STANGE, K. (1975)
Kontrollkarten für meßbare Merkmale,
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [85] STANGE, K. (1977)
Bayes-Verfahren,
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York
- [86] STURHAHN, J. (1976)
Stichprobenpläne für messende Prüfung,
Dissertation, TH Aachen
- [87] TURNBALL, (1966)
Quality control of compacted earthworks,
J. of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. ASCE, S.93
- [88] UHLMANN, W. (1981)
Statistische Qualitätskontrolle,
Teubner-Verlag
- [89] UNGAR, T. (1975)
Use of statistical methods in soil mechanical expert opinions,
2. ICASP, Aachen, S.165–174
- [90] URBAN, R. (1986)
Verbesserung der Qualitätssicherung im Straßenbau,
Straße und Autobahn, H.11, S. 486
- [91] VOSS, R.; FLOSS, R. (1968)
Die Bodenverdichtung im Straßenbau,
Werner-Verlag, 5. Auflage

- [92] WILLIAMSON, T. G. (1969)
Embankment Compaction Variability-Control-Techniques and statistical Implications,
Highway Research Record, No.290, S.9-22
- [93] WILRICH, P.-TH. (1970)
Nomogramme zur Ermittlung von Stichprobenplänen für messende Prüfung,
Teil 1 u. 2, Qualität und Zuverlässigkeit, Bd.15, Nr.3, S.61
- [94] WILRICH, P.-TH. (1988)
Statistische Qualitätssicherung und Produkthaftung aus der Sicht eines Statistikers,
DIN-Mitteilungen, Nr.67, S.199-205
- [95] WU, T. H.; EL-JANDALI, A. (1985)
Use of Time Series in Geotechnical Data Analysis,
ASTM, Geotechnical Testing Journal, No. 12, S.151
- [96] ZTVE-StB-76 (1976)
Zusätzliche Technische Vorschriften und Richtlinien für Erdarbeiten im Straßenbau,
Der Bundesminister für Verkehr

- Heft 14** **Ein Beitrag zur Vorhersage von Verformungen und Spannungen des Baugrundes und des Ausbaues bei Hohlraumbauten**
1989
- Heft 15** **Beitrag zur Analyse des Tragverhaltens von einfach bewehrten Zweischichtensystemen**
1989
- Heft 16** **Beitrag zur statistischen Qualitätskontrolle im Erdbau**
1990