

Lehrstuhl und Prüfamnt
für
Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik
der Technischen Universität München

Schriftenreihe
Heft 2

**Beiträge zur
Anwendung der Stochastik und
Zuverlässigkeitstheorie
in der Bodenmechanik**

München, 1983

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. Rudolf Floss
Ordinarius für Grundbau, Bodenmechanik
und Felsmechanik

Eigenverlag: Lehrstuhl und Prüfamnt für Grundbau,
Bodenmechanik und Felsmechanik
Technische Universität München
Baumbachstraße 7
8000 München 60
Tel.: (089) 8895-200

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Vorwort des Herausgebers	1
Beiträge:	
(1) v. SOOS, P.: Zur Ermittlung der Bodenkennwerte mit Berücksichtigung von Streuung und Korrelationen	9
(2) PEINTINGER, B.: Auswirkung der räumlichen Streuung von Bodenkennwerten	31
(3) RACKWITZ, R.: Können Vorinformationen über den Baugrund quantifiziert werden?	45
(4) REITMEIER, W.; KRUSE, W.; RACKWITZ, R.: Quantifizierung von Vorinformationen zur besseren Klassifizierung und Ableitung von klassenspezifischen Bemessungswerten für Bodenkenngrößen	61
(5) PEINTINGER, B.; REITMEIER, W.: Die Wirkung der statistischen Unsicherheiten in den Parametern eines stochastischen Feldes zur Modellierung von Bodeneigenschaften auf die Böschungsstabilität	75
(6) BAECHER, G.B.; RACKWITZ, R.: Zur Anwendung statistischer Methoden bei der gemeinsamen Verwendung von Vor- und aktuellen Informationen für die Bemessung von Ramppfählen	87
(7) ALBER, D.; FLOSS, R.: Stochastische Verfahren zur Schätzung von Bodenkennwerten	121

AUTOREN DER BEITRÄGE

- ALBER, D.: Dipl.-Ing., Prüfamts für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München
- BAECHER, G.B.: Prof., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge/USA
von 1979 bis 1980 Mitarbeiter am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München
- FLOSS, R.: Prof. Dr.-Ing., Ordinarius für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München
- KRUSE, W.: Dipl.-Stat., Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München
- PEINTINGER, B.: Dipl.-Ing., Lehrstuhl für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München
- RACKWITZ, R.: Dr.-Ing., Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München
- REITMEIER, W.: Dipl.-Ing., Lehrstuhl für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München
- v. SOOS, P.: Dipl.-Ing., Lehrstuhl und Prüfamts für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik der Technischen Universität München

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Im Bauingenieurwesen vollzieht sich seit längerem analog zu anderen Bereichen der Technik ein Umbruch in den Überlegungen zur Sicherheit und Zuverlässigkeit von baulichen Anlagen. Diese Entwicklung ist darauf ausgerichtet, die bisher empirisch gewonnenen deterministischen Sicherheitsgrößen abzulösen und dafür Sicherheitsanforderungen zu formulieren, die der Zuverlässigkeitstheorie entstammen und mit Hilfe probabilistischer Theoreme auf der Grundlage stochastischer Modelle gewonnen werden.

Die Zuverlässigkeit als Kriterium der Sicherheit beinhaltet, daß die kritischen Grenzzustände einer baulichen Anlage nicht überschritten werden, die dafür vereinbarten baulichen Anforderungen wahrscheinlich eingehalten werden und der Nutzen der Anlage während der vereinbarten Nutzungsdauer nicht wesentlich gemindert wird. Als elementare Prämisse muß dabei allerdings weiterhin gelten, daß wirtschaftliche Gegebenheiten berücksichtigt bleiben, was letztlich heißt, daß nicht jegliches Gefahrenrisiko ausgeschlossen werden kann und auch Spielraum für die Anwendung neuer konstruktiver Lösungen bleibt. Die Grundsätze dieser Überlegungen sind in ¹⁾ beschrieben. Der Nachweis der Zuverlässigkeit für eine bauliche Anlage setzt als Grundlage sowohl ein mechanisches Verhaltensmodell, das den Grenzzustand für das Traglastvermögen und die Gebrauchsfähigkeit (z.B. Bruch- oder Verformungsbedingungen) zutreffend wiedergibt, als auch ein stochastisches Modell, das die Größen und Verteilungsfunktionen der Basisvariablen oder der charakteristischen Bemessungswerte beinhaltet, voraus.

Die Gründe für das Umdenken in den sicherheitstheoretischen Überlegungen dürften einerseits in den immer größer gewordenen Tragwerksbeanspruchungen und den aus wirtschaftlichen Zwängen nahe der Sicherheitsgrenze

¹⁾ Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen
Herausgeber: DIN Deutsches Institut für Normung, e.V., 1. Aufl.,
Beuth Verlag, Berlin-Köln, 1981

liegenden Dimensionierungen, z.B. bei Tunnelbauten, Talsperren, Kernkraftwerken, Offshore- und Großindustrieanlagen, zu suchen sein, andererseits in den großen Fortschritten der probabilistisch-stochastischen Mathematik liegen. Wenn auch derzeit nicht von einem Durchbruch gesprochen werden kann, weil noch zu viele Voraussetzungen fehlen bzw. sich im Klärungsprozeß befinden, so kann nicht übersehen werden, daß sich in letzter Zeit deutliche Fortschritte in den Überlegungen abzeichnen. In weiten Kreisen der Bauingenieure wird allerdings diesem Prozeß bis heute eher Skepsis und wenig Gegenliebe entgegengebracht, was bei der traditionell empirischen und konstruktiv-intuitiven Denkweise der Bauingenieure verständlich ist. Hinzu kommt, daß den erfahrenen Bauingenieuren der älteren Generation Sprache und Begriffe der Stochastik und Probabilistik ziemlich fremd und die damit verbundenen mathematischen und numerischen Lösungsverfahren wenig vertraut sind.

Innerhalb der Bauingenieurdisziplinen muß man bisher leider die Boden- und Felsmechanik zu den Stiefkindern rechnen, was Fortschritte bei der Lösung stochastisch-probabilistischer Problemfälle betrifft, wofür natürlich offenkundige Gründe vorliegen:

- (1) Im Unterschied zu gezielt zusammengesetzten Baustoffen, wie z.B. Stahl, Beton oder bituminöse Mischgüter, handelt es sich bei Boden und Fels um "Naturstoffe", die nach Zusammensetzung und Eigenschaften räumlich außergewöhnlich heterogen wechseln. Ihr Verhalten wird nicht nur von zahlreichen Eigenvariablen, sondern auch von mehreren extern einwirkenden Fremdgrößen, z.B. Temperatur, Niederschlag, beeinflusst.
- (2) Aus (1) folgt, daß sich der Baugrund nur recht unsicher in sog. Homogenbereiche einteilen läßt und daß die aus Baugrunduntersuchungen gewonnenen Informationen wegen wirtschaftlicher Gegebenheiten nur begrenzten Umfang haben können.

- (3) Aus (1) und (2) folgt im weiteren, daß sowohl mechanische als auch stochastische Modelle in der Regel mit erheblichen Unsicherheiten behaftet sein können und daher nur Näherungen darstellen.

Aufgrund dieser unabänderlichen Tatbestände ergibt sich die Hauptschwierigkeit für die Boden- und Felsmechanik dadurch, daß nach der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung nur dann eine analytische Lösung für die Versagenswahrscheinlichkeit möglich ist, wenn die Grenzzustände zwischen Versagen und zuverlässigem Verhalten des Baugrunds bzw. des Erdstoffs mathematisch zutreffend formuliert werden können. Aufgrund dieses Sachzwanges gewinnt gerade der Teil der Stochastik für die Boden- und Felsmechanik besonders grundlegende Bedeutung, der wahr-scheinlichkeitstheoretische Theoreme zum Gegenstand hat, mit denen sich die Verteilungsparameter der streuenden Größen aus Beobachtungen (Mes-sungen, Versuche) begrenzten Umfangs und aus anderen Vorinformationen (z.B. Regressionen zwischen verschiedenen Parametern) schätzen lassen.

Am Lehrstuhl und Prüffamt für Grundbau, Bodenmechanik und Felsmechanik ist deshalb dieser spezielle stochastisch-probabilistische Teil aufge-griffen worden und bildet zur Zeit den Schwerpunkt unserer Grundlagen-forschung. Die initiale Anregung hierzu ist dem seit 1974 an der Tech-nischen Universität München eingerichteten Sonderforschungsbereich Nr. 96 der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu danken, der sich mit der Zuverlässigkeit von Tragwerken befaßt und an dem unser Institut mitwirkt. Einschlägige Aufgaben befinden sich inzwischen aber auch im Rahmen des BMFT-Projekts "Talsperrensicherheitsstudie auf probabili-stischer Basis" für das Institut im Auftrag und gewinnen letztendlich auch bei Baugrunduntersuchungen für praktische Ausführungsobjekte zu-nehmend an Bedeutung.

Der Herausgeber sah daher Grund gegeben, die etwa im Zeitraum der letz-ten drei Jahre zur stochastisch-probabilistischen Thematik am Rande der o.g. Forschungsvorhaben entstandenen Beiträge im vorliegenden Buch

einmal zweckmäßigerweise zusammen vorzustellen, um damit einen Überblick der bisherigen Überlegungen zu vermitteln.

Der Inhalt des Buches umfaßt insgesamt 7 Beiträge: Die Beiträge (1) bis (3) geben Vorträge anlässlich der Baugrundtagung 1982 der Deutschen Gesellschaft für Erd- und Grundbau e.V. in Braunschweig wieder. In englischer Sprache vorveröffentlicht sind die Beiträge (5) und (6), und zwar (5) in den Proceedings of the 4th International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Florenz, Juni 1983 und (6) in International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 6, 409-424 (1982). Der hier veröffentlichte deutschsprachige Beitrag (6) enthält gegenüber der englischen Fassung einige kleinere Änderungen.

Der Inhalt der 7 Beiträge läßt sich wie folgt abstrahieren:

In Beitrag (1) wird zunächst zur Schätzung der statistischen Parameter von Stichproben und zur Fehleranalyse (Versuchsfehler und Probestörung) Stellung genommen. Ferner werden die Voraussetzungen für Korrelationen zwischen verschiedenen Bodenkenngrößen, für Autokorrelationen zwischen ein- und derselben Bodenkenngröße und für Regressionen, bei denen eine von mehreren zufälligen Variablen als Einflußgröße gilt, beurteilt.

Der Beitrag (2) geht von (1) aus und zeigt Möglichkeiten, die räumlichen Streuungen der Eigenschaften eines homogenen Bodens durch ein stationäres Zufallsfeld zu beschreiben. Am Beispiel der räumlichen Bruchfigur einer Dammböschung wird dargelegt, daß die räumliche Streuung der Scherfestigkeitsparameter wesentlichen Einfluß auf die Standsicherheit haben kann.

Der Beitrag (3) schließt an (2) an und findet seine Vertiefung im Beitrag (4). In beiden Beiträgen wird am Beispiel eines stochastischen Bodenmodells der Versuch unternommen, sog. Vorinformationen über Baugrundeigenschaften einschließlich direkter und indirekter Beobachtungs-

werte mit Hilfe des Theorems von Bayes zu quantifizieren. Die Überlegungen der Autoren gehen davon aus, die nach ihrer geologischen Entstehung und ihren boden- bzw. felsmechanischen Eigenschaften unterschiedlichen Boden- und Felsarten in Klassen mit definierter Weite der Eigenschaften einzuteilen, um dann innerhalb dieser Intervalle die Streuungen der entsprechenden Eigenschaften durch normale Zufallsfelder (Gaußsche Verteilungen) beschreiben zu können.

Im Beitrag (4) werden darüberhinaus Rechenoperationen dargelegt, mit denen aufgezeigt wird, wie sich solche Klasseneinteilungen bei einem bestimmten geotechnischen Problem auf die Versagenswahrscheinlichkeit auswirken können. Schließlich werden aus den Normalverteilungen sog. "klassenspezifische Bemessungswerte" abgeleitet, mit denen die Sicherheitsanforderungen für bestimmte bauliche Anlagen bzw. für grundbauliche Stabilitätsnachweise festgelegt werden können.

Im Beitrag (5) befassen sich die Autoren mit dem Einfluß der statistischen Unsicherheit auf die Versagenswahrscheinlichkeit der Standsicherheit einer Böschung anhand eines numerischen Beispiels. Die räumliche Streuung der Scherparameter ϕ und c wird dabei durch zwei unabhängige Gaußsche Zufallsfelder mit der selben Autokorrelation modelliert. Die Parameter dieser Zufallsfelder sind, da sie aus einem begrenzten Informationsumfang geschätzt werden müssen, selbst streuende Rechengrößen. Es wird aufgezeigt, wie die Wahrscheinlichkeit eines globalen Versagens mit zunehmender Menge an Informationsdaten bis auf einen Grenzwert, dem eine perfekte Information entspricht, abnimmt.

Ein weiterer Anwendungsfall wird im Beitrag (6) vorgestellt, der im Rahmen eines Forschungsauftrags, gefördert durch das Institut für Bautechnik, Berlin, entstanden ist. Am Beispiel von Rammpfählen in Reibungsböden wird aufgezeigt, wie bestimmte Vorinformationen mit Hilfe des Theorems von Bayes methodisch genutzt werden können, um Pfahltragungsfähigkeiten vorherzusagen und dabei die Sicherheitsfaktoren dem Informationsstand anzupassen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um Infor-

mationsdaten aus Rammformeln im Vergleich zu Probelastungen, wobei allgemein versucht wurde, beide Vorhersagen über Regressionsrechnungen in Beziehung zu bringen. Obwohl es derzeit in der Bodenmechanik als erwiesen gilt, daß die den üblichen Rammformeln zugrundeliegenden mechanischen Modelle fehlerhaft sind und Lösungen für das dynamische Pfahlverhalten im Boden daher derzeit mit Hilfe von Wellengleichungen gesucht werden, verbleibt dem Beitrag aktuelle Bedeutung. Seinen Wert möge der Leser in erster Linie in dem allgemeinen methodischen Ansatz der Wahrscheinlichkeitstheorie sehen, der geeignet ist, auch jede andere Art von Vorinformation, z.B. Ergebnisse aus Sondierungen oder dynamischen Pfahlprüfungen, in gleicher Weise einzubringen. Der Beitrag zeigt außerdem, wie Ergebnisse aus direkten und indirekten Aussageverfahren durch statistische Regressionsrechnungen in Verbindung gebracht werden können und kann auch als Beispiel dafür gelten, wie der methodische Ansatz bei entsprechender Modifizierung generell auch für die Vorhersage der Tragfähigkeit von Bohrpfählen, Erdankern und anderen Tragelementen des Grundbaus anzuwenden ist.

Im Beitrag (7) sind in gedrängter Übersicht die stochastischen Mittel erläutert, die dem Ingenieur derzeit zur Verfügung stehen, um den Streubereich von Bodenkennwerten, deren Mittelwert über eine bestimmte Fläche oder über ein Volumen von Interesse ist, aufgrund verschiedenartiger Informationen abzuschätzen. Der Beitrag zielt hauptsächlich darauf ab, dem Benutzer die praktische Handhabung der stochastischen Ansätze näher zu bringen. Die Zusammenstellung wird daher im zweiten Teil durch Rechenbeispiele veranschaulicht. Der Anhang beinhaltet eine kurze Ableitung der verwendeten statistischen Beziehungen, die der Anwender braucht, um Bayes-Schätzungen für Mittelwert und Standardabweichung bei unterschiedlichem Informationsniveau sowie entsprechende Schätzungen aus Regressionsbeziehungen vornehmen zu können.

Dem Herausgeber ist es abschließend ein besonderes Anliegen, den Beispielcharakter der in den Beiträgen aufgezeigten Denkansätze und Lösungsmöglichkeiten zu betonen. Ohne Frage bedarf es weitergehender Anstren-

gungen, auch möglichen anderen Überlegungen und Lösungsansätzen nachzugehen, insbesondere aber zugleich neben der wissenschaftlichen Leistung auch eine praxismgerechte Umsetzung der Lösungen und der Ergebnisse zu finden. Das intuitive Verständnis für probabilistische Ansätze zur Lösung von Sicherheits- und Zuverlässigkeitsfragen bei baulichen Anlagen dem Leserkreis näherzubringen - soweit hierzu die Boden- und Felsmechanik beizutragen haben - ist Hauptziel der nachfolgenden Publikationen.

München, im Dezember 1983

R. Floss

ZUR ERMITTLUNG DER BODENKENNWERTE
MIT BERÜCKSICHTIGUNG VON STREUUNG
UND KORRELATIONEN

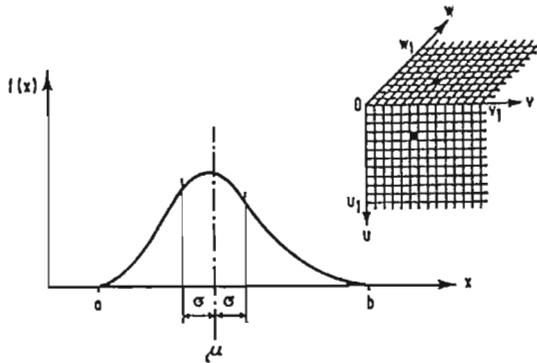
P. v. Soos

1. Vorbemerkung

Die Annahme, die Eigenschaften des Baugrundes nicht als konstante, sondern als streuende Größen in Rechnung zu stellen, ist naheliegend, wenn man die Entstehung des Baugrundes bedenkt, der das Produkt vielfältiger geologischer Prozesse wie Abtragung, Auflandung, Verwitterung und Verfestigung ist. Die Ungleichmäßigkeit des Baugrundes ist mitunter augenfällig - man denke an Geländeanschnitte in Kiesgruben -, doch schwanken die Eigenschaften, wie z.B. der Wassergehalt, auch in einem scheinbar gleichmäßigen Baugrund von Ort zu Ort. Auch hier liefert eine entnommene Bodenprobe nur eine zufällige Realisation dieser Bodenkenngroße.

2. Statistische Parameter der Grundgesamtheit

Wäre es möglich, den für die jeweilige Betrachtung interessierenden Bereich des Baugrundes oder den durch ein Bauwerk beanspruchten Teil einer Schicht in einzelne Würfel zu schneiden, die groß genug sind, daß an ihnen die gesuchte Bodenkenngroße ermittelt werden kann und gelänge es, an jeder dieser Proben die Bodenkenngroße fehlerfrei zu ermitteln, so könnten wir die Häufigkeitsverteilung, d.h. die Dichtefunktion $f(x)$ aller Werte, die die Kenngröße in diesem Bereich annimmt, beschreiben (Bild 1). Wir hätten dann genaue Auskunft über



Mittelwert $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$

Variationskoeffizient $V = \frac{\sigma}{\mu}$

Varianz $\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$

Schiefte $\gamma_1 = \frac{\int_a^b (x - \mu)^3 \cdot f(x) \cdot dx}{\sigma^3}$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Exzess $\gamma_3 - 3 = \frac{\int_a^b (x - \mu)^4 \cdot f(x) \cdot dx}{\sigma^4} - 3$

Bild 1: Dichtefunktion $f(x)$ und statistische Parameter der Grundgesamtheit für Werte x einer Bodenkenngröße im Bereich $(n_0 - n_1)$, $(v_0 - v_1)$, $(w_0 - w_1)$ des Baugrundes

den z.B. für eine erdstatische Berechnung maßgebenden Mittelwert μ ,

die wichtigsten Parameter der Verteilung wie Varianz σ^2 bzw. Standardabweichung σ und die auf den Mittelwert bezogene Standardabweichung, den Variationskoeffizienten V ,

weiterhin könnten zur Beschreibung der Form der Verteilung der Koeffizient der Schiefe γ_1 und der Koeffizient des Exzesses $\gamma_3 - 3$ genau angegeben werden.

Hätten wir unsere unzähligen Probenwürfel nach ihren Koordinaten gekennzeichnet, so könnten wir feststellen, ob

- a) die Werte der Kenngrößen über den Raum zufällig verteilt sind (Bild 2a);
- b) sich ein in parallelen Schnittebenen gebildeter Mittelwert, um den die Werte jeweils streuen, z.B. mit der Tiefe stetig ändert, wodurch ein Trend aufgedeckt würde (Bild 2b);
- c) die Schwankungen um den Mittelwert einer Art Rhythmus unterworfen sind (Bild 2c).

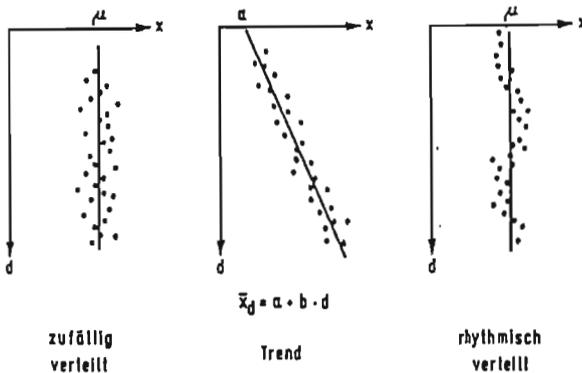


Bild 2: Verteilung der Werte x einer Bodenkenngröße mit der Tiefe

3. Schätzung der statistischen Parameter und Fehleranalyse

Im konkreten Fall einer Baugrunduntersuchung sind die statistischen Parameter für die Bodenkenngrößen der Grundgesamtheit nur näherungsweise zu ermitteln, da

- a) nur eine vergleichsweise geringe Anzahl von Proben zur Verfügung steht: die interessierenden Größen müssen aus einer Stichprobe geschätzt werden;
- b) die an den Proben bestimmten Kenngrößen von den tatsächlichen Werten abweichen, weil
 - a) die Proben nur gestört entnommen werden können,
 - b) die Versuchsdurchführung fehlerbehaftet ist.

3.1 Statistische Parameter der Stichprobe

Die geringe Anzahl verfügbarer Proben läßt die Parameter der Verteilung der Bodenkenngröße in der Grundgesamtheit nur schätzen (Bild 3). Wir erhalten nur

- einen Schätzwert \bar{x} für den Mittelwert;
- einen Schätzwert s^2 für die Varianz;
- einen Schätzwert s für die Standardabweichung und
- einen Schätzwert V für den Variationskoeffizient.

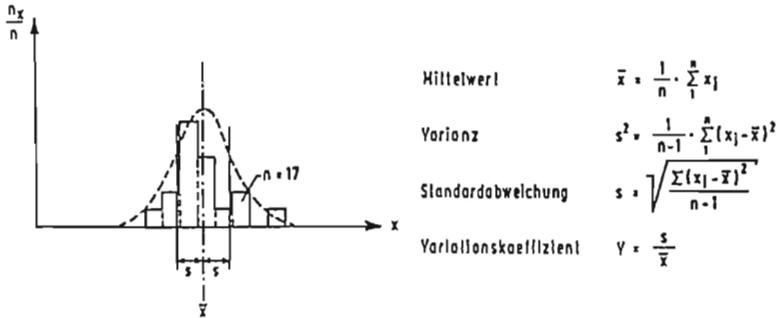


Bild 3: Häufigkeitsverteilung und statistische Parameter der Stichprobe für Werte x einer Bodenkenngröße

Der Mittelwert μ der Bodenkenngröße, der für die erdstatische Berechnung benötigt wird, ist also nicht genau bekannt, sein Schätzwert \bar{x} hinwieder ist wegen der zufälligen Wahl der Proben selbst eine Zufallsgröße. Die von der Probenwahl abhängigen Schätzwerte \bar{x} für μ sind also statistisch verteilt. Die Verteilung von \bar{x} ist von der Grundgesamtheit nur wenig abhängig: natürlich ist sie bei normal verteilter Grundgesamtheit selbst auch normal verteilt, doch kann sie auch bei von der Normalverteilung abweichender Grundgesamtheit stets ohne großen Fehler durch eine Normalverteilung ersetzt werden.

Für die Behandlung erdstatischer Probleme, in denen auch bei stochastischer Betrachtungsweise wegen integraler Mitwirkung (Massenkräfte) oder wegen Parallelschaltung (Scherkräfte) die Mittelwerte der Boden-

kenngrößen zu berücksichtigen sind, ist diese Eigenschaft des Mittelwertes von großem Vorteil.

Die Unsicherheit des Mittels \bar{x} , d.h. die Streuung der möglichen Werte \bar{x} hängt von der Anzahl der Proben ab, aus denen \bar{x} gewonnen wurde. Es gilt der Schätzwert für die Standardabweichung des Mittels

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

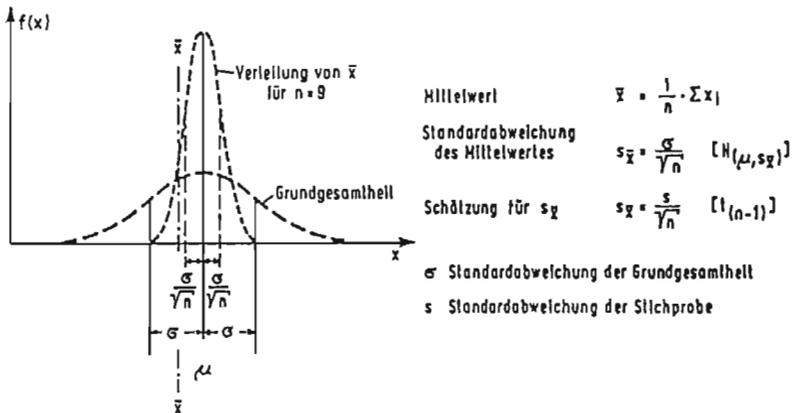


Bild 4: Streuung des Mittelwertes \bar{x}

Zu den genannten Beziehungen sind zwei Einschränkungen zu machen:

1. Damit der Mittelwert als Schätzwert des wahren Mittels aufgefaßt werden kann, ist es notwendig, daß die Proben zufällig gegriffen werden. Hat man die zu untersuchenden Proben einer Auswahl unterworfen, indem man z.B. nur die augenscheinlich ungünstigsten Ausbildungen untersucht hat, so bietet ein daraus gewonnener Mittelwert keine Schätzung für den Mittelwert der Grundgesamtheit. Die Auswahl der Proben hat für eine probabilistische Betrachtungsweise erdstatischer Probleme also anders zu geschehen als für eine deterministische, die "mit auf der sicheren Seite liegenden Parametern" operiert. Die praktische Anwendung des probabilistischen Sicherheitskonzeptes würde daher eine Änderung der Laborpraxis erfordern.

2. Die Beziehung für $s_{\bar{x}}$ gilt nur dann, wenn die zufälligen Proben voneinander unabhängig sind, d.h. wenn zwischen ihren Werten keine Zusammenhänge bestehen. Das ist, wie wir später sehen werden und wie uns insbesondere der Vortrag von Herrn Peintinger zeigen wird, nur dann der Fall, wenn die Proben hinreichend weit voneinander entfernt entnommen wurden.

Ist die Standardabweichung der Grundgesamtheit σ_x bekannt, so ist $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ eine zuverlässige Angabe für den Fehler des Mittels.

Die Kenntnis der Standardabweichung der Grundgesamtheit ist auch für die Beschreibung des Vertrauensbereichs für den Mittelwert von Bedeutung:

$$\bar{x} - \delta < \mu < \bar{x} + \delta$$

δ gibt den Bereich beidseitig von \bar{x} an, in dem der Mittelwert μ mit einer Wahrscheinlichkeit α erwartet werden kann.

Ist σ_x nicht bekannt, dann ist $\delta = t \cdot \frac{s}{n}$;

ist σ_x bekannt, dann ist $\delta = z \cdot \frac{s}{n}$.

t ist der Beiwert der Student-Verteilung, der für gegebenes α mit abnehmender Anzahl von n anwächst und für $n = \infty$ in z , das ist in den Beiwert der Standardnormalverteilung übergeht. Für $\alpha = 95\%$ ist $z = 1,96$, für $\alpha = 95\%$ und $n = 6$ ist $t = 2,75$.

Es ist daher für die statistische Beschreibung des Mittelwertes von großem Vorteil, wenn die Standardabweichung der Verteilung der Grundgesamtheit im interessierenden Bereich für die jeweiligen Bodenkenntgrößen bekannt ist.

Dieser Hinweis scheint zunächst als unrealistisch und widerspruchsvoll, da wir aus unserer konkreten Baugrunduntersuchung nur eine begrenzte Anzahl von Beobachtungswerten besitzen und die Standardabweichung der Grundgesamtheit σ_x nicht kennen. Betrachten wir aber den Baugrund für das untersuchte Projekt als Teil einer größeren Grundge-

samtheit, in der der Variationskoeffizient der Bodenkenngrößen etwa gleichbleibend ist, so können wir bei Kenntnis desselben mit hinreichender Zuverlässigkeit auf die Standardabweichung der Verteilung der Grundgesamtheit schließen

$$\sigma_x \approx V_x \cdot \bar{x}$$

Diese "größere Grundgesamtheit" wird das gleichartige Vorkommen eines Bodens bestimmter geologischer Herkunft und Vorgeschichte in einer begrenzten geografischen Lage umfassen, z.B.

- den mittelplastischen Seeton des Rosenheimer Beckens in der Umgebung von Bad Aibling, oder
- die Gesamtheit der tertiären Sande von mehr als 2 m Mächtigkeit der oberen Süßwassermolasse Münchens, oder
- die Mergel des Gipskeupers im Raume Stuttgart usw.

An je mehr Stellen solcher Vorkommen Bodenkenngrößen ermittelt werden, umso größer wird der Umfang der Stichprobe aus dieser größeren Grundgesamtheit und umso bessere Schätzwerte lassen sich für die statistischen Parameter dieser Grundgesamtheit angeben. Wünschenswert wären Stichproben für jede Bodenkenngröße aus mindestens 100 Proben oder mehr. Es gibt schon einige Einzeluntersuchungen aus dem In- und Ausland, die solche Daten auswerten. Die Darstellung in Bild 5 läßt erkennen, daß die Variationskoeffizienten in solchen größeren Grundgesamtheiten je nach Bodenkenngröße, Bodenart und geologischer Vorgeschichte zwischen weiten Grenzen schwanken. Es ist daher eine dringende Aufgabe, durch das Anlegen von Datenbanken, in denen Bodenkenngrößen aus zahlreichen Untersuchungen vieler Grundbauinstitute zusammengefaßt werden, die Verteilungsparameter für Bodenkenngrößen von möglichst vielen heimischen Böden unterschiedlicher geologischer Herkunft zu erforschen und zu dokumentieren.

3.2 Versuchsfehler und Probestörung

Wie ernst können wir die ermittelten Einzelwerte und Mittelwerte für die Bodenkenngrößen überhaupt nehmen?

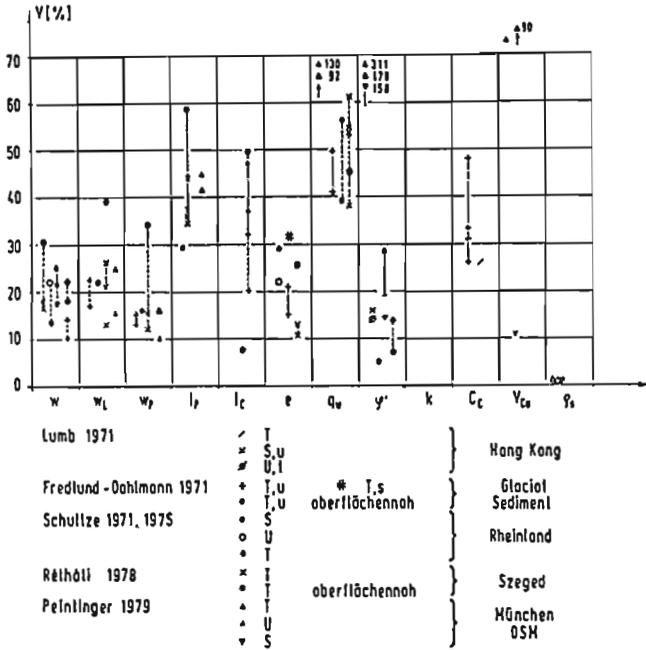


Bild 5: Variationskoeffizienten von Bodenkenngrößen

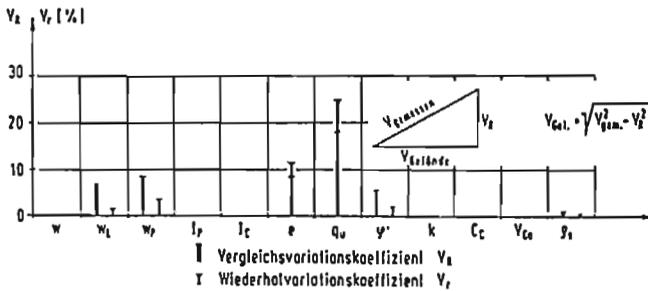


Bild 7: Variationskoeffizienten der Versuchsfehler bei der Ermittlung unterschiedlicher Bodenkenngrößen

Welche Fehler haften den Versuchen an (siehe Bild 6)?

1. Zunächst streuen die Werte, die derselbe Versuchsausführende in demselben Labor bei wiederholter Bestimmung derselben Bodenkenngröße an gleichen Proben erhält. Diese Wiederholstreuungen sind zufällige Streuungen, die bei der Mittelwertbildung mit zunehmender Zahl der Versuche immer kleiner werden und schließlich gegen 0 konvergieren, wenn die Anzahl der Versuche groß genug ist. Die Wiederholstreuung hat also den Mittelwert $\bar{\delta} = 0$, aber eine endliche Standardabweichung s_{δ} . Zugleich begeht aber jeder Versuchsdurchführende oder jedes Labor auch systematische Fehler durch individuelle Interpretation der Versuchsvorschrift, durch besondere Angewohnheiten oder weil seine Waage verstimmt ist. Diese systematischen Fehler lassen sich durch Mittelung der Ergebnisse des gleichen Laboranten oder des gleichen Labors nicht verkleinern. Daher sind nicht nur die Einzelmeßwerte, sondern auch das Mittel \bar{x} bei Messungen aus einem Labor gegenüber dem wahren Mittelwert \bar{x}^* verfälscht: $\bar{x} = \bar{x}^* + \bar{\alpha}_{\text{Lab}}$. Dagegen ist die Standardabweichung dieser systematischen Fehler $s_{\alpha_{\text{Lab}}}$ bei demselben Laboranten in demselben Labor sehr gering. Daher ist die Wiederholstandardabweichung $s_r = s_{\delta}$.

Meßwerte j aus vielen Labors

$$x_{ij} = x_i^* \cdot \alpha_{ij} \cdot \delta_{ij}$$

$$\bar{x} = \bar{x}^* \cdot \underbrace{(\bar{\alpha}_{\text{Lab}} \cdot \bar{\delta})}_{= 0 \text{ für großes } n}$$

$$s^2 = s^{*2} \cdot \underbrace{s_{\alpha_{\text{Lab}}}^2 \cdot s_{\delta}^2}_{= s_R^2}$$

Meßwerte i aus einem Labor

$$x_i = x_i^* \cdot \alpha_i \cdot \delta_i$$

$$\bar{x} = \bar{x}^* \cdot \bar{\alpha}_{\text{Lab}} \cdot \bar{\delta} \quad = 0 \text{ für großes } n$$

$$s^2 = s^{*2} \cdot s_{\alpha_{\text{Lab}}}^2 \cdot s_{\delta}^2 \quad = 0 \text{ für großes } n \quad \underbrace{\quad}_{= s_r^2}$$

x_i^* wahrer Meßwert
 α systematischer Fehler eines Labors
 δ zufälliger Fehler einer Messung

Bild 6: Mittelwert und Standardabweichung von Versuchsfehlern aus einem und aus mehreren Labors

2. Werden dieselben Versuche an gleichen Bodenproben von verschiedenen Labors ausgeführt, so können die vorgenannten systematischen Fehler im Vergleich der Labors als zufällig erscheinen. Die erhaltenen Vergleichsstreuungen bekommen bei großer Zahl der Labors einen gegen 0 gehenden Mittelwert ($\bar{\alpha}_{\text{ges}} + \bar{\delta}_{\text{ges}} = 0$), weisen aber eine Standardabweichung s_R auf, die notwendigerweise größer ist als die Wiederholstandardabweichung.

In sog. Ringanalysen, in denen möglichst gleiche Proben in verschiedenen Labors wiederholt untersucht wurden, sind in den USA, in England und in Deutschland die Wiederhol- und Vergleichsstreuungen bei verschiedenen Bodenkenngrößen untersucht worden. Die Standardabweichungen bzw. Variationskoeffizienten sind aus diesen Untersuchungen für verschiedene Kenngrößen in Bild 7 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß

- a) die Standardabweichungen oder die Variationskoeffizienten von Kennwert zu Kennwert sehr stark schwanken;
 - b) diese statistischen Parameter bei demselben Kennwert auch von der Bodenart abhängen (besonders deutlich beim hier nicht dargestellten Proctor-Versuch zu erkennen).
3. Ein dritter maßgeblicher Fehler entsteht durch die Beeinträchtigung der Probe bei der Probeentnahme. Durch den Entnahmevergang kann eine Verdichtung oder Auflockerung der Probe, eine Veränderung des Wassergehaltes, eine Veränderung der Festigkeitseigenschaften usw. eintreten.

Die Probeentnahmefehler betreffen am wenigsten die stofflichen Bodenkenngrößen (z.B. Korndichte), wohl aber jene, die den Zustand beschreiben oder die von der Bodenstruktur abhängen. Auch diese Fehler haben einen systematischen Anteil, der den jeweiligen Bohr- bzw. Entnahmeverfahren anhaftet und einen zufälligen Anteil, der von der Sorgfalt des Ausführenden abhängt. Durch Anwendung unterschiedlicher Entnahmeverfahren läßt sich der Einfluß der Entnahmestörungen in etwa

abschätzen. Ähnlich sind auch systematische Versuchsfehler zu bewerten, die dadurch entstehen, daß die Randbedingungen des Versuchs nicht einwandfrei sind. Sowohl die systematischen Entnahme- als auch die systematischen Versuchsfehler können nur durch Korrekturen im Mittelwert, nicht aber in den Standardabweichungen berücksichtigt werden.

Dagegen ist es möglich, die Varianzen der Kenngrößen einer geologischen Formation (siehe Abschnitt 3.1 und Bild 5) durch die Vergleichsvarianzen der Versuchsdurchführung zu bereinigen. Wie ein Vergleich der in Bild 5 dargestellten, an verschiedenen Böden ermittelten Variationskoeffizienten V mit den in Bild 7 dargestellten Vergleichsvariationskoeffizienten V_R erkennen läßt, sind die versuchsbedingten Vergleichsvarianzen, gemessen an den Varianzen geologischer Vorkommen klein, so daß sich die Variationskoeffizienten V nach Korrektur durch die Vergleichsvariationskoeffizienten V_R in der Regel nur wenig ändern.

4. Korrelation und Regression

4.1 Korrelation

Daten über Bodenkenngrößen können vorliegen

- 1) aus einer speziellen Untersuchung für ein einzelnes Objekt,
- 2) als datenbankmäßige Zusammenfassung vieler Untersuchungen zur statistischen Beschreibung von Böden einer geologischen Formation.

Bei der erstgenannten alltäglichen Art der Untersuchung setzen die Untersuchungskosten eine Grenze für den Umfang der Stichproben. Dies ist insbesondere bei aufwendigen Versuchen der Fall. Oft können nur einfache Versuche wie Klassifizierungsversuche, Korngrößenverteilung, Plastizitätsgrenzen, zustandsbeschreibende Versuche (Wassergehalt, Dichte) oder vereinfachte Festigkeitsversuche (einaxiale Druckfestigkeit, Flügelsondenversuche) in größerer Zahl ausgeführt werden. Ist zwischen Kenngrößen aus einem solchen einfachen Versuch und dem Ergebnis aus einem aufwendigeren Versuch (Triaxialversuche) ein allge-

meiner oder für gleichartige Böden gültiger Zusammenhang bekannt, so lassen sich in untergeordneten Fällen aufwendige Versuche ganz vermeiden. Zumindest läßt sich ihre Anzahl erheblich verringern.

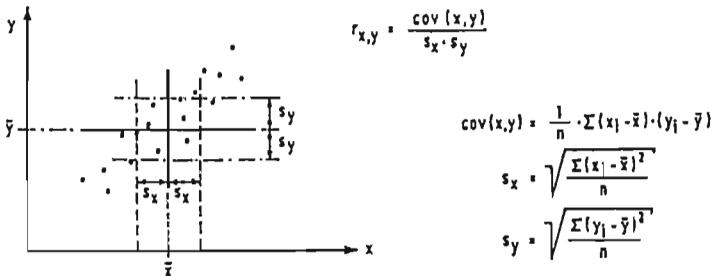


Bild 8: Korrelationskoeffizient r_{xy}

Liegen von verschiedenen Proben jeweils Bestimmungen zweier Kenngrößen vor, so lassen sich die Wertepaare in einem Diagramm gegenüberstellen. Ergeben diese eine diffuse Wolke, besteht zwischen ihnen meist kein Zusammenhang, gruppieren sie sich um eine Linie, sind die beiden Größen korreliert. Die Güte einer einfachen linearen Korrelation wird durch den Korrelationskoeffizienten ($r_{x,y}$) beschrieben (s. Bild 8).

Es bedeuten

$\text{cov}(x,y)$ die Kovarianz

s_x die Standardabweichung der Streuung in x-Richtung

s_y die Standardabweichung der Streuung in y-Richtung

$r = 1$ gibt einen funktionalen Zusammenhang an: die Wertepaare liegen auf einer Geraden;

$r = 0$ zeigt völlige Unkorreliertheit an.

Haben wir eine größere Anzahl von Proben einer Bodenart aus einer bestimmten geologischen Formation untersucht und an diesen Proben jeweils mehrere Bodenkenngößen ermittelt, so können wir danach fragen, ob zwischen je zwei Kenngößen eine Korrelation besteht oder nicht. Herr Peintinger hat 1979 Versuchsergebnisse aus der oberen Süßwassermolasse im Stadtgebiet München ausgewertet und dabei die in Tabelle 1 wiedergegebenen Korrelationen festgestellt.

	Ton		Schluff		Sand	
	r	n	r	n	r	n
$I_p - w_L$	0,942	261	0,894	90		
$w - n^*$	0,870	121	0,777	82	0,637	199
$U - d_{50}$	0,868	69	0,697	86	-0,158	175
$q_u - n^*$	-0,590	81	-0,648	46		
$\phi' - c'$	-0,591	69	-0,361	35		
$\phi' - I_p$	-0,470	69	-0,598	31		

Es bedeuten:

$I_p = w_L - w_p$	Plastizitätszahl	$U = \frac{d_{60}}{d_{10}}$	Ungleichförmigkeitsgrad
w_L	Fließgrenze	q_u	einaxiale Druckfestigkeit
w	Wassergehalt	ϕ'	effektiver Reibungswinkel
n^*	Porenanteil	c'	effektive Kohäsion
n	Anzahl der Wertepaare		

Tabelle 1: Korrelationen zwischen Bodenkenngößen im Münchner Tertiär (Peintinger 1979)

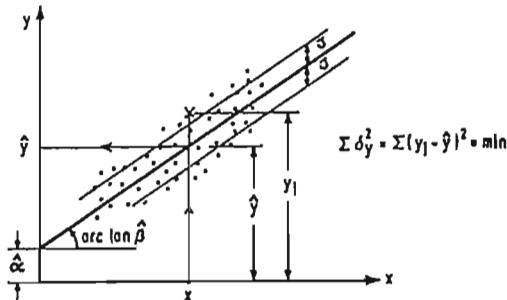
Die hier angegebenen Korrelationen werden noch schärfer, wenn man die Grundgesamtheit einschränkt, indem man z.B. nicht alle Tone, sondern nur jene mittlerer Plastizität betrachtet.

Die Aussage des Korrelationskoeffizienten ist zunächst eine rein formale und gibt noch keinen Hinweis darauf, ob zwischen den korrelierten Größen ein ursächlicher Zusammenhang besteht. Ein solcher ist für uns auch nicht unbedingt gefragt. Mitunter genügt auch eine gemeinsame Abhängigkeit von einer dritten Größe. So ist z.B. die Abhängigkeit Reibungswinkel - Plastizitätszahl nicht als ursächlich zu werten. Beide Kenngrößen sind vom Mineralaufbau und der Korngrößenverteilung des Bodens abhängig. Trotzdem sollten Korrelationen stets auf ihren Sinngehalt geprüft werden; insbesondere bei kleinem Stichprobenumfang können sich auch unmotivierete, formale Korrelationen ergeben.

4.2 Regression

Die symmetrische Form des Korrelationskoeffizienten deutet darauf, daß keiner der beiden durch die Korrelation verknüpften zufälligen Parameter bevorzugt ist.

Diese Situation ändert sich, wenn von einer der korrelierten Größen auf die andere geschlossen werden soll. Bei der Regression wird eine der beiden zufälligen Variablen als unabhängige "Einflußgröße" angesehen, von der die andere als "Zielgröße" abhängt. So soll im Beispiel des Bildes 9 von der Variablen x auf y geschlossen werden. Die Regressionsgerade einer linearen Regression wird unter der Annahme gefunden, daß das Summenquadrat der Abweichungen $\delta_y = y_i - \hat{y}$ zwischen der Geraden und den Versuchspunkten ein Minimum wird. Sind die verknüpften Größen y und x normal verteilt, so gelten die im Bild 9 dargestellten Beziehungen. Die Koeffizienten $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ sind Schätzwerte der nicht bekannten Größen α und β in der Regressionsgleichung. Die Varianz s^2 gilt für die Abweichung der einzelnen Meßwerte in y -Richtung von der Geraden. Da die Parameter $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ Schätzwerte sind, haben auch diese eine Standardabweichung, $s_{\hat{\alpha}}$ bzw. $s_{\hat{\beta}}$ (Bild 10).

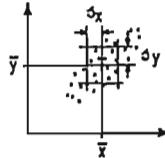


$$\hat{y}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x$$

darin ist!

$$\hat{\beta} = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x}$$



$$s^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum (y_i - \hat{y})^2 = \frac{n}{n-2} \cdot (1-r^2) \cdot s_y^2$$

Bild 9: Lineare Regression:
Regressionsgleichung $\hat{y}(x)$ und
Standardfehler für die Schätzung von y nach x

Die Regressionsgerade ordnet jedem Eingangswert x_0 einen Erwartungswert \hat{y} zu. \hat{y} ist ein geschätzter Mittelwert für y an der Stelle x_0 , dessen Unsicherheit durch die Standardabweichung $S_{\hat{y}(x_0)}$ beschrieben wird. Diese ist für $x_0 = \bar{x}$ am geringsten und wächst mit dem Abstand von \bar{x} an (\bar{x} ist der Mittelwert für x in der Stichprobe).

Zur notwendigen Beschreibung der Unsicherheit eines über Regression gesuchten Erwartungswertes für y müssen also neben der Regressionsgleichung noch

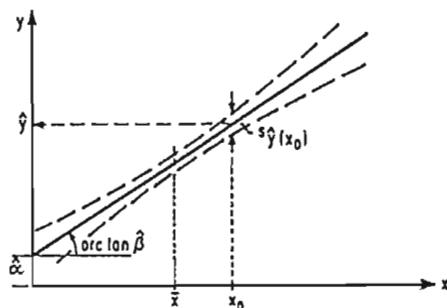
der Standardfehler s für die Schätzung von y nach x nach der Stichprobe,

der Umfang n der Stichprobe

der Mittelwert \bar{x} der Variablen x in der Stichprobe (x, y)

und

die Standardabweichung s_x der Variablen x in der Stichprobe bekannt sein.



Standardabweichung von $\hat{\beta}$ $s_{\beta} = \frac{s}{s_x \cdot \sqrt{n}}$

Standardabweichung von $\hat{\alpha}$ $s_{\alpha} = \sqrt{\frac{s}{n} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2}\right)}$

Standardabweichung für \hat{y}
an der Stelle x_0 $s_{\hat{y}(x_0)} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{s_x^2}}$

Bild 10: Lineare Regression
Standardabweichung der Koeffizienten $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$
und Standardabweichung für \hat{y}

Diese Daten werden zu Regressionsgleichungen für Bodenkenngrößen in der Literatur vollständig nur selten genannt. Allenfalls werden der Standardfehler s für die Schätzung von y nach x in der verarbeiteten Stichprobe und der Korrelationskoeffizient r für dessen Wertepaar angegeben. So läßt sich über die Zuverlässigkeit der Erwartungswerte aus den in Tabelle 2 aufgeführten häufig verwendeten Regressionsgleichungen nur wenig aussagen.

$$\begin{aligned} \phi'_s &= 45,4 - 5,53 \ln I_p \pm 3,99 && (r = 0,65) \\ & (I_p \text{ in } \%) && \text{(ODENDAHL)} \\ \rho'_w &= 11,76 - 14,7 \log I_p \pm 3,37 && (r = 0,839) \\ & (I_p \text{ als Dez. Bruch}) && \text{(HORN)} \\ c_c &= 0,009 (w_L - 10) && \left. \vphantom{c_c} \right\} \text{(SKEMPTON) } (r = ?) \\ \frac{c_u}{\sigma_c} &= 0,11 + 0,0037 I_p && \\ c_u &= 123 - 3,44 w && (r = 0,52) \\ & (\text{kN/m}^2) \quad (\%) && \text{(SCHULTZE)} \end{aligned}$$

Es bedeuten:

ϕ'_s	Gesamtwinkel der Scherfestigkeit		
ρ'_w	effektiver (wahrer) Reibungswinkel nach Hvorslev		
c_c	Kompressionsbeiwert		
σ_c	Konsolidierungsspannung	I_p	Plastizitätszahl
c_u	Kohäsion des undrained Bodens	w_L	Fließgrenze

Tabelle 2: Regressionsgleichungen für Bodenkenngrößen

Die Regression darf nicht umgekehrt verwendet werden. Für y als Eingangs- und x als Zielgröße gilt eine andere Beziehung, für die die Abweichung $\delta_x = x_i - \hat{x}$ zur Regressionsgeraden ein Minimum wird. Die beiden Beziehungen sind nur für $r = 1$ identisch. Die zugeordneten Regressionsgeraden weichen umso stärker voneinander ab, je kleiner der Korrelationskoeffizient r ist (siehe Bild 11).

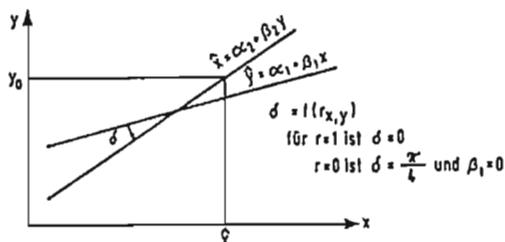


Bild 11: Regressionsgeraden für $\hat{y}(x)$ und $\hat{x}(y)$

Lineare Regressionen lassen sich auch auf nichtlineare Beziehungen anwenden, wenn diese durch Transformation in eine lineare Form gebracht werden können (siehe Tabelle 2). Vorausgesetzt ist, daß die transformierten Größen normal verteilt sind.

Ist eine Bodenkenngröße zu zwei verschiedenen anderen Kenngrößen korreliert, und sind die beiden anderen Kenngrößen voneinander unabhängig, also untereinander nicht korreliert, so lassen sich durch mehrfache oder multiple Regression bessere Korrelationen erbringen. Mehrfachkorrelationen sind aber unsinnig, wenn die als funktional unabhängig eingeführten Variablen tatsächlich voneinander abhängen, d.h. miteinander korreliert sind - dann ergibt sich keine Verbesserung der Regression.

Werden Regressionen in probabilistische Betrachtungsweisen einbezogen, so ist zu beachten, daß die Eingangsgröße x selbst eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ ist (siehe Bild 12).

Wird die Eingangsgröße durch eine Fraktile x_n der Grundgesamtheit charakterisiert, so liefert die Regression einen Erwartungswert \hat{y}_n für die entsprechende Fraktile der Zielgröße y_n mit der Standardabweichung $S_{\hat{y}(x_n)}$. Bei erdstatischen Nachweisen, bei denen nicht das Unterschreiten eines Kleinstwertes in der Grundgesamtheit, sondern das Unterschreiten eines Mittelwertes zum Versagen führt, ist die Eingangsgröße die Verteilung der Schätzwerte \hat{x} für den Mittelwert μ_x .

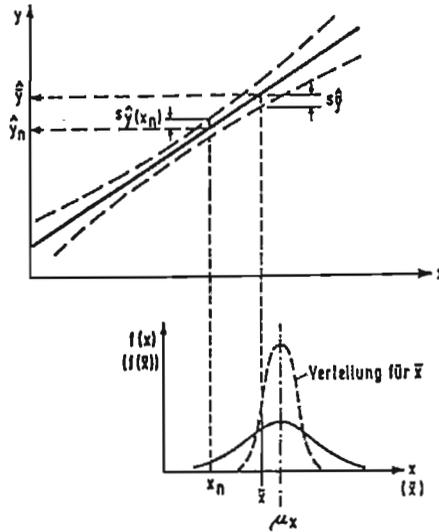


Bild 12: Anwendung einer Regressionsgleichung auf streuende Eingangsgrößen

Die Zielgröße ist dann der Erwartungswert \bar{y} eines Schätzwertes für den Mittelwert μ_y (siehe Bild 12).

4.3 Autokorrelation

Wir haben von Korrelationen zwischen unterschiedlichen Kenngrößen gesprochen. Wir können aber auch danach fragen, ob Bodenproben, die nahe beieinander entnommen wurden, in bezug auf ein und dieselbe Kenngröße voneinander unabhängig sind? Um dies zu prüfen, müssen wir einen Ausdruck ähnlich dem Korrelationskoeffizienten bilden, bei dem die Kovarianz im Zähler des Ausdruckes an Proben gebildet wird, die längs einer Geraden in konstantem Abstand voneinander liegen und in dem der Zähler bei hinreichend großer Probenzahl durch die Varianz der Kenngröße gegeben ist.

$$r_{\text{aut}} = \frac{\text{cov}(x_i, x_{i+s})}{S_{x_i} \cdot S_{x_{i+s}}} = \frac{\text{cov}(x_i, x_{i+s})}{S_x^2}$$
$$\text{cov}(x_i, x_{i+s}) = \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} (x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_{i+s} - \bar{x}_{i+s})$$
$$\frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} (x_i - \bar{x}) \cdot (x_{i+s} - \bar{x})$$

In Abständen, in denen dieser Autokorrelationskoeffizient des Bodens von 0 deutlich verschieden ist, sind die Proben als nicht unabhängig zu betrachten. Werden solche Proben in die Mittelbildung einbezogen, wird das Mittel unsicherer. Deshalb hat es keinen Sinn, Proben in zu kleinen Abständen, z.B. in der Horizontalen näher als alle 2 m zu gewinnen, es sei denn, man will gerade die Autokorrelationseigenschaften studieren. Mit den wichtigsten Eigenschaften und Anwendungen der Autokorrelation wird sich der folgende Vortrag von Herrn Peintinger befassen.

Literaturverzeichnis

- BENJAMIN, J.R., CORNELL, C.A.: Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers.
McGraw-Hill, New York, u.a., 1970
- FREDLUND, D.G., DAHLMANN, A.E.: Statistical Geotechnical Properties of Glacial Lake Edmonton Sediments
in Statistics and Probability in Civil Engineering
Ed. by P. Lumb, Hong Kong University Press,
Hong Kong 1971
- KREYSZIG, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen.
Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen, 1982
- LUMB, P.: Precision and Accuracy of Soil Tests
in Statistics and Probability in Civil Engineering
Ed. by P. Lumb, Hong Kong University Press, 1971
- LUMB, P.: Application of Statistics in Soil Mechanics
in Soil Mechanics - New Horizons, ed. by I.K. Lee,
Newnes-Butterworths, London, 1974
- PEINTINGER, Bernhard: Streuung von Bodenkennwerten im Münchner Tertiär
Diplom-Arbeit, 1979
- RÉTHÁTI, L., UNGAR, T.: A talajminták víztartalmának megbízhatósága
Mélyépítéstudományi szemle 28, 1978, pp. 34-43.
- RÉTHÁTI, L.: A talajminták szükséges számának meghatározása
valószínűségelméleti alapon,
Mélyépítéstudományi szemle 28, 1978, pp. 425-432.
- SCHULTZE, E.: Frequency Distributions and Correlations of Soil Properties.
Statistics and Probability in Civil Engineering,
Ed. by P. Lumb, Hong Kong University Press, 1971
- SCHULTZE, E.: Some Aspects concerning the Application of Statistics and Probability to Foundation Structures
in Proceedings Applications of Statistics and Probability
in Soil and Structural Engineering, Aachen, 1975
- SHERWOOD, P.T.: The reproducibility of the results of soil classification and compaction tests.
Road Research Laboratory Report LR 339 (1970).

AUSWIRKUNG DER RÄUMLICHEN STREUUNG VON BODENKENNWERTEN

B. Peintinger

Die Eigenschaften eines künstlich erstellten Erdbauwerkes wie z.B. ein Erddamm, ja selbst des Baugrundes sind theoretisch in ihrem Wesen deterministische Größen, wäre man in der Lage, sie in jedem Punkt zu bestimmen. Da dies nicht möglich ist, ist die Beurteilung des Baugrundes mit sehr vielen Unsicherheitsquellen behaftet. Aus einer begrenzten Anzahl von direkten Aufschlüssen und eventuell vorhandenen Informationen z.B. aus geologischen Karten, Aufschlüssen von benachbarten Objekten soll der Baugrund-sachverständige den Baugrund beurteilen. Neben den Unsicherheiten, die bereits bei der Probenentnahme, Untersuchung der Bodeneigenschaften im Labor möglich sind (vgl. Beitrag (1)), kommt das Risiko des Nichtentdeckens geologischer Anomalien (z.B. Erosionsrinnen) hinzu. Aber selbst bei relativ homogenen Böden sind die Eigenschaften nicht konstant, sondern schwanken von Ort zu Ort und eine entnommene Bodenprobe liefert nur eine zufällige Realisation dieser Bodenkenngröße. Diese Unsicherheitsquelle der räumlichen Schwankungen von Bodenkennwerten, ihre Beschreibung durch ein stationäres Zufallsfeld und ihre Auswirkung am Beispiel der Standsicherheitsuntersuchung von Böschungen soll in dem Beitrag behandelt werden.

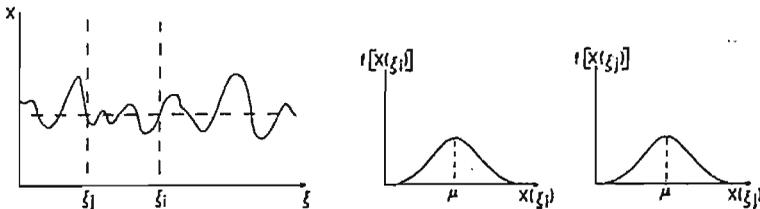
1. Beschreibung der räumlichen Schwankung von Bodeneigenschaften durch ein stationäres Zufallsfeld

In einem homogenen Boden sei zur Vereinfachung angenommen, daß die Bodeneigenschaft X an jedem Ort ξ normal verteilt

sei (eine Lognormalverteilung, die negative Werte ausschließt, kann durch entsprechende Transformation leicht berücksichtigt werden) und die Parameter der Verteilung (Mittelwert μ und Varianz σ^2) ortsunabhängig sind. Die Dichte der Bodeneigenschaft X ist somit

$$\varphi(X(\xi)) = \varphi(X(\xi_1)) = \varphi(X(\xi_j)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{X(\xi) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (1)$$

wobei ξ die Ortsvariable ist.



- Bild 1: Verteilung der Bodeneigenschaft X am Ort ξ

Da sowohl im Baugrund durch seinen geologischen Entstehungsprozeß sowie in künstlichen Erdbauwerken durch den Herstellungsprozeß die Größe der Bodeneigenschaft in benachbarten Orten ξ_1 und ξ_j sich normalerweise nicht sprungartig verändert, muß zwischen der Bodeneigenschaft $X(\xi_1)$ am Ort ξ_1 und der Bodeneigenschaft $X(\xi_j)$ am Ort ξ_j eine Abhängigkeit bestehen, die durch den Autokorrelationskoeffizienten ρ_{1j} (vgl. Vortrag von Herrn v. Soos) erfaßt werden kann. Die gemeinsame Realisation der Bodeneigenschaft $X(\xi_1)$ und $X(\xi_j)$ wird somit durch die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung beschrieben. (siehe Bild 2)

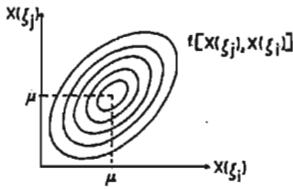


Bild 2: Projektion des Dichtehügels der gemeinsamen Verteilung von $X(\xi_1)$ und $X(\xi_2)$

In homogenen Böden wird die Abhängigkeit zwischen der Größe der Bodeneigenschaft X an verschiedenen Orten im wesentlichen nur vom gegenseitigen Abstand $\Delta\xi = \xi_1 - \xi_2$ beeinflusst. Als mathematisches Modell wurde deshalb ein stationäres Zufallsfeld gewählt, dessen Autokorrelationsfunktion ebenfalls nur eine Funktion des gegenseitigen Abstandes $\Delta\xi$ ist.

Unter der Voraussetzung der Stationarität läßt sich die Autokorrelationsfunktion punktweise schätzen, indem in geringen Abständen Δ die Größe der Bodeneigenschaft X bestimmt wird. (siehe Bild 3)

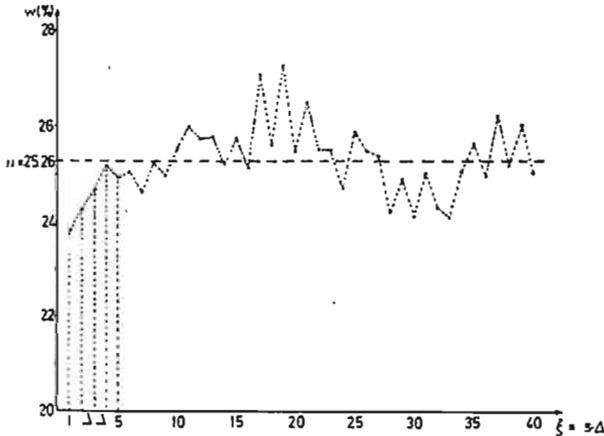


Bild 3: beobachtete Wassergehaltswerte in konstanten Abständen Δ

Einen Schätzwert der Autokorrelation $\rho(\Delta\xi)$ für den Abstand $\Delta\xi = s \Delta$ erhält man durch Berechnung der Kovarianz aus allen Meßpunkten deren gegenseitiger Abstand $\Delta\xi$ genau Δs ist. ($s = 1, 2, \dots, n-1$)

$$\text{COV}(X_1, X_{1+s}) = \frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} (X_i - \mu_1) \cdot (X_{i+s} - \mu_{1+s}) \quad (2)$$

und die Autokorrelation ergibt sich zu

$$\rho(\Delta\xi) = \rho(X_1, X_{1+s}) = \frac{\text{COV}(X_1, X_{1+s})}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_{1+s}^2}}$$

für den Fall, daß μ und σ ortsunabhängig sind, gilt

$$\rho(\Delta\xi) = \frac{\frac{1}{n-s} \sum_{i=1}^{n-s} X_i \cdot X_{i+s} - \mu^2}{\sigma^2} \quad (3)$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die Schätzwerte der Autokorrelation für wachsendes $\Delta\xi$ immer ungenauer werden, da die Anzahl $n-s$ der Beobachtungen zur Berechnung der Kovarianz stets geringer wird. Die aus den Meßwerten von Bild 3 ermittelten Schätzwerte für die Autokorrelation sind in Bild 4 mit + gekennzeichnet.

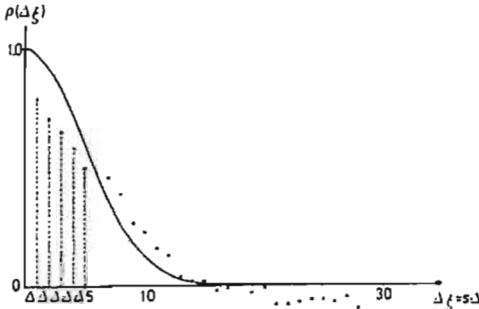


Bild 4: Vergleich geschätzter Autokorrelationswerte aus Meßwerten mit der angenommenen Autokorrelationsfunktion nach Gleichung (4)

Unter den möglichen Autokorrelationsfunktionen aus der Theorie der Zufallsfelder wurde in Anlehnung an Vanmarcke 1977 die Funktion

$$\rho(\Delta \xi) = \exp\left[-\left(\frac{\Delta \xi}{\delta}\right)^2\right] \quad (4)$$

gewählt, die zum einen relativ gut mit den beobachteten Autokorrelationswerten nach Gleichung (3) übereinstimmt (siehe Bild 4: durchgezogene Linie), zum anderen rechen-technisch einfach zu handhaben ist. Der Autokorrelationsparameter δ ist von der Bodenart und der Bodeneigenschaft X abhängig und beschreibt den Abstand $\Delta \xi = \delta$, für den die Autokorrelation auf den Wert $1/e$ gesunken ist. Wie aus Bild 5 ersichtlich ist, wird in Böden mit starker räumlicher Schwankung der Bodeneigenschaft X die gegenseitige Abhängigkeit sehr schnell abnehmen und deshalb δ sehr kleine Werte und bei geringer Fluktuation die gegenseitige Abhängigkeit sehr langsam abnehmen und deshalb δ große Werte annehmen.

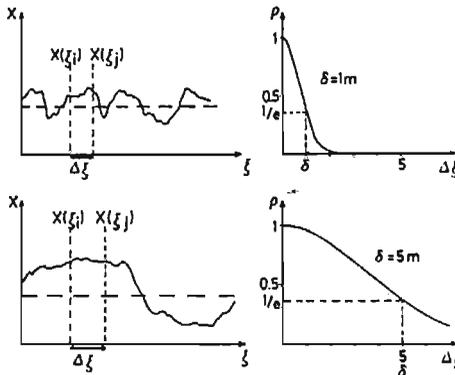


Bild 5: Zusammenhang zwischen räumlicher Schwankung und Autokorrelationsparameter δ

Genauere Untersuchungen der Autokorrelationseigenschaften von Sanden und Tonen werden derzeit im Rahmen des Sonder-

forschungsbereiches 96 im Teilprojekt A10 "Stochastische Bodenmodelle" durch gezielte Probennahme in Sand- und Tongruben durchgeführt. (Die Ergebnisse in Bild 3 und 4 wurden von Herrn Dipl.-Ing. Reitmeier aus diesem Forschungsprogramm zur Verfügung gestellt.)

Im allgemeinen werden die räumlichen Schwankungen in horizontaler und vertikaler Richtung durch den Entstehungsprozeß des Bodens (z. B. Sedimentation, lagenweiser Einbau) unterschiedlich sein. Die räumliche Streuung der Bodeneigenschaft X muß somit durch ein anisotropes stationäres Zufallsfeld $X(\underline{\xi})$ beschrieben werden, wobei $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ die räumlichen Ortsparameter sind. (Bild 6)

$$\rho(\Delta \underline{\xi}) = \exp \left[- \left(\frac{\Delta \xi_1}{\delta_1} \right)^2 - \left(\frac{\Delta \xi_2}{\delta_2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta \xi_3}{\delta_3} \right)^2 \right] \quad (5)$$

und $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sind die Autokorrelationsparameter in den Richtungen ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Eine Erweiterung für den Fall, daß systematische Trends im Mittelwert vorhanden sind, findet man bei Rackwitz, Peintinger 1981.

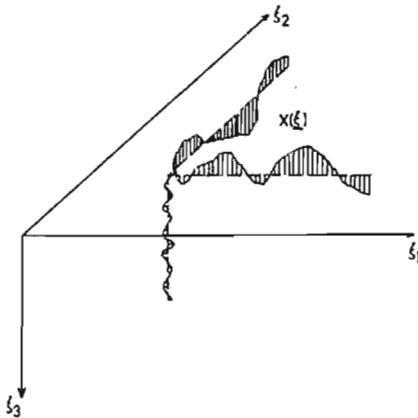


Bild 6: räumliches anisotropes Zufallsfeld $X(\underline{\xi})$

2. Mittelung des stationären Zufallsfeldes über einen Bereich

Bei starrplastischen Grenzbetrachtungen tritt Versagen erst ein, wenn die Scherfestigkeit des Bodens entlang der gesamten Gleitfläche überwunden wird. Deshalb ist nicht die Realisation der Bodeneigenschaft X an einem Ort ξ_1 von Interesse, sondern die Größe \bar{X}_k des Mittels des Zufallsfeldes entlang eines Bereiches A_k . (vgl. Bild 7)

$$\bar{X}_k = \frac{1}{A_k} \int_{A_k} X(\xi) \cdot d\xi \quad (6)$$

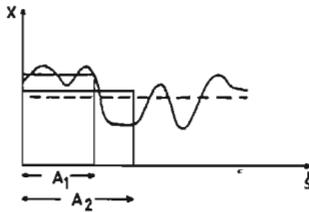


Bild 7: Mittelung über ein Zufallsfeld

\bar{X}_k ist eine Zufallsvariable mit den Parametern

$$\mu_{\bar{X}_k} = \mu_X$$

$$\sigma_{\bar{X}_k} = C_k \cdot \sigma_X$$

$$0 \leq C_k \leq 1 \quad C_k = f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, A_k) \quad (7)$$

und dessen Verteilung nahezu gleich der Verteilung des Zufallsfeldes X angenommen werden kann. Der Faktor C_k und somit die Varianz $\sigma_{\bar{X}_k}$ wird mit zunehmender Größe A_k und kleinem Autokorrelationsparameter δ stets kleiner. (vgl. Bild 8) Genaue Ableitungen zur Berechnung der Varianz $\sigma_{\bar{X}_k}^2$ bzw. der Korrelation zwischen den mittleren Eigenschaften \bar{X}_k und \bar{X}_l der Bereiche A_k und A_l findet man in Peintinger, Rackwitz 1980.

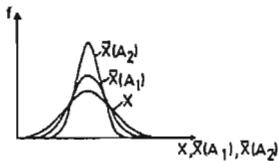


Bild 8: Einfluß der Mittelung auf die Varianz der varianz

3. Anwendung auf Böschungsrutschungen

Die Stabilität von Böschungen wird in der klassischen Bodenmechanik durch das Grenzgleichgewicht an vorgegebenen Bruchkörpern ermittelt (siehe Bild 9) und es gilt

$$g = M_r - M_{ab} = r_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{c_k + \tan\varphi_k \cdot (\gamma_k \cdot h_k - v_k)}{\cos\alpha_k + \sin\alpha_k \cdot \tan\varphi_k} - r_0 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot h_k \cdot \gamma_k \cdot \sin\alpha_k = 0 \quad (8)$$

- wobei c_k = die mittlere Kohäsion in der k-ten Lamelle
 $\tan\varphi_k$ = Tangens des mittleren Reibungswinkels in der k-ten Lamelle
 γ_k = mittlere Wichte der k-ten Lamelle
 v_k = Porenwasserdruck auf die k-te Lamelle
 h_k = Höhe der k-ten Lamelle
 b_k = Breite der k-ten Lamelle
 α_k = Steigungswinkel der k-ten Lamelle
 r_0 = Radius des Bruchkreises
 n = Anzahl der Lamellen

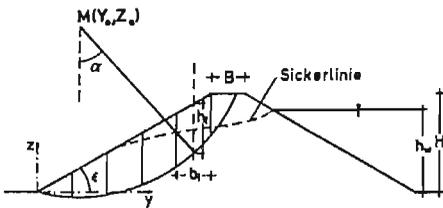


Bild 9: Böschungsgeometrie

Die räumliche Fluktuation der Scherfestigkeit wird durch die beiden stationären Zufallsfelder

$$X_1(\underline{\xi}) = \tan\varphi(\underline{\xi}) \quad \text{und} \quad X_2(\underline{\xi}) = c(\underline{\xi})$$

mit den Parametern

$$\begin{array}{ll} \mu_c; \mu_{\tan\phi} & \text{Mittelwerte} \\ \sigma_c; \sigma_{\tan\phi} & \text{Standardabweichung} \end{array}$$

und den gemeinsamen Autokorrelationslängen δ_1 , δ_2 und δ_3 dargestellt.

Zur Berechnung des Grenzgleichgewichtes (Gleichung 8) benötigt man die mittlere Größe der Kohäsion bzw. des Tangens des Reibungswinkels in den Lamellen. Es müssen die beiden Zufallsfelder daher in den einzelnen Lamellen nach Gleichung 6 gemittelt werden.

Wie oben in Gleichung 7 gezeigt, haben die geometrischen Abmessungen A_K der Gleitflächen bei der Mittelbildung der stationären Zufallsfelder einen großen Einfluß. Es muß deshalb im Gegensatz zur deterministischen Betrachtung an ebenen Bruchflächen bei der Berechnung der Zuverlässigkeit von Böschungen mit stationären Zufallsfeldern ein räumlicher Bruchkörper (vgl. Bild 10) gewählt werden.

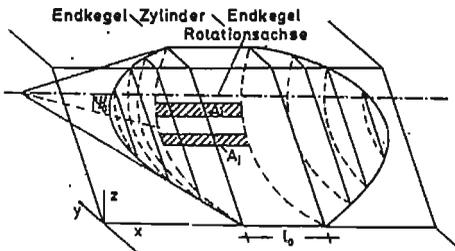


Bild 10: räumliche Bruchfigur

Die Gleichung 8 des Grenzzustandes erweitert sich somit um die Kräfte in den beiden Endflächen.

$$g = l_0 \cdot r_0 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{c_k + \tan \varphi_k \cdot (\gamma_k \cdot h_k - v_k)}{\cos \alpha_k + \sin \alpha_k \cdot \tan \varphi_k} - l_0 \cdot r_0 \cdot \sum_{k=1}^n b_k \cdot h_k \cdot \gamma_k \cdot \sin \alpha_k + 2 \cdot E = 0 \quad (9)$$

wobei neben den Bezeichnungen von Gleichung 8

l_0 = die Länge des Bruchzylinders vgl. Bild 10

E = rückhaltendes Moment in der Endfläche

vgl. Baligh, Azzouz, 1975

Für jeden vorgegebenen räumlichen Bruchkörper, der durch die Parameter (y_0, z_0, l_0, ψ_0) (vgl. Bild 10)

- y_0 = Lage der Rotationsachse des Bruchzylinders
- z_0 = Lage der Rotationsachse des Bruchzylinders
- l_0 = Länge des Bruchzylinders
- ψ_0 = Öffnungswinkel der Endkegel
- $r_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$ Radius des Bruchzylinders bei Böschungsfußkreisen

definiert wird, läßt sich nach der Methode der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung mit Gleichung 9 als Grenzzustandsfunktion die Versagenswahrscheinlichkeit P_f dieses Bruchkörpers berechnen. (vgl. Vortrag von Dr.-Ing. Pottharst und Rackwitz, Peintinger 1981) wobei c_k und $\tan \varphi_k$ normalverteilte Zufallsvariable mit den Verteilungsparametern nach Gleichung 7 sind.

Es gilt:

$$P_f = P(g < 0) \approx \Phi(-\beta) \quad (10)$$

Φ = die Normalverteilung

β = Sicherheitsindex

Entsprechend einer deterministischen Berechnung muß der Bruchkörper gesucht werden, der die geringste Sicherheit aufweist. Im Gegensatz zur deterministischen Berechnung, bei der sich die geringste Sicherheit stets für l_0 ergibt, sich also auf den ebenen Fall zurückführen läßt, da dann die stabilisierende Wirkung der Endflächen wegfällt, ergibt sich bei der Berechnung der Zuverlässigkeit zusätzlich mit zunehmender Bruchlänge l_0 ein immer größer werdender Mittelungseffekt (vgl. Gleichung 7 bzw. Bild 8) und die Streuung der Scherparameter c_k und $\tan\phi_k$ wird immer geringer. Dieser Einfluß läuft der Abnahme der stabilisierenden Wirkung der Endfläche entgegen und man erhält somit eine endliche Bruchlänge l_0 , die am ungünstigsten ist.

Der Sicherheitsindex β wurde am Beispiel einer $H = 15$ m hohen Böschung mit einer Neigung von 1:1,75 für verschiedene Bruchlängen l_0 berechnet, wobei für $\mu_\phi = 25^\circ$, $\sigma_\phi = 6,25^\circ$, $\mu_c = 20$ kN/m², $\sigma_c = 10$ kN/m² und die horizontalen Autokorrelationsparameter gleich 5 mal der vertikalen Autokorrelationslänge $\delta_1 = \delta_2 = 5 \cdot \delta_3$ angenommen wurde. Das Ergebnis ist für 3 verschiedene Autokorrelationslängen in Bild 11 dargestellt. Es ist deutlich ein Minimum von β in Abhängigkeit der Bruchlänge l_0 zu sehen und das Minimum ist mit zunehmender Autokorrelationslänge bei größeren Bruchlängen l_0 , da der Mittelungseffekt mit größerer Autokorrelation geringer ist. Der rein deterministische Sicherheitsbeiwert F_3 errechnet am räumlichen Bruchkörper für die Mittelwerte μ_ϕ und μ_c wird mit zunehmender Bruchlänge stets geringer und konvergiert für große Längen l_0 gegen den Sicherheitsbeiwert $F_2 = 1,3$ für die ebene Bruchfläche.

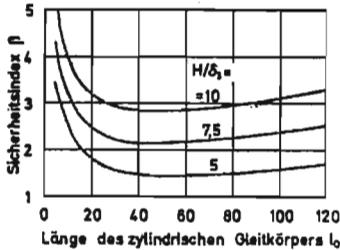


Bild 11: Sicherheitsindex β in Abhängigkeit der Länge l_0 des zylindrischen Gleitkörpers

Abschließend soll der Einfluß der räumlichen Streuung und ihre Modellierung durch Zufallsfelder auf das Versagen von Böschungen in Bild 12 gezeigt werden. Für verschiedene Böschungshöhen und den oben erwähnten Rechenannahmen wurde die Versagenswahrscheinlichkeit P_F bzw. der Sicherheitsindex β (linke Ordinate) errechnet und als durchgezogene Linien aufgetragen. Während die räumliche Streuung von einem deterministischen Sicherheitsbeiwert, wiederum für die Mittelwerte errechnet, (strichpunktierte Linie) nicht berücksichtigt werden kann, ergeben sich für die verschiedenen Autokorrelationslängen wesentliche Unterschiede, zum Teil mehrfache Zehnerpotenzen in der Versagenswahrscheinlichkeit. Die strichlierten Kurven zeigen auf der rechten Ordinate die zugehörigen wahrscheinlichsten Bruchlängen l_0 , die wiederum von einer deterministischen Berechnung nicht erfaßt werden können.

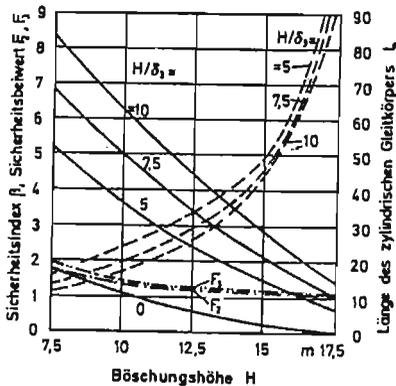


Bild 12: Sicherheitsindex β , Sicherheitsbeiwert F_2 und F_3 und Länge l_0 des zylindrischen G

4. Zusammenfassung

Am Beispiel der Stabilitätsuntersuchung von Böschungen ist ersichtlich, daß die räumliche Streuung der Scherparameter einen wesentlichen Einfluß auf die Standsicherheit haben, was durch eine deterministische Berechnung mit fest vorgegebenen Scherparametern nicht erfaßt werden kann. Bei einer umfassenden Behandlung des Problems kommt hinzu, daß die Parameter wie Mittelwert, Varianz und die Autokorrelationslänge ebenfalls keine bekannten Größen sind, sondern aus einer zufälligen Stichprobe geschätzt werden müssen. Sie müssen deshalb ihrerseits als Zufallsvariable angesehen werden, die die Unsicherheit bei der Standsicherheitsuntersuchung von Böschungen wesentlich beeinflussen. Die Problematik der Schätzung dieser Parameter unter Zuhilfenahme von Vorinformationen wird im nächsten Vortrag von Herrn Dr. Rackwitz behandelt.

Literaturverzeichnis:

- Baligh, M.M.; Azzouz, A.S. (1975): End Effects on Stability of Cohesive Slopes, J. Geotechn. Eng. Div., ASCE 101,GT11, 1975, 1105-1117
- Peintinger, B.; Rackwitz, R. (1980): Numerical Uncertainty Analysis of Slopes, Berichte zur Zuverlässigkeit der Bauwerke, SFB 96, Technische Universität München, Heft 52, 1980
- Rackwitz, R.; Peintinger, B. (1981): Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen, Bauingenieur 56, 1981, 215-221
- Vanmarcke, E.M. (1977): Probabilistic Modeling of Soil Profiles, J. Geotechn. Eng. Div., ASCE 103, GT11, 1977, 1227-1246

KÖNNEN VORINFORMATIONEN ÜBER DEN BAUGRUND QUANTIFIZIERT WERDEN?

R. Rackwitz

1. Einleitung

Das einer früheren Arbeit (Rackwitz/Peintinger, 1981) entnommenem Bild 1 zeigt den Sicherheitsindex β ($= -\phi^{-1}[\text{Versagenswahrscheinlichkeit } P_f]$) einer Dammböschung über dem Umfang einer Zufallsstichprobe für die Schätzung der Verteilungsparameter von Kohäsion und Winkel der inneren Reibung für drei Verhältnisse von Dammhöhe zu vertikalem Korrelationsabstand eines die Bodeneigenschaften beschreibenden Gauß'schen Zufallsfeldes. Die Abszisse ist logarithmisch geteilt. Der Sicherheitsindex erreicht bei $n=100$ bis 1000 den stationären Wert und nimmt für kleinere Stichproben in dramatischer Weise ab. Im Bereich üblicher Stichprobengrößen ($n=1$ bis 10) wird der Sicherheitsindex zu etwa 1 , die zugehörige Versagenswahrscheinlichkeit beträgt rund 10% . In Wirklichkeit beobachtet man jedoch Versagensraten in der Größenordnung von 10^{-3} oder 10^{-4} . Der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung kann und soll hier nur so erklärt werden, daß die Praxis beim Standsicherheitsnachweis von Böschungen in hohem Maße Vorinformationen bei der Festlegung der aktuellen Baugrundeigenschaften verwendet, die ungefähr einer Stichprobe vom Umfang $n=100$ äquivalent sind. Obwohl andere ähnlich ausgerichtete Studien bisher offensichtlich nicht angestellt wurden, möchte der Verfasser die Vermutung äußern, daß entsprechende Verhältnisse fast überall in der Geotechnik vorliegen. Einer Quantifizierung von Vorinformationen über Baugrundeigenschaften kommt mithin größte Wichtigkeit zu - nicht nur für auf der Statistik beruhende Zuverlässigkeitsanalysen.

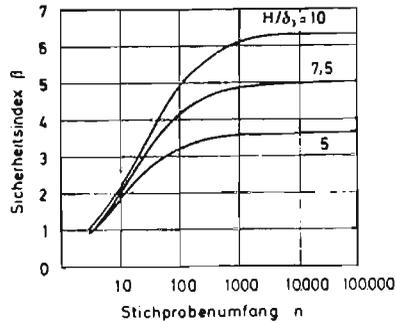


Bild 1: Sicherheitsindex β als Funktion des Informationsumfanges

Ganz generell ist eine sinnvolle, objektiv nachvollziehbare Quantifizierung und Ordnung des Wissens über Bodeneigenschaften von Interesse. Leider sind einschlägige, statistisch orientierte Arbeiten kaum bekannt, die klassischen Tabellen für Bodenkennwerte in den Handbüchern der Geotechnik nur mit Einschränkungen brauchbar, weil zu undifferenziert und die an vielen Stellen gelagerten Untersuchungsberichte von Baugrundsachverständigen ohne einheitliche Ordnungsprinzipien für die Allgemeinheit kaum vielmehr als Zahlenfriedhöfe.

Die Frage, wie welche Vorinformationen quantifiziert werden können, kann allgemein noch nicht beantwortet werden, obwohl die grundsätzliche Frage im Thema dieser Erörterung mit einem eindeutigen "ja" beantwortet werden soll. Am vielversprechendsten erscheint der bereits in der eingangs erwähnten Literaturstelle beschrittene Weg, eine Quantifizierung in Form von a priori Verteilungen für die Parameter der unsicheren Größen vorzunehmen. Solche können dann mit Hilfe des Bayesschen Satzes der Wahrscheinlichkeitslehre mit aktuellen Informationen kombiniert werden. In dem genannten Aufsatz ist auch ein erster Versuch gemacht,

derzeit zur Verfügung stehende, in der Begriffswelt klassischer Denkweisen formulierte Vorinformationen in die Sprache der probabilistischen Betrachtungsweise zu übersetzen und gewisse numerische Studien anzustellen. Auf eine Rückübersetzung der erhaltenen Ergebnisse in dem klassisch ausgebildeten Ingenieur vertraute Begriffe wurde aus verschiedenen Gründen verzichtet. Am wichtigsten schien die Tatsache, daß - und dies gilt offenbar besonders in der Geotechnik - die Sprache der klassisch-deterministischen Betrachtungsweise nicht reich genug ist um die probabilistisch erhaltenen Ergebnisse adäquat wiederzugeben. Eine Übersetzung ist partiell bestimmt nicht unmöglich, doch soll auch hier darauf verzichtet werden. Der Verfasser nimmt in Kauf, damit manchem Leser die Last des Nachlesens von gewissen Begriffen in den Lehrbüchern der Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre aufbürden zu müssen. Insbesondere sei hierzu auf Benjamin/Cornell, 1970 verwiesen.

Feststellungen der Art "Der Winkel der inneren Reibung von rolligen Böden beträgt zwischen 0° und 60° " enthalten wohl wichtige Vorinformationen. Sie sind für Anwendungen so nur viel zu diffus um für praxisnahe Ingenieurentscheidungen von Belang zu sein. Sie werden schon dann sehr viel informativer, wenn nach Klassifizierung der Bereich auf z.B. 33° - 38° eingeschränkt werden kann. Ziel der folgenden Erörterungen ist daher, die Wirkung von Klassifizierungen auf die Formulierung, Quantifizierung und Verwendung von Vorinformationen zu untersuchen und damit auch den Rahmen abzustecken, in welchem ein sinnvolles Sammeln, Auswerten und Abrufen von Vorinformationen vorzunehmen wäre. Natürlich treten dabei für den allgemeinen Fall eine Reihe von z.T. schwierigen und auch noch ungelösten statistischen Problemen auf. Diese werden bewußt ausgespart um das konzeptionelle Gerüst klarer durchscheinen zu lassen. Der Klassifizierungsvorgang selbst, seine logische Struktur, die Probleme, die aus der Mehrdimensionalität der Kriterien erwachsen etc. werden nur gestreift und sollen einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

2. Ein vereinfachtes stochastisches Bodenmodell

Die räumlichen Schwankungen von Bodeneigenschaften können gut durch ein Gauß'sches Zufallsfeld beschrieben werden. Vorinformationen über den Boden betreffen dann im wesentlichen die Parameter, d.h. für ein homogenes Feld den Mittelwert, die Varianz und die Autokorrelationsparameter. Um die nachstehenden Ausführungen zu vereinfachen, sei angenommen, daß der Boden in verschiedene nach geologischer Entstehung und Zustandsform eingeteilte Klassen fällt. Innerhalb einer Klasse sind Streuungs- und Autokorrelationsparameter konstant und bekannt, der Mittelwert in einem gewissen Bereich streuend aber für jeden gegebenen Boden fest und nicht von Ortskoordinaten abhängig. Vorinformationen, das sind also Informationen über die Verteilung des Mittelwerts, den Wert der Varianz und die Werte der Autokorrelationsparameter (damit ist auch eine feste Form der Autokorrelationsfunktion unterstellt) sind mithin an die Klasse gebunden. Weiter beschränken sich die Ausführungen auf ein Merkmal des Bodens, z.B. den Winkel der inneren Reibung. Die Verallgemeinerung auf Merkmalsvektoren ist konzeptionell einfach, kann aber je nach Abhängigkeitsstruktur der Vektoren etwas aufwendig werden. Bereits in Rackwitz/Peintinger, 1981, erwies sich als nützlich zwischen Geologie- und Baustellenstreuung zu unterscheiden. Dabei bezeichnet der Ausdruck "Baustellenstreuung" die räumlichen Schwankungen innerhalb einer "Baustelle" um einen Mittelwert, dessen Schwankung innerhalb einer Klasse von Baustelle zu Baustelle mit "Geologiestreuung" benannt wird. Zweckmäßigerweise schreibt man daher für das Merkmal X eines Bodens der Klasse k

$$X_k(\xi) = X_{1k} + X_{2k}(\xi) \quad (1)$$

wobei $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ zweckmäßig gewählte Ortskoordinaten. $X_{2k}(\underline{\xi})$ ist ein Gauß'sches Zufallsfeld mit dem Mittelwert $E[X_{2k}(\underline{\xi})] = 0$ und der Kovarianzfunktion $\text{Cov}[X_{2k}(\underline{\xi}'), X_{2k}(\underline{\xi}'')] = \sigma_k^2 \rho_k(|\underline{\xi}' - \underline{\xi}''|)$. Der Mittelwert von $X_{1k}(\underline{\xi})$ ist also gleich X_{1k} . Man beachte, daß bei einigen geotechnischen Problemen, z.B. bei Grundbruch- oder Stabilitätsaufgaben die Größe $X_{2k}(\underline{\xi})$ nur untergeordnet oder überhaupt nicht in Erscheinung tritt, da die räumlichen Schwankungen des Bodens im physikalischen Ansatz "ausgemittelt" werden. (Vergleiche hierzu auch den Beitrag Peintinger). In anderen Fällen, etwa wenn Versagen für einen Extremwert von $X_{2k}(\underline{\xi})$ in einem vorgegebenen Bereich auftritt (z.B. Filterversagen) sind natürlich die stochastischen Charakteristika von $X_{2k}(\underline{\xi})$ ebenfalls von Bedeutung. Hervorzuheben ist, daß die Annahme eines Gauß'schen Feldes und hier sogar eines Feldes mit spezieller Autokorrelationsfunktion für $X_{2k}(\underline{\xi})$ (vergl. Beitrag Peintinger) deswegen notwendig erscheint, weil nur für solche befriedigend einfache analytische (Näherungs-) Lösungen für Integral-, Extremwert- oder andere in der Anwendung vorkommende Rechenoperationen bei Zufallsprozessen vorliegen. Selbst wenn das Modell eines Gauß'schen Zufallsfeldes weniger gut mit den Beobachtungen übereinstimmen würde, müßte man diese Annahme um der rechnerischen Handhabbarkeit willen wohl akzeptieren. Für X_{1k} ist die Annahme einer Normal-(Gauß'schen)-verteilung nicht notwendig. Die weiteren Entwicklungen können dann jedoch weitgehend analytisch durchgeführt werden. Sie wird daher im folgenden ebenfalls vorausgesetzt.

3. Klassifizierung, Vorinformationen und aktuelle Beobachtungen

Klassifizierungen des Bodens erfolgen im allgemeinen nach einer ganzen Reihe von Kriterien, die z.T. nicht numerischer Natur sind. Manche der Kriterien hängen nicht von dem interessierenden Merkmal ab. Ist klassifiziert, so gehört zu dieser Klasse eine Verteilung der Größe X_{1k} , in besonders

günstig gelegenen Fällen ein einziger Wert. Die Verteilung von X_{1k} gewinnt man durch Auswertung aller zur Verfügung stehenden Beobachtungen für die k-te Bodenklasse. Sie kann als empirische Verteilung belassen oder einer theoretischen Verteilung angepaßt werden. Wird z.B. in einem ersten Schritt nur die Kenntnis des Wertebereiches für Klasse k ausgenutzt, so könnte man eine Gleichverteilung, d.h. die Dichte $f(x_{1k}) = 1/(b_k - b_{k-1})$ ansetzen. Die so gegebenen Informationen über die mögliche Lage des Feldmittelwertes für Boden der Klasse k vor aktuellen Beobachtungen bezeichnet man als a priori Information. Sie könnte in geeigneter Weise auf Datenbanken abgelegt werden und dort jeweils durch neu hinzukommende Beobachtungen verbessert und vervollständigt werden. Damit kann die Versagenswahrscheinlichkeit eines geotechnischen Problems vorerst berechnet werden. Es bezeichne $g(\underline{x}) \leq 0$ den Bereich im Raum der unsicheren Variablen für den Versagen definitionsgemäß eintritt. Beispiele für solche Versagenskriterien sind in den anderen Beiträgen zur Spezialsitzung angegeben. Weiter sei $Y_k(A)$ die nach einer Operation mit dem Feld $X_{2k}(\underline{\xi})$ entstehende Zufallsvariable, z.B. $Y_k(A) = \max \{X_{2k}(\underline{\xi})\}$ für $\underline{\xi} \in A$ und \underline{z} ein Vektor von Zufallsvariablen, der alle anderen Unsicherheiten umfaßt. Die Versagenswahrscheinlichkeit kann dann formal wie folgt geschrieben werden

$$P_{f,k} = P(g(X_{1k}, Y_k(A), \underline{z}) \leq 0) \quad (2)$$

Die Formulierung (2) setzt voraus, daß die Klassifizierung eindeutig ist. Dies dürfte jedoch in den seltensten Fällen gelingen. Man muß davon ausgehen - und die Praxis zeigt, daß Fehlklassifizierungen zu den häufigsten Versagensursachen gehören -, daß der interessierende Boden auch anderen Klassen zugehören kann. Es sei P_k' die Wahrscheinlichkeit a priori, daß der Boden tatsächlich der Klasse k angehört. Die totale Versagenswahrscheinlichkeit ist dann

mit $\sum P'_k = 1$

$$P'_f = \sum_{k=1}^n P'_k P'_{f,k} \quad (3)$$

$P'_{f,k}$ ist die a priori Versagenswahrscheinlichkeit nach Gl.(2). Kann die Anzahl n der zu berücksichtigenden Klassen festgelegt werden, so sind die Größen P'_k die "Gewichte" (Grade der Glaubwürdigkeit) mit denen der Ingenieur für wahr hält, daß der interessierende Boden tatsächlich der Klasse k angehört. Formal sind dies Wahrscheinlichkeiten. Es sind jedoch subjektive Wahrscheinlichkeiten, die vom Ingenieur in jedem Einzelfall festzulegen sind und zahlenmäßig nicht mit denen eines anderen Ingenieurs übereinzustimmen brauchen; selbst wenn für beide die gleichen objektiven Tatbestände für eine Klassifizierung vorgegeben sind. Solche Unterschiede sind der Ausdruck unterschiedlicher Bewertung der einzelnen Komponenten der objektiven Tatbestände aufgrund verschiedener Ausbildung, Erfahrung und Temperamente. Man beachte, daß die Auswahl nur einer einzigen Klasse, der Klasse i , in diesen Informationszustand, d.h. $P'_i=1$, $P'_k=0$ für $k \neq i$, fast immer zu einer mehr oder weniger ausgeprägten Unterschätzung der Versagenswahrscheinlichkeit führt. Der relative große Grad der Subjektivität im Wert von P'_f , welcher nunmehr auch eher als ein Maß für die Gefahr eines Versagens anstatt als Grenzwert des Quotienten der Anzahl der Versagensfälle zur Gesamtzahl der untersuchten Objekte interpretiert werden sollte, legt nun Überlegungen nahe, wie sich der Wert ändert, wenn die Subjektivität bei der Festlegung der P'_k und die Unentschiedenheit über den "wahren" Wert von X_{1k} durch Beobachtungen abgebaut wird.

Eine mögliche, sicher aber im Ingenieurwesen die befriedigendste Grundlage aktuelle Beobachtungen in die Betrachtungen einzubringen, ist der Satz von Bayes. Wegen

seiner überragenden Bedeutung sei er nachstehend für die Dichte eines unbekanntem Verteilungsparameters ϑ der Zufallsgröße X angegeben. Es ist:

$$f''(\vartheta|z) \propto l(\vartheta|z) f'(\vartheta) \quad (4)$$

Die Dichte der Zufallsgröße X kann man als bedingte Dichte $f(x|\vartheta)$ auffassen, d.h. als Dichte von X bei unbekanntem aber festem ϑ . Die unbedingte Dichte ist dann nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeiten

$$f(x|z) = \int f(x|\vartheta) f''(\vartheta|z) d \quad (5)$$

Man erkennt, daß die gleiche Vorgehensweise schon bei der Formulierung von Gl. (2) verwendet wurde. Die Größe $f''(\vartheta|z)$ heißt a posteriori Dichte, $f'(\vartheta)$ ist die a priori Dichte und $l(\vartheta|z)$ die sogenannte Likelihood von ϑ , wenn das durch z gekennzeichnete Stichprobenergebnis bekannt ist. Der Bayessche Satz gibt also die Wahrscheinlichkeit für einen "Zustand der Natur" an, wenn dafür zunächst eine a priori Festlegung getroffen wurde, diese aber aufgrund eines Stichprobenergebnisses in der gezeigten multiplikativen Weise modifiziert wird.

Es sei nun gezeigt, wie sich die Wahrscheinlichkeit Gl. (3) bei Vorliegen einer "objektiven" Stichprobe für das Merkmal X ändert. Bild 2 veranschaulicht das zugrundegelegte Modell. Es stehen n Klassen zur Auswahl. Die k -te Klasse hat in Bezug auf X_{1k} die Begrenzungen $B_k =]b_{k-1}, b_k]$. Die Klassengrenzen können sich im Prinzip überlappen und werden dies in der Praxis auch häufig tun. Die a priori Dichte von X_{1k} ist zur Vereinfachung der Darstellung eine Konstante, d.h. $f(x_{1k}) = 1/(b_{k-1} - b_k) \cdot X_k(\underline{x})$ ist bei festem \underline{x} eine (X_{1k}, σ_{2k}) normalverteilte Variable. X_{1k} wird durch den

Mittelwert $z = \bar{x}_m = \sum_{i=1}^m x_i$ geschätzt. Hier und im folgenden sei vorausgesetzt, daß die Stichprobe rasterförmig über den interessierenden Bodenkörper verteilt ist. Die Gitterpunkte sind jeweils um mehr als die sogenannte Korrelationslänge voneinander entfernt.

Die Stichprobeninformation verwenden wir nun auf zweierlei Weise. Zum einen dient sie entsprechend Gl. (4) der Verschärfung unserer Information über die unsichere Größe X_{1k} . Man kann z.B. durch einfache Rechnungen zeigen, daß die a posteriori Verteilung von X_{1k} unter den genannten Voraussetzungen eine an den Klassengrenzen gestutzte Normalverteilung ist

$$F''(x_{1k}) = \phi\left(\frac{x_{1k} - \bar{x}_m}{\sigma_{2k}/\sqrt{m}}\right) / \left[\phi\left(\frac{b_k - \bar{x}_m}{\sigma_{2k}/\sqrt{m}}\right) - \phi\left(\frac{b_{k-1} - \bar{x}_m}{\sigma_{2k}/\sqrt{m}}\right) \right] \quad (6)$$

für $b_{k-1} < X_{1k} \leq b_k$. Die Verteilung enthält die Werte b_{k-1}, b_k und das Stichprobenergebnis \bar{x}_m als Parameter. Auf analoge Weise kann die a priori Information für die k-te Klasse auf den neuesten Stand gebracht werden. Für $\bar{x}_m \in B_k$ verbessert man natürlich nur die Information für die k-te Klasse, da $\bar{x}_m \in B_k$ keine neuen Informationen für die anderen Klassen enthält.



Bild 2: Gleichverteilte a priori Dichten für den Mittelwert X_1 für drei verschiedene Klassen und Klassierungsintervalle $[a_{i-1}, a_i]$ für den Stichprobenmittelwert.

Zum anderen dient die Stichprobe der Verbesserung der "Gewichte" P_k . Hierzu führen wir die folgende Klassifizierungsvorschrift ein:

$$\bar{x}_m \in]a_{k-1}, a_k] = A_k \Rightarrow \text{Klasse } K_k \quad (7)$$

wobei sich nunmehr, um eindeutige Klassifizierungen zu ermöglichen, die Klassengrenzen in der Zuweisungsvorschrift nach Möglichkeit nicht überlappen dürfen - genau genommen eine lückenlose Folge bilden. Nach dem Bayesschen Satz ist

$$P_i'' = N^{-1} P_i' \int_{b_{i-1}}^{b_i} P(\bar{x}_m \in A_k | x_1) f_i'(x_1) dx_1 \quad (8)$$

mit

$$N = \sum_{i=1}^n P_i' \int_{b_{i-1}}^{b_i} P(\bar{x}_m \in A_k | x_1) f_i'(x_1) dx_1 \quad (9)$$

Hierin ist $P(\bar{x}_m \in A_k | x_1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Stichprobenmittelwert in die k-te Klasse fällt, wenn $X_1 = x_1$ der "wahre" Mittelwert von $X(\xi)$, $f_i'(x_1)$ ist die a priori Dichte von X_1 in der i-ten Klasse. Man beachte, daß hier nicht eigentlich klassifiziert wird, d.h. eine endgültige Entscheidung über die wahre Klasse getroffen wird. Dann wäre die Versagenswahrscheinlichkeit nach Gl.(2) zu ermitteln. Andere Klassen werden nach wie vor zugelassen. Die a posteriori Versagenswahrscheinlichkeit ist demnach:

$$P_f'' = \sum_{k=1}^n P_k'' P_{f,k}'' \quad (10)$$

wobei die Anführungsstriche bei $P_{f,k}$ darauf hinweisen sollen, daß nunmehr in Gl.(2) für die Größe X_{1k} die Verteilung Gl.(6) zu verwenden ist. Es sei noch angegeben, daß für $\sigma_{2k} = \sigma$ die Integrale in Gl.(8) und (9) bei normalverteiltem X_k analytisch angewertet werden können.

$$\int_{b_{i-1}}^{b_i} P(\bar{X}_m \in A_k | x_1) f_i(x_1) dx_1$$

$$= \frac{\sigma}{(b_i - b_{i-1}) \sqrt{m}} \left[-A_1 \phi(A_1) - \varphi(A_1) + A_2 \phi(A_2) + \varphi(A_2) \right. \\ \left. + A_3 \phi(A_3) + \varphi(A_3) - A_4 \phi(A_4) - \varphi(A_4) \right] \quad (11)$$

mit $A_1 = (a_k - b_i) c$, $A_2 = (a_{k-1} - b_i) c$, $A_3 = (a_k - b_{i-1}) c$, $A_4 = (a_{k-1} - b_{i-1}) c$, $c = \sqrt{m} / \sigma$. Damit kann Gl.(10) ohne Schwierigkeiten ermittelt werden. - für $g(\cdot) = X_{1k} + X_{2k} \leq 0$ sogar analytisch.

Es ist wichtig, sich klar zu machen was da passiert. Das Stichprobenergebnis \bar{x}_m ändert zunächst alle hier gleichverteilten a priori Verteilungen etwa in der in Bild 3 gezeigten Weise.

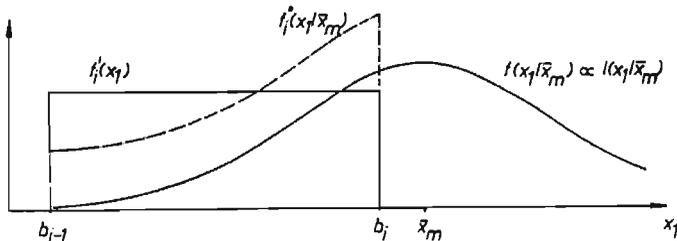


Bild 3: A priori und a posteriori Dichten und Stichprobenlikelihood für Bodenklasse i.

Das Ergebnis ist ein Ausschnitt aus einer Normalverteilung, dessen Inhalt auf Eins normiert ist. Die vergleichsweise größten Veränderungen treten in der Klasse auf, in die das Ergebnis \bar{x}_m fällt. Bei nicht zu großen Klassenbreiten und nicht zu großen Stichprobenumfängen m dürften sich die Unterschiede zwischen a priori und a posteriori Verteilung für X_{1i} jedoch in Grenzen halten. Dramatische Änderungen erfahren die Werte P_k . Ein Blick auf das Integral in Gl. (8) zeigt, daß dies einen Wert nahe Eins annimmt, wenn $i=k$; selbst wenn die Intervalle $B_k =]b_{k-1}, b_k]$ und A_k etwas verschieden sind. Ist dagegen i von k sehr verschieden, so wird $P(\bar{x}_m \in A_k | X_{1i})$ ein sehr kleiner Wert und somit die Werte des Integrals und mithin auch die P_i'' bei nicht zu verschiedenen P_i' . Diese Tendenz verstärkt sich natürlich mit der Stichprobengröße m , so daß asymptotisch für $\bar{x}_m \in A_k$ sich Gl. (10) auf Gl. (2) reduziert mit $X_{1k} = \bar{x}_m = \text{konstant}$. Dieser Zustand richtiger Klassifizierung und perfekter Information über X_{1k} dürfte natürlich kaum je erreicht werden. Trotzdem dürfte dieser Zustand die Grundlage sein, auf der praktische Regeln für die Auswahl von Bodenkennwerten aufgebaut werden müßten.

Man könnte anführen, daß das gezeigte Vorgehen an dem Konzept der Klassifizierung für endliche Stichprobenumfänge nur insoweit festhält, als mit der Festlegung der Klassen die jeweiligen a priori Verteilungen bestimmt sind. Falls $\bar{x}_m \in A_k$ könnte auch direkt mit $P_k''=1$ und der entsprechenden a posteriori Verteilung $F''(x_{1k})$ in Gl. (2) weitergearbeitet werden. Das wichtigste Argument gegen diese Vereinfachung ist, daß die Klassifizierung wohl nur selten vorrangig im Hinblick auf die Größe von X_1 vorgenommen wird. Verschiedene, auf Grund ganz anderer Kriterien definierte Klassen können sehr wohl fast gleiche a priori Bereiche für X_1 aufweisen und damit nach der Stichprobe auch sehr ähnliche a posteriori Verteilungen. Eine Stichprobe für X bringt die Unterscheidung zwischen Klassen in solchen Fällen kaum weiter. Hier muß man zusätzliche qualitative oder quanti-

tative Merkmale heranziehen um durch die Werte P'_i bzw. P''_i deutliche Präferenzen zu erzeugen. Auf die Darstellung von Einzelheiten der dabei anzuwendenden Methode muß hier verzichtet werden.

Art und Umfang aktueller Beobachtungen bleiben vor allem aus Kostengründen in der Praxis immer beschränkt. Daraus folgt, daß der richtigen Klassifizierung noch vor der Beobachtung allergrößte Bedeutung zukommt, denn erst durch die Klassifizierung wird der mögliche Bereich von Werten X_1 so eingeschränkt, daß die Geologieunsicherheit in erträglichen Grenzen bleibt. Ohne die Ergebnisse von numerischen Untersuchungen vorwegzunehmen, sei die Behauptung aufgestellt, daß bei vernünftiger Einteilung der Klassen und richtiger Klassifizierung im aktuellen Fall die verbleibende a priori Unsicherheit über X_1 in vielen Anwendungen durch entsprechende Bemessungsmaßnahmen aufgefangen werden kann. Implizit ist damit auch gesagt, daß ausreichend viele Klassen mit jeweils nicht zu großen Parameterbereichen gebildet werden müssen. Klassifizierungskriterien müssen also so aufgestellt (und angewendet) werden, daß im großen und ganzen der jeweils klassierten Bodenart eine hohe und von Klassierer zu Klassierer auch wenig verschiedene Wahrscheinlichkeit p'_k zukommt.

Klassierungskriterien sollten mehrdimensional sein. Sie könnten sequentiell aufgebaut werden und eine Entscheidung nach dem Ausschließungsprinzip erfolgen lassen. Solche Entscheidungsprozesse können formalisiert werden. Unter dem Schlagwort "artificial intelligence", bezogen auf sogenannte "Expertenbefragungen" verbirgt sich ein jüngst in die Diskussion gekommenes Konzept, welches entsprechende Frage- und Antwort-Spiele in optimaler Weise organisiert und mit den zur Verfügung stehenden und ständig vervollständigten a priori Informationen verbindet. Daß der so formalisierte Entscheidungsprozeß meist leistungsfähiger ist als individuelle Intuition erscheint offensichtlich und wurde mehrfach experimentell bestätigt, (z.B. bei der

Ölsuche oder in der medizinischen Diagnostik). Wegen der Ähnlichkeit der Ausgangssituationen ist es sicher nicht verfehlt, experimentelle Unterstützung auch bei geeigneten formalen Ansätzen für geotechnische Klassifizierungsaufgaben erwarten zu dürfen. Hier tut sich ein Feld sehr nützlicher Forschungs- und Entwicklungsarbeit auf. Über erste Anwendungen solcher Methoden soll später berichtet werden.

4. Zusammenfassung

Ohne Vorinformationen kommt man in der Geotechnik kaum aus. Dies gilt bei deterministischer Betrachtungsweise und natürlich noch viel mehr für die schärfere probabilistische Betrachtungsweise, die als wesentliches Element enthält, daß sie immer auch quantitativ Rechenschaft über den Unsicherheitscharakter der Bestimmungsgrößen und Entscheidungen ablegen muß. Vorinformationen können im Sinne des Bayesschen Satzes als a priori Wahrscheinlichkeiten quantifiziert werden und in häufig einfacher Weise mit aktuellen Daten kombiniert werden. Ein ganz wesentliches Hilfsmittel, den Parameterbereich einer geotechnisch interessierenden Größe einzuengen, ist die Klassifizierung von Böden. Vorinformationen werden mithin nur in Verbindung mit definierten Klassen quantifiziert. Die Vorgehensweise ist für ein einfaches stochastisches Bodenmodell erläutert. Die Möglichkeit von Fehlklassifizierungen wird berücksichtigt und gezeigt, daß mit Zunahme des Umfangs von aktuellen Daten Fehlklassifizierungen zunehmend unwahrscheinlicher werden. Die Bedeutung sinnvoller Klassifizierungskriterien wird hervorgehoben und angeregt, den Klassifizierungsprozeß nach den Grundsätzen eines neuen Wissensgebietes mit dem leider irreführenden Namen "artificial intelligence" zu formalisieren.

Abschließend muß hervorgehoben werden, daß die angegebenen Konzepte und Vorgehensweisen dann sinnvoll eingesetzt werden können, wenn als Ziel nur eine globale Beschreibung der Streuungen der Baugrundeigenschaften in Form

eines Zufallsfeldes definiert ist. Soll lokal die besondere Ausprägung eines solchen Zufallsfeldes unter Zuhilfenahme von Vorinformationen bestimmt werden, muß anders vorgegangen werden. Vorallem kommt den aktuellen Beobachtungen dann viel größere Bedeutung zu. Auf die diesbezügliche Literatur, vor allem im Bereich der Erforschung von Lagerstätten wird hingewiesen.

Literaturverzeichnis

Benjamin, J.R.; Cornell, C.A.: Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill, New York, 1970.

Rackwitz, R.; Peintinger, B.: Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen, Der Bauingenieur, 56, 1981, S. 215 - 221.

QUANTIFIZIERUNG VON VORINFORMATIONEN ZUR BESSEREN
KLASSIFIZIERUNG UND ABLEITUNG VON KLASSENSPEZIFISCHEN
BEMESSUNGSWERTEN FÜR BODENKENNGRÖßEN

W. Reitmeier

W. Kruse

R. Rackwitz

Statistische Betrachtungsweisen werden zunehmend auch im Grundbau angewandt. Sie sind besonders geeignet bei der Festlegung von Bodenkennwerten, wobei gleichzeitig die Streuung der Bodeneigenschaften und das Sicherheitsniveau des grundbaulichen Problems eingehen sollte. Da in der Praxis selten genügend Aufschlüsse vorliegen, ist es üblich, den Streubereich durch Klassifizierung einzuschränken. Die Arbeit untersucht die statistischen Aspekte der Klassifizierung, insbesondere die Rolle von Vorinformationen einschließlich direkter und indirekter Beobachtungen, sowie den Einfluß von Fehlklassifizierungen. Daraus werden Regeln zur Bestimmung von Bemessungswerten für Bodenkenngößen abgeleitet.

Einführung:

Die im Grundbau maßgebenden Unsicherheiten lassen sich einteilen in Unsicherheiten über die räumliche Fluktuation der Bodeneigenschaften, Unsicherheiten über die globalen Parameter (Verteilungsparameter) des anstehenden Bodens und Unsicherheiten über Begrenzungen (Schichtgrenzen) bei Vorhandensein unterschiedlicher Bodentypen. Darüberhinaus ergeben sich Unsicherheiten über die physikalischen Zusammenhänge und schließlich, wohl meist weniger bedeutend, Unsicherheiten über die Größe der Lasten. Dabei ist im Einzelfall kaum zu sagen, welche der genannten Unsicherheiten am bedeutsamsten ist. Ungeachtet dessen erfolgen die nachstehenden Erörterungen ausschließlich für die beiden erstgenannten Unsicherheiten. Ihre Quantifizierung soll mit den Methoden von Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre erfolgen. Damit können dann sicherheitsrelevante Größen wie der Sicherheitsbeiwert oder Rechenwerte für die Bodeneigenschaften abgeleitet werden.

Anwendungen probabilistischer Methoden in geotechnischen Problemstellungen haben gezeigt, daß es ohne zusätzliche Überlegungen unbefriedigend bleibt, die für den konstruktiven Ingenieurbau entwickelten sicherheitstheoretischen Konzepte (Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen) auf den Grundbau zu übertragen. Ein wesentlicher Grund dafür ist, daß hier die maßgebende Unsicherheit vielfach bei der Klassifizierung des Bodentyps, die eine Aussage über die Verteilungsparameter beinhaltet, bzw. in den durch Art und Umfang der Probennahme bedingten Unsicherheiten liegt. Rackwitz, R./Peintinger, B. (1981) fanden z.B., daß bei dem üblichen geringen Stichprobenumfang in Aufschlußuntersuchungen, ohne Berücksichtigung von weiteren Informationen, infolge der rein statistisch bedingten Unsicherheit der Verteilungsparameter keine ausreichende Standsicherheit von Böschungen nachgewiesen werden kann. Peintinger, B./Reitmeier, W. (1983) zeigten noch, daß dafür vor allem die Unsicherheit über den Mittelwert verantwortlich ist. Die grundbauliche Praxis weist jedoch gegenüber so ausgeführten Rechnungen wesentlich niedrigere Versagensraten auf. Das läßt sich nur so erklären, daß langjährige Erfahrungen von Sachverständigen in komplexer Weise bei der Beurteilung des Bodens und seines Tragverhaltens mit verarbeitet werden. Eine Quantifizierung dieses Vorwissens, sowie der damit zwangsläufig verbundenen Unsicherheiten, bedingt durch subjektive Einschätzung und Ausbildung, kann wiederum auf probabilistischem Wege erfolgen. In Übereinstimmung mit der derzeitigen Praxis bietet es sich an, das Vorwissen nach (Boden-) Klassen zu ordnen. Vorinformationen können dann auf "Datenbanken" klassenspezifisch gespeichert und jederzeit durch

neue Informationen erweitert werden.

Eine der Grundlagen, Vorinformationen (a-priori) und aktuelle Beobachtungen für eine schärfere Aussage (a-posteriori) zu verknüpfen, liefert der in der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannte Satz von Bayes. Sein Inhalt wird für das folgende vorausgesetzt. Ziel dieser Arbeit ist eine Untersuchung der Wirkung von Klassifizierung, wenn ausgehend von verschiedenen Informationszuständen eine Aussage über die "richtige" Bodenklasse erforderlich ist. Zentrale Fragen sind dabei der erforderliche Informationsumfang und die Ableitung von klassenspezifischen Bemessungswerten, die grundsätzlichen Standsicherheitsnachweisen direkt zugrunde gelegt werden können. Die Untersuchungen bauen auf früheren Arbeiten auf [Rackwitz, R. (1982)].

Vereinfachtes stochastisches Bodenmodell

Teilt man die verschiedenen Bodenarten ihrer geologischen Entstehung und Eigenschaften entsprechend in abgeschlossene Klassen definierter Weite ein, so lassen sich innerhalb dieser Intervalle die räumlichen Schwankungen von Bodeneigenschaften gut durch ein normales Zufallsfeld beschreiben. Vorinformationen beziehen sich dann im wesentlichen auf dessen an die jeweilige Klasse gebundenen Parameter, Mittelwert (X_{1k}), Standardabweichung ($D[X_k]$) und Autokorrelationsparameter (ρ). Normale (Gauß'sche) Zufallsfelder erfassen Beobachtungen im allgemeinen gut. Wird die Normalverteilung zudem für die Formulierung der Vorinformation gewählt, ergeben sich bei der Ableitung von Bemessungswerten einfache Rechenausdrücke bzw. analytische Lösungen. Die Annahme ist darüber hinaus durch den Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie gerechtfertigt und sei hier für alle Rechnungen unterstellt.

Innerhalb der Klasse sollen, mit Hinweis auf [Peintinger, B./Reitmeier, W. (1983)] die Standardabweichung und Autokorrelationsparameter als bekannt angenommen werden. Diese Vereinfachung bedingt auch die Wahl einer speziellen Autokorrelationsfunktion, deren Einfluß jedoch von untergeordneter Bedeutung ist und demzufolge aus mathematischen Überlegungen so gewählt werden kann, daß analytische Lösungen für Integral-, Extremwert- oder andere in der Anwendung vorkommenden Rechenoperationen bei Zufallsprozessen möglich sind. Beschränkt sich die Klassifizierung auf nur ein Merkmal X eines Bodens, z.B. den Winkel der Inneren Reibung oder die Kohäsion, so wird diese Eigenschaft durch die nachfolgende Gleichung vollständig beschrieben.

$$X_k(\xi) = X_k + X_{2k}(\xi) \quad (1)$$

X_{1k} steht für die "Geologiestreuung" des Mittelwertes, dessen Verteilung entsprechend den vorhandenen Informationen die für die einzelne Baustelle ortsunabhängigen Mittelwertschwankungen der verschiedenen Böden beschreibt.

$X_{2k}(\xi)$ modelliert die Baustellenstreuung, ortsabhängig als Gauß'sches Zufallsfeld mit den Ortsparametern $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$.

Bei Annahme von Stationarität lassen sich der Erwartungswert und die Autokorrelation durch die nachfolgenden Ausdrücke darstellen.

$$E[X_{2k}(\xi)] = 0 \quad (2)$$

$$\text{Cov}[X_{2k}(\xi_i), X_{2k}(\xi_j)] = \sigma_{2k}^2 \varphi(|\xi_i - \xi_j|) \quad (3)$$

Der Mittelwert von $X_k(\xi)$, Zufallsvariable in der jeweiligen Klasse k ist also gleich X_{1k} . Bei einigen geotechnischen Problemen spielen die Schwankungen von $X_{2k}(\xi)$ infolge eines physikalisch mittelnden Ansatzes, wenn überhaupt, eine nur untergeordnete Rolle. In anderen Fällen ist gerade das Verhalten von $X_{2k}(\xi)$ und eventuell damit verbundene Extremwerte (z.B. Filterversagen) von besonderem Interesse.

Diese prinzipiell unterschiedlichen Anforderungen an das gewählte Modell lassen sich jedoch durch Integration über das zu beschreibende Volumen (bzw. Fläche) berücksichtigen. Hat man zur Beschreibung der Baustellenstreuung in jeder Klasse k getrennt für die Varianz den Wert σ_{2k}^2 , so läßt sich im Fall eines physikalisch mittelnden Ansatzes (z.B. Böschungen) die räumliche Fluktuation über die betrachtete Maßeinheit H (Volumen V oder Fläche A) mit Hilfe der nachfolgenden Beziehung berücksichtigen.

$$Y_{2k}(H) = \frac{1}{H} \int_H X_{2k}(\xi) / \sigma_{2k}^2 \quad (4)$$

Mittelwert und Varianz der Zufallsgröße $Y_{2k}(H)$ sind:

$$E[Y_{2k}(H)] = 0 \quad \text{Var}[Y_{2k}(H)] = \sigma_{2k}^2 \frac{1}{c(H)} \quad (4a)$$

Damit reduziert sich bei vorausgesetzter Unabhängigkeit zwischen X_{1k} und $X_{2k}(\xi)$ der Anteil von X_{2k} bzw. Y_{2k} an der Gesamtvarianz von X_k entsprechend dem der Problemstellung gemäßen Fläche (bzw. Volumen) mit dem Faktor $\frac{1}{c(H)}$. Für $H \rightarrow \infty$ geht also $\text{VAR}[Y_{2k}(H)]$ gegen Null. Unabhängig von den jeweiligen Verteilungen für X_{1k} und $X_{2k}(\xi)$ läßt sich so die Varianz für die Zufallsvariable $X_k(\xi)$ durch die Summe

$$\text{Var}[X_k(\xi)] = \text{Var}[X_{1k}] + \frac{1}{c(H)} \sigma_{2k}^2 \quad (5)$$

berechnen.

Klasseneinteilung und Versagenswahrscheinlichkeiten mit und ohne Beschränkung auf eine Klasse

Für die weiteren Ausführungen sei angenommen, daß das Merkmal X die interessierende Eigenschaft eines Bodens charakterisiert. Die Größe X_{1k} wird der Klasse k zugeordnet und zur Vereinfachung schließen wir ein Überlappen der Klassengrenzen in Bezug auf die Größe X_{1k} aus. Jeder Klasse k wird aufgrund der vorhandenen Informationen eine Verteilung von X_{1k} zugewiesen. In günstigen Fällen kann dies auch ein einzelner Wert sein. Ohne weitere Information erscheint der Ansatz einer Gleichverteilung, d.h. die Dichte $f(x_{1k}) = \frac{1}{b_k - b_{k-1}}$ in jeder Klasse natürlich. Die so quantifizierte Information, also vor aktuellen Beobachtungen über die tatsächliche Lage von X_{1k} sei als nicht informative a-priori Information bezeichnet. Liegen jedoch Beobachtungen über die Lage von X_{1k} aus anderen Bauvorhaben vor, so kann die a-priori Verteilung auch eine andere Form haben.

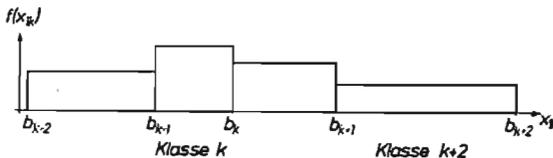


Bild 1: Nicht informative a-priori Informationen, gleichverteilt in allen Klassen für den Mittelwert X_{1k} .

In einem ersten Schritt läßt sich damit die Versagenswahrscheinlichkeit eines geotechnischen Problems für jede Klasse k getrennt berechnen. Umgekehrt kann man bei vorgegebener Versagenswahrscheinlichkeit Bemessungswerte angeben, was in einem weiteren Kapitel näher ausgeführt werden wird.

Bezeichnet man die Trennung zwischen Versagens- und Überlebensbereich mit einer Grenzzustandsfunktion $g(\cdot)$, so definiert $g(\cdot) \leq 0$ den Bereich der unsicheren Variablen, für den definitionsgemäß Versagen eintritt. Weiterhin sei $Y_{2k}(H)$ die nach einer Operation mit dem Feld $X_{2k}(\underline{\xi})$ entstehende Zufallsvariable und \underline{z} ein Vektor der für die Problemstellung relevanten zusätzlichen unsicheren Größen. Somit läßt sich die Versagenswahrscheinlichkeit formal für die Klasse k wie folgt schreiben.

$$P_{i,k} = P\{g|X_k, Y_{2k}(H), \underline{z} \leq 0\} \quad (6)$$

Diese Formulierung (6) setzt die genaue Kenntnis der wahren Klasse k voraus. In der Praxis wird eine eindeutige Klassenzuordnung jedoch nur in Ausnahmefällen möglich sein, so daß eine wesentliche Versagensursache in einer eventuellen Fehlklassifizierung liegt. Aus diesem Grund scheint es ratsam, ein Verfahren zu wählen, das diese Unsicherheit entsprechend den vorhandenen Informationen mit berücksichtigen kann. Jeder Klasse k wird subjektiv vom Ingenieur in jedem Einzelfall eine Gewichtung p'_k zugeteilt. Diese formal als Wahrscheinlichkeiten anzusehenden "Gewichte" (Grade der Glaubwürdigkeit) können den gesamten Wertebereich von X_{1k} abdecken. Mit der Bedingung von $\sum_{k=1}^K p'_k = 1$ kann die totale a-priori Versagenswahrscheinlichkeit P'_E durch die nachfolgende "gewichtete" Summe angegeben werden.

$$P'_E = \sum_{k=1}^K p'_k P_{i,k} \quad (7)$$

$P'_{E,k}$ ist die nach Gleichung (6) ermittelte a-priori Versagenswahrscheinlichkeit, wenn als Verteilung für X_{1k} die a-priori Dichte verwendet wird. Alle bisher angestellten Betrachtungen beschränken sich auf die allein durch Vorinformationen gegebenen Aussagen über den Mittelwert X_{1k} . Es soll nun mit Hilfe des Satzes von Bayes die Verknüpfung von aktueller Information mit a-priori Information vorgestellt werden. Dabei unterscheiden wir zwei Arten von aktuellen Informationen.

Beobachtungen der Größe X_1 , geschätzt durch den Mittelwert $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_{1i}$, können sowohl für die Aktualisierung der Verteilung von X_1 bzw. X_{1k} , als auch für die Gewichtungen benutzt werden. Indirekte Beob-

achtungen, d.h. von Merkmalen die mehr oder weniger indikativ für die tatsächliche Lage von X_1 sind, im weiteren mit dem Vektor \underline{u} bezeichnet, sollen in dieser Arbeit ausschließlich für die Verbesserung der Klassengewichtung verwendet werden. Liegen durch den Mittelwert \bar{X}_n geschätzte, aktuelle Messungen für die Größe X_{1k} vor, so läßt sich bei Annahme einer gleichverteilten a-priori Verteilung die durch Verarbeitung nach Bayes entsprechende a-posteriori Dichte von X_{1k} analytisch angeben. Mit den Klassengrenzen b_{k-1} , b_k entsteht durch Integration eine beidseitig gestutzte Normalverteilung.

$$f(x_k | \underline{u}) = \frac{f(x_k | \underline{u}) f(x_k)}{\int_k f(x_k | \underline{u}) f(x_k) dx_k} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \bar{X}_n}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}{\Phi\left(\frac{x - b_{k-1}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x - b_k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)} \quad (8)$$

$$(b_{k-1} \leq X_{1k} \leq b_k)$$

Man beachte, daß diese Vorgehensweise, unabhängig der Lage von \bar{X}_n , für alle Klassen K durchzuführen ist. Verwendung von Gleichung (8) in Gleichung (6) führt zur a-posteriori Versagenswahrscheinlichkeit $P''_{f,k}$. In analoger Weise läßt sich auch die Aussage über die Klassengewichtungen verschärfen. Verwendet man von $\bar{X}_n \in [a_{j-1}, a_j] = A_j$ nur die Kenntnis des durch die Grenzen abgeschlossenen Intervalls, so ergibt sich eine durch die Stichprobe \bar{X}_n verbesserte a-posteriori Gewichtung nach folgender Gleichung.

$$P_k^*(\bar{X}_n \in A_j) = \frac{P_k \int_{b_{j-1}}^{b_j} p(\bar{X}_n \in A_j | x_k) f(x_k) dx_k}{\sum_{i=1}^K P_i \int_{b_{i-1}}^{b_i} p(\bar{X}_n \in A_j | x_i) f(x_i) dx_i} \quad (9)$$

Die Integrale in Gleichung (9) können analytisch ausgewertet werden.

$$\int_{b_{j-1}}^{b_j} p(\bar{X}_n \in A_j | x_k) f(x_k) dx_k = \frac{\sigma_{2k}/\sqrt{n}}{b_j - b_{j-1}} = (-A_1 \Phi(A_1) - \varphi(A_1) + A_2 \Phi(A_2) + \varphi(A_2) + A_3 \Phi(A_3) + \varphi(A_3) - A_4 \Phi(A_4) - \varphi(A_4)) \quad (10)$$

$$A_1 = \frac{a_j - b_j}{\sigma_{2k}/\sqrt{n}} \quad A_2 = \frac{a_{j-1} - b_j}{\sigma_{2k}/\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{a_j - b_{j-1}}{\sigma_{2k}/\sqrt{n}} \quad A_4 = \frac{a_{j-1} - b_{j-1}}{\sigma_{2k}/\sqrt{n}}$$

Verwendet man den Stichprobenmittelwert \bar{X}_n direkt, nützt also die diesem Wert innewohnende Information voll aus, so erhält man sogar noch einfachere Formeln.

$$p_k^*(\bar{X}_n) = \frac{\sum_{i=1}^K p(\bar{X}_n | k_i) p(k_i)}{\sum_{i=1}^K p(\bar{X}_n | k_i) p(k_i)} \quad (11)$$

$$p(\bar{X}_n | k) = \int_k p(\bar{X}_n | x_k) f'(x_k) dx_k = \frac{\phi(\frac{\bar{X}_n - a_{j-1}}{\sigma_{2k} / \sqrt{n}}) - \phi(\frac{\bar{X}_n - a_j}{\sigma_{2k} / \sqrt{n}})}{a_j - a_{j-1}}$$

Sowohl Gleichung (9) als auch (11) verarbeiten direkte Beobachtungen des zu klassifizierenden Merkmals mit den subjektiv gewählten Klassengewichten. In vielen Fällen wird es schwierig oder unwirtschaftlich sein, Messungen der zu klassifizierenden Größe überhaupt oder in ausreichendem Umfang zur Verfügung zu stellen. Aus diesen Gründen und im Hinblick auf eine möglichst umfassende Verwendbarkeit jeglicher Information ist es wünschenswert, auch auf X_{1k} hinweisende Merkmale so z.B. Farbe, Geruch, Pflanzenbewuchs oder Kornverteilung für das Aufsuchen der "wahren" Klasse von X_{1k} mit zu verwenden. Ein dafür geeignetes Verfahren ist der in der Statistik bekannte Diskriminanzanalyse ähnlich. Bezeichnet man indirekte klassenspezifische Informationen mit dem Vektor \underline{u} , so läßt sich bei Annahme einer Normalverteilung mit Mittelwert $\underline{\mu}_{k1}$ und Covarianzmatrix $\underline{\Sigma}_{k1}$ eine Aussage der Klassengewichtungen durch die nachfolgende Gleichung verschärfen.

$$p(k_i | \underline{u}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\underline{\Sigma}_{k1}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{u} - \underline{\mu}_{k1})' (\underline{\Sigma}_{k1}^{-1}) (\underline{u} - \underline{\mu}_{k1})} p_i}{\sum_{j=1}^K (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\underline{\Sigma}_{kj}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{u} - \underline{\mu}_{kj})' (\underline{\Sigma}_{kj}^{-1}) (\underline{u} - \underline{\mu}_{kj})} p_j} \quad (12)$$

für den Sonderfall $\underline{\Sigma}_{k1} = \underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho \\ \rho & \sigma^2 \end{pmatrix}$ und der Abkürzung

$$\underline{u}_{k_1} = \underline{u} - \underline{\mu}_{k_1} \text{ bzw. } \underline{u}_{k_1} = [u_{k_1}(1), u_{k_1}(2), \dots, u_{k_1}(S)] \text{ folgt:}$$

$$p(k_i | u) = \frac{e^{t_2 q_i} p_i}{\sum_{j=1}^K e^{t_2 q_j} p_j} \quad (12a)$$

mit
$$q_i = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{v=1}^5 u_{iv} - \frac{1}{1(q+5-1)} \sum_{v,w} u_{iv} u_{iw} \right) \quad (12b)$$

Bezeichnet man die durch $f''(x_{1k} | \bar{x}_n)$ aktualisierte Versagenswahrscheinlichkeit in Gleichung (6) mit $p''_{i,k}$, so läßt sich die totale a-posteriori Versagenswahrscheinlichkeit analog Gleichung (7) durch die nachfolgende Beziehung darstellen.

$$P_i'' = \sum_{k=1}^K p_k'' P_{i,k}'' \quad (13)$$

Dabei wird die Verwendung indirekter Hinweise auf die Klassenzugehörigkeit durch die Beobachtung des Vektors \underline{u} zweckmäßigerweise so interpretiert, daß damit genauere a-priori Gewichtungen p_k'' festgelegt werden. p_k'' beinhaltet also immer auch direkte Beobachtungen.

Klassifizierung, Auffinden der maßgebenden Klasse

Auf eine Klassifizierung im eigentlichen Sinn wurde bislang verzichtet. Gleichwohl ist sie das Ziel dieser Arbeit. Die Beschränkung auf eine Klasse, z.B. bei der Ableitung des Bemessungswertes, setzt aber voraus, daß das der Klasse zugehörige Produkt von Gewichtung und Versagenswahrscheinlichkeit, die totale Versagenswahrscheinlichkeit in Gleichung (13) dominiert und diese Dominanz muß vorrangig durch die Gewichtungswahrscheinlichkeit $p''_{i,k} \rightarrow 1$ und folglich alle anderen $p''_{i,k}$ ($i \neq k$) gegen Null erreicht werden.

Ist die wahre "Klasse" die Klasse k^* , so vergegenwärtigt man sich insbesondere, daß den Klassen mit Klasse i ($i < k^*$) sehr große Versagenswahrscheinlichkeiten zukommen können, wenn das Nachweisproblem so geartet ist, daß der Zunahme der Größe X_1 eine Abnahme der Versagenswahrscheinlichkeit entspricht. (Im umgekehrten Fall gilt entsprechendes.) In der nachfolgenden Darstellung ist die totale Versagenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Umfang der Information (Stichprobenumfang n und Anzahl der indirekten Klassifizierungsmerkmale) für ein Beispiel aufgetragen.

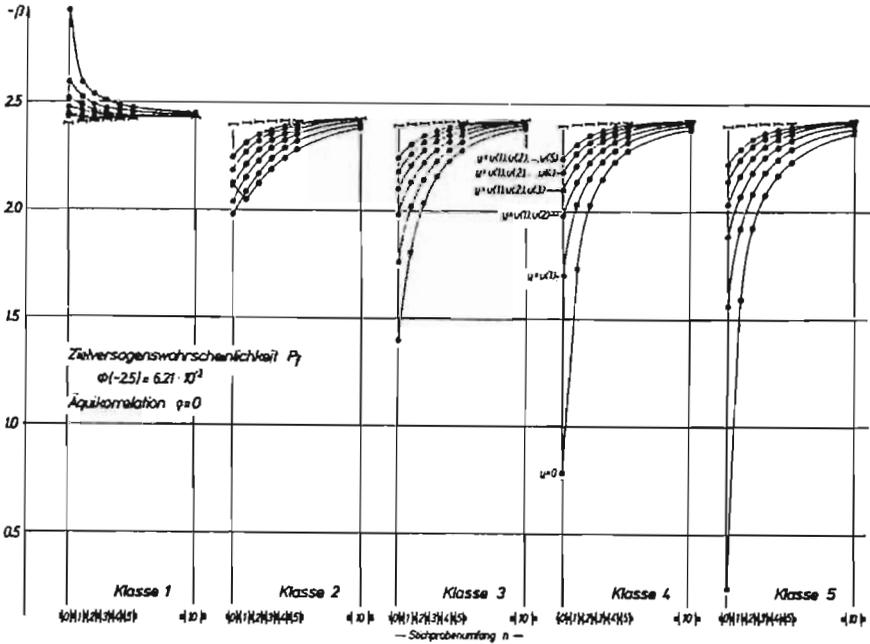


Bild 2: Konvergenz der Versagenswahrscheinlichkeit in der Klasse k , abhängig vom Informationsgrad über \bar{x}_n und \underline{u} .

Dabei wurden 5 aufeinanderfolgende Klassen gleicher Weite gewählt. Die Kurvenscharen gelten jeweils für den Fall, daß die 1./2./...5. Klasse war ist. Der Stichprobenmittelwert \bar{x}_n sowie die indirekten Beobachtungen fallen jeweils in die Klassenmitte. Der Korrelationskoeffizient ρ ist 0. Die Standardabweichung $\sigma = \sigma_{2k}$ ist gleich der Klassenweite.

Dem Beispiel liegt ein für alle Klassen analoges Versagenskriterium zugrunde. Die Zielversagenswahrscheinlichkeit ist $\phi(-2,5) = 6,21 \cdot 10^{-3}$. Sieht man von dem Sonderfall der Klasse 1 ab, so erkennt man, daß sowohl die Zunahme des Stichprobenumfangs n als auch die Anzahl der indirekten Klassifizierungsmerkmale die Versagenswahrscheinlichkeit relativ rasch gegen den Grenzwert $P_f = 6,21 \cdot 10^{-3}$ streben lassen.

Dabei erweisen sich in diesem Beispiel direkte und indirekte Information als ungefähr gleich effizient. Ist eine niedrige Klasse die wahre Klasse, so wird Konvergenz sehr schnell erreicht. Die Verifizierung einer hohen Klasse benötigt jedoch viel Information. Umgekehrt kann der Ansatz einer zu günstigen (zu hohen) Klasse, bei nicht ausreichender Verifizierung, zu merklicher Überschätzung der Sicherheit führen. Bemerkenswert ist, daß selbst bei $n=10$ und 5 indirekten Beobachtungen der Grenzwert noch nicht erreicht ist, sondern um einen gewissen Betrag unterschritten bleibt. Konvergenz wird erst für sehr hohe, praktisch kaum je erreichbaren Informationsumfang erzielt. Das liegt an der vorausgesetzten, nicht informativen Ausgangssituation, d.h. gleiche p'_k und gleichverteilte X_{1k} , die immer noch durchschlägt. Die nicht informative Ausgangssituation erklärt auch das seltsame Verhalten in Klasse 1, in der die Versagenswahrscheinlichkeiten mit zunehmender Information zunächst zunehmen und dann auf den Grenzwert hin abnehmen. Die aus Bild 2 gewonnenen allgemeinen Einsichten bleiben in der Tendenz auch dann erhalten, wenn eine andere Zielversagenswahrscheinlichkeit gewählt wird. Natürlich stellt sich ausreichende Konvergenz wesentlich rascher ein, wenn die Streuungen von X_{1k} bzw. der Variablen U_{k1} , die hier durchwegs gleich der Klassenweite angenommen wurden, verkleinert werden. Die Wirksamkeit der indirekten Klassifizierungsmerkmale schwächt sich jedoch bei Korrelation zwischen den einzelnen Merkmalen wesentlich ab. Bei der Auswahl indirekter Klassifizierungsmerkmale sind mithin Abhängigkeiten soweit wie möglich zu vermeiden. Erwähnt sei noch, daß die aufgezeigten Tendenzen unabhängig von den Klassenweiten und der Klassenanzahl sind.

Es hat wenig Sinn, den allgemeinen Fall weiter zu diskutieren, da bei praktischen Klassifizierungsaufgaben jeweils andere Verhältnisse vorliegen. Die vorgelegte Methodik kann vielmehr dazu dienen, Klassifizierungsverfahren und die Anlage von Datenbanken zweckmäßig zu organisieren. Für eine bestimmte Bodenart (-klasse) wird damit die Art und Weise festgelegt, wie Informationen über sie auf Datenbanken abgelegt werden könnten, nämlich als Verteilung von X_{1k} innerhalb der Klassengrenzen. Darüberhinaus liefert das Verfahren aber auch die Anforderungen, die entweder an den Umfang direkter Beobachtungen oder an die Anzahl indirekter Merkmale gestellt werden, um richtig klassifizieren zu können und damit von den klassenspezifischen Vorinformationen Gebrauch machen zu dürfen. Einschlägige Untersuchungen werden derzeit für Böden des Münchner Raumes geplant.

Ableitung von klassenspezifischen Bemessungswerten

Nach erfolgreicher Klassifizierung kann nun in einem weiteren Schritt ein spezifischer Bemessungswert x^* für die richtige Klasse k^* abgeleitet werden. Nach (Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen) ist dieser durch

$$x^* = F^{-1}[\Phi(-\alpha\beta)] \quad (14)$$

definiert. Darin ist β ein vorgegebener Sicherheitsindex, α der Einflußfaktor für die Zufallsvariable X und F^{-1} die inverse Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen. Bezüglich der numerischen Werte von α und β , bzw. ihrer Interpretation kann auf (Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen) verwiesen werden. Erfreulicherweise können für die hier gemachten Voraussetzungen geschlossene Lösungen der Verteilungsfunktion bzw. zugehörigen Dichte der Größe $X_k = X_{1k} + X_{2k}$ angegeben werden,

$$F(x_k) = 1 + \frac{1}{\Phi\left(\frac{x-b_{k^*}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x-b_k}{\sigma/\sqrt{n}}\right)} \left[\Phi_2\left(\frac{x-b_k}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{x-x_k}{\sigma/\sqrt{n+1/c}}; \rho = \frac{1}{1+n/c}\right) - \Phi_2\left(\frac{x-b_{k-1}}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{x-x_k}{\sigma/\sqrt{n+1/c}}; \rho = \frac{1}{1+n/c}\right) \right] \quad (15)$$

$$\text{mit } \Phi_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{v^2 - 2\rho vw + w^2}{2(1-\rho^2)}\right] dv dw; \text{ der } \quad (15a)$$

zweidimensionalen Normalverteilungsfunktion, für deren Auswertung man Tabellen oder einfache effiziente Rechenalgorithmen verwenden kann. [Siehe z.B. Johnson, N./Kotz, S. (1972)] Die entsprechende Dichte lautet

$$f(x_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n+c}} \varphi\left(\frac{x-x_k}{\sigma/\sqrt{n+1/c}}\right) \left[\Phi\left(\frac{cx_k}{\sigma/c+n} + \frac{n\bar{x}}{\sigma/c+n} - \frac{(c+n)b_{k-1}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-b_{k-1}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x-b_k}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{cx_k}{\sigma/c+n} + \frac{n\bar{x}}{\sigma/c+n} - \frac{(c+n)b_k}{\sigma}\right) \right] \quad (16)$$

Für die durch Gleichung (14) gegebene exakte Ableitung des Bemessungswertes x^* ist die inverse Verteilungsfunktion nicht mehr explizit angebar und muß numerisch, z.B. mit Hilfe des Newton'schen Verfahrens zur Auflösung einer nicht linearen Gleichung gefunden werden.

In der Praxis wird man jedoch nur in Ausnahmefällen den exakten Ausdruck für Gleichung (14) verwenden können. Eine gute Näherung die zudem auf der sicheren Seite liegt, ergibt sich bei Ersatz der exakten Verteilung durch eine Normalverteilung mit äquivalentem Mittelwert und gleicher Standardabweichung. Es gilt

$$x_k^* = E(x_k) - \alpha \beta \sigma_k \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{c} \right) \quad (17)$$

Darin ist $E(x_{1k})$ das gewichtete Mittel aus den in der Datenbank abgelegten Informationen und der gegebenenfalls gezogenen aktuellen Stichprobe.

Schlußbemerkung

Numerische Bearbeitungen geotechnischer Probleme mit klassischen Ingenieurmitteln erfordern zwangsläufig eine Beschreibung von Bodeneigenschaften mittels geeigneter Rechenwerte. Dabei sind stets Aspekte der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit gegeneinander abzuwägen. Mit Hilfe einer probabilistischen Betrachtungsweise, die als wesentliches Element enthält, daß sie immer auch quantitativ Rechenschaft über den Unsicherheitscharakter der Bestimmungsgröße ablegt, lassen sich entsprechende Bemessungswerte unter Berücksichtigung der vorher erwähnten Gesichtspunkte nachvollziehbar ableiten. Vorinformationen können somit, im Sinne des Baye'schen Satzes, als a-priori Wahrscheinlichkeiten quantifiziert und häufig in einfacher Weise mit aktuellen Daten kombiniert werden. Das am Beispiel eines stochastischen Bodenmodells erläuterte Verfahren den Parameterbereich einer geotechnisch interessierenden Größe mittels Klassifizierung einzuengen, ermöglicht die Akkumulation klassenspezifischer Vorinformation, sowie die Festlegung des jeweils notwendigen Informationsumfangs für eine richtige Klassifizierung. Damit ist die Bestimmung eines dem jeweiligen Informationsstandes adäquaten und den Sicherheitsanforderungen genügenden Bemessungswertes möglich.

Literaturverzeichnis

Rackwitz, R./Peintinger, B., Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen, Der Bauingenieur, 56, 1981, S. 215 - 221.

Rackwitz, R., Können Vorinformationen über den Baugrund quantifiziert werden?, Berichtsband, Baugrundtagung, 1982, Braunschweig.

Peintinger, B./Reitmeier, W., Effects of statistical uncertainties about the parameters of a stochastic field modelling soil properties in slope stability, Proceedings 4th International Conference, Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1983, S. 1425 - 1435.

Johnson, N./Kotz, S., Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen, DIN, 1981.

DI E WIRKUNG DER STATISTISCHEN UNSICHERHEIT IN DEN
PARAMETERN EINES STOCHASTISCHEN FELDES ZUR MODELLIERUNG
VON BODENEIGENSCHAFTEN AUF DIE BÖSCHUNGSSTABILITÄT

B. Peintinger

W. Reitmeier

1. Einführung

Bei Ingenieuraufgaben kann die Unsicherheit der Bodeneigenschaften in 4 Gruppen aufgeteilt werden:

- a) räumliche Schwankung innerhalb einer homogenen Bodenschicht
- b) statistische Unsicherheiten über Mittelwert, Streuungs- und Korrelationsparameter dieser Schwankungen
- c) systematische Übertragungsfehler von Laborergebnissen auf die in-situ Bodeneigenschaften
- d) zufällige Meßfehler

Räumliche Schwankungen vom Typ a) können den zeit- und ortsabhängigen Veränderungen des geologischen Entstehungsprozesses zugeordnet werden. Unsicherheiten nach Typ b) sind im wesentlichen Unsicherheiten über die geologische Formation. Beide Arten der Unsicherheit über den wahren Zustand in der Tiefe können im Prinzip durch ausgedehnte Untersuchungen beseitigt werden. In der Praxis bleiben jedoch die Anzahl der Aufschlüsse und sonstige Informationen begrenzt. Deswegen wird die räumliche Schwankung der Bodeneigenschaften durch geeignete Zufallsfelder, z.B. Gaußfelder modelliert, deren Parameter wie Mittelwerte, Varianzen und Autokorrelationsparameter charakteristische geologische Größen sind,

die aus Beobachtungen geschätzt werden müssen. Besonders der Mittelwert, aber auch die Varianz und die Autokorrelationsparameter sind somit ein Modell (zur Beschreibung des Ergebnisses) eines gewissen geologischen Entstehungsprozesses, während die statistische Unsicherheit über diese Parameter im Wesentlichen eine Unsicherheit über die zu beurteilende geologische Natur der Formation ist.

Dieser Beitrag untersucht den Effekt der statistischen Unsicherheiten auf die Versagenswahrscheinlichkeit von Böschungen unter der Annahme, daß systematische Fehler (Unsicherheiten von Typ c) bekannt seien und Meßfehler (Unsicherheiten nach Typ d) entweder nicht vorhanden sind oder durch wiederholte Messungen auf ein vernachlässigbares Maß reduziert wurden.

Die Bedeutung der unzureichenden Information über die Parameter eines stochastischen Modells für Bodeneigenschaften auf Zuverlässigkeitsstudien von Erdbauproblemen wurde seit langem erkannt. Genaue wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlungen waren jedoch auf einige wenige Fälle begrenzt. Kürzlich wurde ein Versuch von Rackwitz, Peintinger (1981) und Pöhlmann, Rackwitz (1980) mit Hilfe Bayes'scher Betrachtungsweise gemacht, welches ein gültiges (vielleicht das einzig mögliche) Konzept zu sein scheint, um vernünftige, auf Wahrscheinlichkeitstheorie basierende Entwurfsentscheidungen im Falle solcher Unsicherheiten zu treffen. Versagenswahrscheinlichkeiten von Böschungen wurden zuerst für gegebene Parameter des Zufallsfeldes zur Beschreibung der Bodeneigenschaften berechnet, aber die Verteilungsfunktion wurde auch für die Parameter des Zufallsfeldes angegeben. Diese Verteilung wurde von aktuellen Daten und a-priori Information mittels Bayes Theorem abgeleitet. Die totale Versagenswahrscheinlichkeit der Böschung wurde durch Ausintegrieren der Bedingungen erhalten. Bei Rackwitz,

Peintinger (1981), wurde unter Verwendung einiger gut bekannter Ergebnisse normaler "sample theory" gezeigt, daß die Parameterunsicherheiten häufig die anderen Unsicherheiten übertreffen können. Die Autokorrelationsparameter wurden dabei als bekannt vorausgesetzt, da keine einfachen Ergebnisse für die posteriori Verteilung der Autokorrelationsparameter zu existieren schienen. Auf der anderen Seite wurde ebenfalls gezeigt, daß die Größe der Autokorrelationsparameter die Versagenswahrscheinlichkeit und die Abmessungen des "wahrscheinlichsten" Bruchkörpers wesentlich beeinflussen kann. Deswegen wurde von Pöhlmann, Rackwitz (1980) eine Lösung für die posteriori Verteilung der Autokorrelationsparameter des speziellen Gaußprozesses abgeleitet. (Einige kleinere Fehler in dieser Studie wurden für diese Untersuchung korrigiert). Im folgenden wird die Methode, die in den beiden oben angegebenen Arbeiten entwickelt wurde, zur numerischen Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Böschungen verwendet.

2. Beschreibung des mechanischen und stochastischen Modells

Stabilitätsprobleme von Böschungen werden unter Vernachlässigung von Porenwasserdrücken untersucht, wobei zur Beschreibung der Scherfestigkeit das Mohr-Coulomb'sche Bruchkriterium verwendet wird. Als Versagenskriterium von Böschungen kann nach der modifizierten Methode von Bishop $g = M_r - M_a \leq 0$ geschrieben werden. Dabei bezeichnet M_r das rücktreibende - und M_a das abtreibende Moment. Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Schlußfolgerungen wurde die Wichte des Bodens als konstant angenommen und die Geometrie des Bruchkörpers unverändert auf einen aus früheren Studien als ungünstig erkannten Wert festgehalten. Das rückhaltende Moment ist somit die Summe der Scherkräfte entlang aller Lamellen, multipliziert mit dem Radius des Gleitkreises und den beiden Momenten aus den

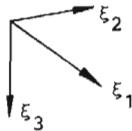
rückhaltenden Kräften in den Endflächen des zylindrischen Bruchkörpers. Die Scherkräfte jeder Lamelle und an den Endflächen sind lineare Funktionen der Zufallsfelder der Kohäsion und des Reibungswinkels, integriert über die entsprechenden Gleitflächen. Kohäsion und Reibungswinkel wurden als unabhängige homogene Zufallsfelder mit der gleichen Korrelationsfunktion angenommen.

Damit ist die bedingte Versagenswahrscheinlichkeit durch

$$P(\underline{S}) = P(M_r(\underline{X}; \underline{S}) - M_G \leq 0) \quad (1)$$

gegeben, wobei der Vektor \underline{X} die zufälligen Scherkräfte und $\underline{S} = (\mu_c, \mu_{\tan\varphi}, \sigma_c, \sigma_{\tan\varphi}, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ die zufälligen Feldparameter beinhaltet. Zur weiteren Vereinfachung wird $\delta_1 = \delta_2 = k \cdot \delta_3$ mit $k = 5$ angenommen, womit die Autokorrelationsstruktur der Felder durch die Autokorrelationsfunktion

$$\rho(\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta\xi_3) = \exp\left[-\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\Delta\xi_i}{\delta_i}\right)^2\right] = e^{-\left(\frac{\Delta\xi_1}{\delta_1}\right)^2} e^{-\left(\frac{\Delta\xi_2}{\delta_1}\right)^2} e^{-\left(\frac{\Delta\xi_3}{\delta_1/k}\right)^2} \quad (2)$$



mit nur einem Parameter beschrieben werden kann. Unter dieser Voraussetzung genügt es, den eindimensionalen Fall zu betrachten.

Z.B. ist für $\rho(\Delta\xi) = e^{-\left(\frac{\Delta\xi}{\delta}\right)^2}$ die spektrale Dichte $g(\omega) = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\omega \cdot \delta}{2}\right)^2}$ gegeben. Somit ist bei gegebenem Autokorrelationsparameter δ der Quotient zweier spektraler Dichten

$$w = \frac{g(\omega_1)}{g(\omega_2)} = e^{-\delta^2 \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{4} \right)} \quad (3)$$

mit in geeignetem Abstand gewählten Frequenzen ω_1 und ω_2 . Schätzung der spektralen Dichte sind asymptotisch χ^2 verteilt. Der Quotient zweier unabhängig χ^2 -verteilter Variablen ist F-verteilt [5].

Daraus folgt, $\hat{W} = \frac{\hat{g}(\omega_1)}{\hat{g}(\omega_2)} = e^{-\hat{\delta}^2 \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{4} \right)}$ ist asymptotisch

F-verteilt mit $\hat{g}(\omega_1)$ und $\hat{g}(\omega_2)$ als Schätzung für die spektralen Dichten bei ω_1 und ω_2 . Durch Auflösen nach $\hat{\delta}$ und unter Verwendung von Gleichung (3) ergibt sich die Verteilung des Schätzwertes des Autokorrelationsparameter $\hat{\delta}$ aus

$$\hat{\delta} = \sqrt{-\left(\frac{4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \ln \hat{W}}$$

wobei \hat{W} eine F_{v_1, v_2} verteilte Variable ist, deren Verteilungsparameter von $\hat{g}(\omega_1)$ und $\hat{g}(\omega_2)$ abhängig sind. Für eine gegebene priori-Verteilung des Autokorrelationsparameters $\hat{\delta}$ erhält man die posteriori-Verteilung in Form ihrer Dichten mit Hilfe des Bayes'schen Satzes zu

$$f''(\delta/\hat{\delta}) \propto f_{F_{v_1, v_2}}(\hat{\delta}/\delta) \cdot f'(\delta) \quad (4)$$

Bei gegebenen Verteilungsfunktionen für Autokorrelationsparameter, Varianzen und Mittelwerte der beiden Felder, ergibt sich die gesamte Versagenswahrscheinlichkeit schließlich zu

$$P_f = \int_{\Theta} P(M_r(\underline{X}; \underline{Q}) - M_G \leq 0) f_{\Theta}(\underline{Q}) d\underline{Q} \quad (5)$$

Die a-posteriori Verteilung der Varianzen des Feldes kann bei bekannten Autokorrelationsparametern als invers gamma-2 verteilt und die a-posteriori Verteilung des Mittelwertes bei gegebenem Autokorrelationsparameter und Varianzen als normalverteilt angenommen werden [4]. Infolge ihrer Länge sind die zugehörigen Formeln hier nicht angegeben. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß eine konjugierte priori-Verteilung für den Autokorrelationsparameter δ aufgrund Gleichung 4 schwierig zu bestimmen ist. Daher wurde eine Rechteckverteilung gewählt. Die zur Bestimmung geeigneter Dichtefunktionen notwendigen Integrationen müssen numerisch durchgeführt werden. Zur Veranschaulichung ist in den Bildern 1 bis 3 für zunehmende Stichprobenanzahl, der Einfluß zusätzlicher Informationen auf den jeweiligen Bildern dargestellt.

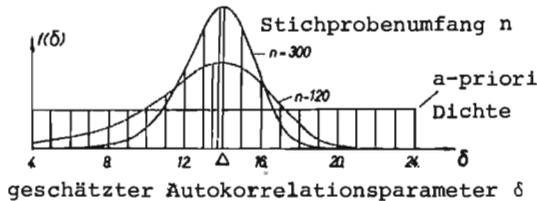


Bild 1: a-priori/posteriori Verteilungen des Autokorrelationsparameters δ

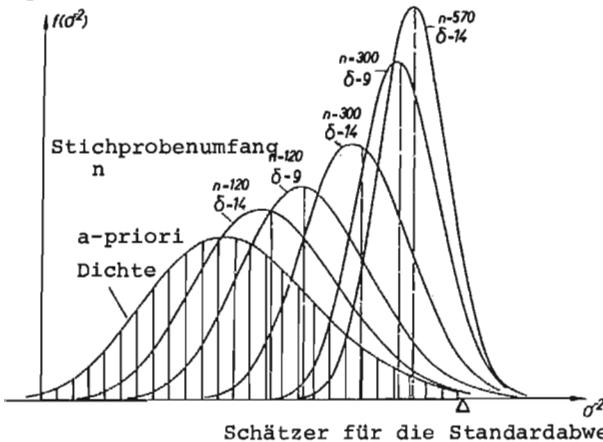


Bild 2: a-priori/posteriori Verteilungen der Standardabweichung

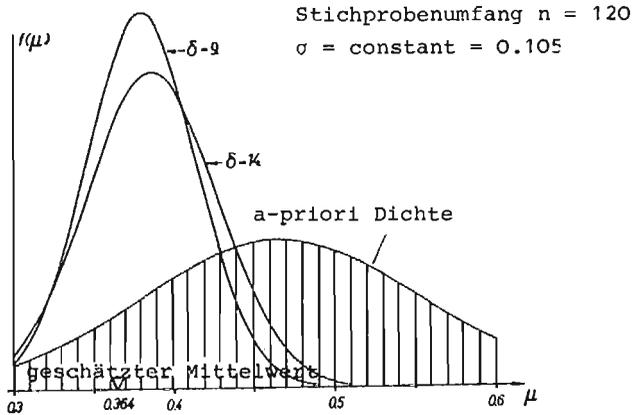


Bild 3: a-priori/posteriori Verteilungen des Mittelwertes

Es ist ersichtlich, daß relativ viele Stichproben notwendig sind, damit die Stichprobeninformation gegenüber den a-priori Informationen überwiegt. Das gilt insbesondere bei wesentlich unterschiedlichen Schätzwerten aus den Stichproben, gegenüber den Parametern der a-priori Verteilung.

3. Numerische Ergebnisse

Die bisherigen Ableitungen sind ausreichend neben der bedingten Versagenswahrscheinlichkeit die totale Versagenswahrscheinlichkeit nach Gleichung 5, die von größerem Interesse ist, zu berechnen. Eine passende Formulierung für die Anwendung der Zuverlässigkeitsmethode 1. Ordnung kann durch Einführung von 25 teilweise abhängigen - und nicht normalverteilten Basisvariablen erhalten werden [6]. Trotzdem bleibt der rechnerische Aufwand beträchtlich, so daß weitergehende systematische Untersuchungen an einfacheren mechanischen Modellen ausgeführt werden sollten.

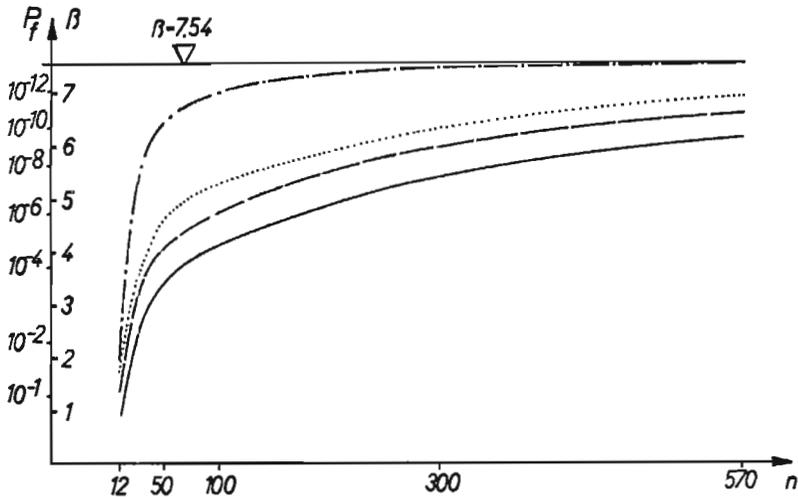


Bild 4: Versagenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit verschiedenen Stichprobenumfangs (s. Text)

Bild 4 zeigt die Versagenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs unter Verwendung der Rechenannahmen bezüglich der Böschungsgeometrie und der Feldparameter, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind. Für dieses Rechenbeispiel ergibt sich die Versagenswahrscheinlichkeit bei bekannten Feldparameters zu

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-7.544) = 2.3 \cdot 10^{-14}$$

Sind jedoch die Feldparameter unbekannt, fällt die Versagenswahrscheinlichkeit als Funktion des Stichprobenumfangs n von $1.83 \cdot 10^{-1}$ für $n = 12$ bis auf $8.25 \cdot 10^{-6}$ für $n = 120$ und erreicht den Grenzwert von $2.3 \cdot 10^{-14}$ erst bei sehr großer Stichprobenanzahl ($n > 500$). Dabei war die a-priori Information über die Mittelwerte und Varianzen sehr gering und auch die Rechteckverteilung im Intervall $4 \leq \delta \leq 24$

enthält nur wenig Information über den aktuellen Autokorrelationsparameter. Die Untersuchung ist auf Werte $n > 12$ begrenzt, da nur für diese Stichprobenanzahl die Feldparameter realistisch geschätzt werden können. Andererseits ist die abgeleitete Verteilungsfunktion des Autokorrelationsparameters nur asymptotisch richtig. Unterstellt man in der Praxis eine Wahrscheinlichkeit für Böschungsbrüche in der Größenordnung von 10^{-3} bis 10^{-5} , so bedeutet dies, daß die zur Zeit gültigen Entwurfsrichtlinien für Böschungen und die Abschätzung der Bodeneigenschaften auf eine beträchtliche Vorinformation basieren müssen, die etwa einem Stichprobenumfang von $n = 30$ bis 100 entsprechen.

Die gestrichelte Linie, gültig für bekannte Autokorrelationsparameter δ jedoch unbekannte Mittelwerte und Varianzen, zeigt, daß die Kenntnis des Autokorrelationsparameters eine Verminderung der Versagenswahrscheinlichkeit von etwa einer Zehnerpotenz bewirkt. Nahezu dieselbe Schlußfolgerung ergibt sich, wenn nur die Mittelwerte als unbekannt angenommen werden. (vgl. gepunktete Linie) Im Gegensatz dazu zeigt die strichpunktierte Linie, gerechnet für unbekannte Varianzen und deterministisch gewählte andere Parameter, daß der Effekt unbekannter Streuungsparameter weniger signifikant ist. Dies läßt sich durch den günstigen Effekt der Mittelbildung über die Gleitflächen erklären. Daraus folgt, daß die Unsicherheit über den Mittelwert, was der Unsicherheit bei der Klassifizierung von Böden entspricht, wahrscheinlich die dominante Unsicherheitsquelle ist; - eine Beobachtung, die ganz allgemein für grundbauliche Probleme gültig sein dürfte.

4. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die Versagenswahrscheinlichkeit von Böschungen wurde unter der Annahme untersucht, daß die Scherparameter Kohäsion und Reibungswinkel jeweils durch ein unabhängiges Gauß'sches Zufallsfeld mit gleicher Autokorrelationsfunktion und unsicheren Parameter beschrieben werden kann.

Bezüglich der totalen Versagenswahrscheinlichkeit wurde gezeigt, daß mit zunehmender Information und zunehmendem Stichprobenumfang zur Schätzung der Parameter die Versagenswahrscheinlichkeit auf den Grenzwert deterministisch bekannter Parameter hin abnimmt. Eine nichtinformative a-priori Information bedingt daher recht viele Stichproben für den Nachweis ausreichender Versagenswahrscheinlichkeiten. Unsicherheiten der Mittelwerte dominieren im Vergleich zu den Unsicherheiten der Varianzen und Autokorrelationsparameter. Mit Hilfe der gleichen Systematik sind weitere Untersuchungen geplant.

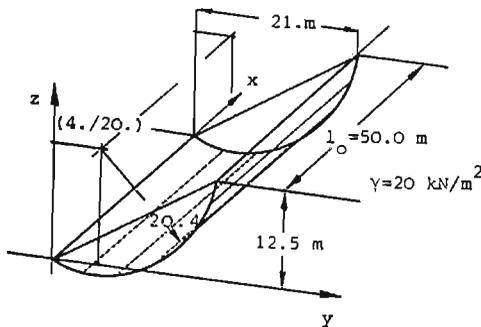


Bild 5: Böschungsgeometrie

Tabelle 1: Parameter der stochastischen Felder

Reibungswinkel $\tan\phi$

a-priori Information für den Mittelwert	$\mu'_{\tan\phi} = 0.4663$ ($\approx \tan 25^\circ$) $\sigma'_{\tan\phi} = 0.0875$ ($\approx \tan 5^\circ$) $\hat{\mu}_{\tan\phi} = 0.4663$ ($\approx \tan 25^\circ$) geschätzter Mittelwert $\Delta_{\tan\phi} = 1.0$ m (lag der Beobachtungen)
a-priori Information für die Varianz	$\alpha'_{\tan\phi} = 3.35585$ $E[\sigma_{\tan\phi}] = 0.105$ $\beta'_{\tan\phi} = 34.65104$ $\text{var}[\sigma_{\tan\phi}] = 0.001225$ $\sigma_{\tan\phi} = 0.105$ geschätzte Varianz

Kohäsion c

a-priori Information für den Mittelwert	$\mu'_c = 20.$ kN/m^2 $\sigma'_c = 2.$ kN/m^2 $\hat{\mu}_c = 20.$ kN/m^2 geschätzter Mittelwert $\Delta_c = 1.0$ m (lag der Beobachtungen)
a-priori Information für die Varianz	$\alpha'_c = 26.123135$ ($E[C] = 10.$ kN/m^2) $\beta'_c = 0.0003940985$ ($\text{var}[C] = 1.$ kN/m^2) $\hat{\sigma}_c = 10.$ kN/m^2 geschätzte Varianz

Literaturverzeichnis

- [1] Peintinger, B. Rackwitz, R.: "Numerical Uncertainty Analysis of Slopes", Berichte zur Zuverlässigkeit der Bauwerke, SFB 96, Technische Universität München, Heft 52, 1980.

- [2] Rackwitz, R., Peintinger, B.: "Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen", Der Bauingenieur, 56, 1981, S. 215-221.

- [3] Pöhlmann, S., Rackwitz, R.: "Zur Schätzung von Autokorrelationsparametern stationärer Gauß-Prozesse", Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, SFB 96, Technische Universität München, Heft 53, 1980.

- [4] Raiffa, H., Schlaifer, R.: "Applied Statistical Decision Theory", The M.I.T. Press, 1961.

- [5] Jenkins, G.M., Watts, D.G.: "Spectral Analysis and its Applications", Holden-day, San Francisco, 1968.

- [6] Hohenbichler, M., Rackwitz, R.: "Non-normal Dependent Vectors in Structural Safety", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 107, No. EM6, Dez.1981, S. 1227 - 1237.

ZUR ANWENDUNG STATISTISCHER METHODEN BEI DER
GEMEINSAMEN VERWENDUNG VON VOR- UND AKTUELLEN
INFORMATIONEN FÜR DIE BEMESSUNG VON RAMMPFÄHLEN

G.B. Baecher
R. Rackwitz

Der Sicherheitsbeiwert für die Bemessung auf Vertikal-
lasten bei gerammten Pfählen hängt von Vorinformationen,
z.B. von Vorhersagen mithilfe von Rammformeln, von auf der
Baustelle ausgeführten Probelastungen sowie von den
Sicherheitsanforderungen unter Beachtung der Wirtschaft-
lichkeit der Gründungsbauweise ab. Unter Anwendung stati-
stischer Methoden wird der Zusammenhang zwischen Informa-
tionsumfang, Sicherheitsanforderung und Sicherheitsbeiwert
hergestellt, womit eine Verbesserung der derzeitigen Be-
messungsregeln möglich ist. Es wird unterschieden zwischen
allgemeiner Unsicherheit über die Tragfähigkeit und der
jeweils baustellenspezifischen Streuung der Tragfähig-
keiten. Diagramme zeigen den Sicherheitsbeiwert für vor-
gegebene Sicherheitsindizes in Abhängigkeit von der An-
zahl der Probelastungen und ihrem Ergebnis.

1. Vorbemerkung

Viele Bereiche des Grundbaus, aber auch des konstruktiven Ingenieur-Baus entziehen sich direkter analytischer Behandlung. Die Gründe sind vielfältig. Meist fehlt ein erprobtes mechanisches Modell. Aber selbst, wenn ein solches vorliegt und mit vertretbarem Aufwand angewendet werden kann, mangelt es häufig an ausreichenden Kenntnissen über die aktuellen Eingangsgrößen. Dann helfen nur Versuche, die, da ihre Zahl aus wirtschaftlichen Gründen klein bzw. sehr klein gehalten werden muß, mit größter Sorgfalt zu interpretieren sind. Aus statistischer Sicht sind ein, zwei oder drei Versuche nahezu wertlos, wenn nicht zusätzliche Informationen eingebracht werden können. Die Frage, wie dies geschehen kann und wie die Auswirkungen verschiedenen Informationsumfangs auf Sicherheitselemente, wie z. B. Sicherheitsbeiwerte oder zulässige Beanspruchbarkeiten, treffend und nachvollziehbar abgeschätzt werden können, ist jüngst durch die Einführung statistischer bzw. wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden bei der Bestimmung der Zuverlässigkeit von Bauwerken in den Vordergrund des Interesses vieler Praktiker gerückt; gilt es doch eine Antwort darauf zu finden, ob individuelle Ingenieur Erfahrung, Richtwerte in Normen, falls solche überhaupt vorliegen, und aktuelle Beobachtungen in einheitlicher Sprache ausgedrückt und mit dem richtigen Gewicht bei der Bemessungsentscheidung berücksichtigt werden können. Ein Schlüssel zur Lösung dieser Frage ist der Bayessche Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie - zumindest nach Meinung jener, die Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt als eine geeignete Grundlage für die Behandlung der unvermeidbaren Unsicherheiten beim Entwurf von Bauwerken anerkennen. Allerdings steht die Anwendung des Bayesschen Satzes, bzw. der auf ihm beruhenden Entscheidungstheorie, auf Bauingenieurprobleme, im Gegensatz zu anderen Bereichen, wie der Ökonometrie oder der Kontrolltheorie für Steuerungssysteme, noch in den Anfängen. Nachfolgend soll am Beispiel der Bemessung von Rammpfählen aufgrund von Versuchen eine Anwendung des Bayesschen Satzes gezeigt werden - u. a. auch in der Hoffnung, damit ähnliche Studien auf anderen Gebieten anzuregen.

2. Einführung

Wenige Probleme des Grundbaus haben mehr Aufmerksamkeit auf sich gezogen als die Vorhersage der Tragfähigkeit von Pfählen. Trotzdem bleiben Vorhersagen relativ unsicher. Die Bemessung von Pfahlgründungen beruht deshalb im wesentlichen auf wenigen vor Ort ausgeführten Tragfähigkeitsversuchen. Tatsächlich liegen aber eine ganze Reihe weiterer indirekter Vorhersagemethoden vor. Hierzu gehören sogenannte Rammformeln, die auf die eine oder andere Weise und in unterschiedlichem Grad durch Versuche verifiziert bzw. an ihnen geeicht werden können. Am häufigsten werden Formeln verwendet, die auf Energiebetrachtungen beruhen (siehe z.B. /8/). Obwohl im allgemeinen keine straffe Korrelation zwischen so vorhergesagten und beobachteten Tragfähigkeiten besteht, können Rammformeln wichtige Hinweise liefern.

Zur Vorhersage wurden auch erdstatische Verfahren vorgeschlagen (vgl. z.B. /11/). Weiter erlauben Beziehungen zwischen Pfahltragfähigkeit und vor Ort ausgeführte Baugrunduntersuchungen, zum Beispiel Sondierungen oder sogar Bohrungen, Vorhersagen. Schließlich können verschiedene Vorhersagemethoden kombiniert werden. Eine grundsätzliche Frage ist deshalb, wie Informationen verschiedenen Umfangs und Ursprungs in logisch konsistenter Weise vereinigt werden können. Die Untersuchung der hierbei auftretenden statistischen Aspekte ist Gegenstand dieser Abhandlung. Dabei wird von Tragfähigkeitsversuchen als direkte Beobachtungen und als Beispiel für indirekte Informationen, von Vorhersagen aus Rammformeln ausgegangen.

Vom statistischen Gesichtspunkt aus liegt, wie erwähnt, in ein, zwei oder vielleicht auch drei Versuchen noch wenig Information. Voraussagen aufgrund so weniger Versuche erfordern in der Tat die Hinzuziehung von früheren Erfahrungen bei anderen Baustellen und, wenn auch meist unausgesprochen, die Ausnützung semi-empirischer Formeln; deren Anwendbarkeit für jeden Einzelfall gesichert sein muß.

Im nachfolgenden werden die in den einschlägigen DIN-Normen angegebenen Sicherheitsbeiwerte in ihrer Beziehung zu Tragfähigkeitsversuchen untersucht /2/. Letzteren wird derzeit

beträchtliche Bedeutung eingeräumt. Dabei ist der Sicherheitsfaktor von der Anzahl der Versuche abhängig. Semi-empirische dynamische Voraussageformeln sind nur zugelassen, wenn sie durch Versuche überprüft wurden. Andere analytische Methoden sind nicht erlaubt.

Die Untersuchungen beschränken sich auf gerammte Einzelpfähle in reinen Reibungsböden. Die Gründe für diese Einschränkung liegen auf der Hand. Einerseits können ganze Pfahlgruppen wegen der hohen erforderlichen Lasten höchst selten durch Versuche überprüft werden. Deswegen müssen Aussagen über die Tragfähigkeit ganzer Pfahlgruppen über Modellversuche, analytische Ansätze oder auch aus der Erfahrung heraus gewonnen werden. Da jedoch auch DIN 4026 nur etwas über die Tragfähigkeit von Einzelpfählen aussagt, erscheint dies keine wesentliche Einengung der Studie, zumal so das statistische Problem gewisse Einfachheit aber auch Verallgemeinerungsfähigkeit behält. Pfähle in Kohäsionsböden sollen ebenfalls aus der Betrachtung ausgeschlossen sein, weil über sie weit weniger, und nicht immer eindeutige Information vorliegt (siehe z. B. /7/). Zusätzliche Komponenten, wie Einflüsse aus dem Herstellungsvorgang, die Zeit des Versuchs nach dem Rammen oder die Belastungsgeschwindigkeit müßten zudem zusätzlich berücksichtigt werden. Für die Probelastungen an gerammten Einzelpfählen in Reibungsböden wird natürlich unterstellt, daß sie ordnungsgemäß ausgeführt sind und daß insbesondere eine eindeutige Definition der Tragfähigkeit unter Zuhilfenahme der Lastsetzungslinie vorliegt.

Die Aufgabe der Voraussage der Pfahltragfähigkeit aus Probelastungen und Rammformeln ist aus statistischer Sicht im Gegensatz zu anderen geotechnischen Zuverlässigkeitsproblemen relativ einfach, da es sich im wesentlichen um Auswertung und Vergleich direkt gemessener Größen handelt und auf weitere Annahmen verzichtet werden kann. Es erscheint jedoch angebracht, vorab die Rolle des Zufalls für das vorliegende Problem etwas zu beleuchten. Unterschiede zwischen mehreren Probelastungen rühren grundsätzlich von ganz bestimmten Veränderungen im Pfahl oder im umgebenden Boden her. Wären diese Veränderungen bekannt, könnte die Tragfähigkeit für jeden Pfahl - unter einigen wei-

teren Voraussetzungen - wohl exakt vorherbestimmt werden. Jedoch, das Wissen um ursächliche Zusammenhänge ist wenig hilfreich, wenn die aktuelle Größe dieser Ursachen zur Zeit der Voraussage mehr oder weniger unbekannt ist. Statistische Methoden können da entscheidend helfen. Die Wahrscheinlichkeiten, die dabei auftreten, sind jedoch weniger Maße für den in der Natur wirksamen oder postulierten Zufall. Vielmehr sind sie ein Maß für Unkenntnis. Ihre wesentliche Funktion ist, logische Konsistenz zwischen der Kodierung von Vorinformation, Beobachtungen und Voraussagen herzustellen.

In einer ganzen Reihe von Untersuchungen wurden Daten über die Korrelation zwischen Tragfähigkeiten und Schätzungen mithilfe dynamischer (und auch statischer) Formeln zusammengestellt (siehe z. B. /4/, /9/, /13/). Eine umfassende Übersicht lieferte kürzlich Rollberg /16/. Im allgemeinen wurde versucht, über Regressionsrechnungen Probelastung und Rammformelvorhersage in Beziehung zu setzen. Leung/9/ verwendete erstmals die sogenannte Bayessche Regressionsrechnung. Daneben wurde häufig versucht, dem Verhältnis aus beobachteten Tragfähigkeiten und jenen aus Rammformeln geschätzten Werten eine Verteilung anzupassen. Leung wies weiter darauf hin, daß die Voraussagefehler verschiedener Rammformeln relativ hoch korreliert zu sein scheinen.

Die ohne Zweifel bedeutendsten Arbeiten über statistische Vorhersagen von Rammfahltragfähigkeiten legte Kay vor /6, 7/. Im Rahmen einer Bayesschen Betrachtung verschärft er ausgehend von einer a priori Verteilung für die mittlere Pfahltragfähigkeit sowie der Streuung der Tragfähigkeiten innerhalb einer Baustelle mithilfe von Probelastungen die Aussage über die Verteilung der tatsächlichen Tragfähigkeiten. Hieraus entwickelt er Diagramme für den Sicherheitsbeiwert für vorgegebene Sicherheitsindizes in Abhängigkeit von der Anzahl der Probelastungen. Der Sicherheitsindex ist dort, wie folgt, definiert.

$$\beta = \frac{E[Q] - q_0}{D[Q]} \quad (1)$$

Es ist Q die Tragfähigkeit, q_0 eine nicht streuende Belastung,

$E[.]$ der Erwartungswert und $D[.]$ die Standardabweichung von Q . Die a priori Verteilung für das Mittel der Tragfähigkeit ist bei Kay genau jene Verteilung, die aufgrund gewisser Rammformeln erhalten wird. Diese Verteilung wurde aus sämtlichen ihm zur Verfügung stehenden Daten abgeschätzt. Die Streuung innerhalb einer Baustelle wurde als Punktschätzung aus einer Reihe von geeigneten Beobachtungsreihen bestimmt und dann für jede Baustelle konstant und gleich angenommen. Ein überraschendes Ergebnis seiner Untersuchungen ist, daß bei gegebenem Sicherheitsindex der Sicherheitsfaktor, definiert als:

$$F = \frac{E[Q]}{q_0} \quad (2)$$

nur von der Anzahl der Probelastungen und nicht von ihrem Ergebnis abhängt.

Kays Untersuchungen stellen den Ausgangspunkt für die folgenden Ausführungen dar. Einige seiner Vereinfachungen sollen in dieser Arbeit jedoch aufgehoben werden. Zunächst soll berücksichtigt werden, daß die Daten über mittlere beobachtete und über Rammformeln bestimmte Tragfähigkeiten auch die Baustellenstreuung beinhalten. Sie können daher nicht unverändert für die Bestimmung der a priori Verteilung des Mittels verwendet werden. Die Baustellenstreuung ist somit von der globalen Streuung abziehen. Einzelheiten über eine geeignete Methode werden noch vorgestellt. Weiter wurde in /6/ die Baustellenstreuung aus Daten verschiedener Baustellen ermittelt, die ihrerseits nun mehr als 56 % voneinander abweichen. Somit ist - was auch geologisch einleuchtend ist - anzunehmen, daß die Baustellenstreuung selbst eine Zufallsvariable ist. Es wird sich zeigen, daß Kays Feststellung, daß der erforderliche Sicherheitsfaktor nur vom Stichprobenumfang abhängt, nur deswegen möglich war, weil die Baustellenstreuung als bekannt angenommen worden war.

Schließlich seien noch zwei neuere statistische Arbeiten /10/ und /17/ genannt, deren Ergebnisse hier jedoch nicht verwendet werden.

3. Vorinformationen

Für die Ermittlung der die Vorinformation quantifizierenden Größen stehen alle über Probelastungen und über Rammformeln bestimmte Tragfähigkeiten sowie die Ergebnisse mehrfacher Probelastungen auf einzelnen Baustellen zur Verfügung. Beispiele für Pfähle in Sand zeigen die Bilder 1 bis 3 (/4, 13, 16/). Von den vorgeschlagenen Rammformeln werden nachstehend nur die Formel von Janbu und die "dänische" Formel, die sich im übrigen sehr ähnlich sind und die kleinsten Vorhersagefehler zu besitzen scheinen, weiter verwendet (siehe hierzu insbesondere /16/).

Für die Formel von Janbu zeigt Bild 4 die empirische Verteilung des Logarithmus des Verhältnisses von beobachteten und berechneten Tragfähigkeiten. Wie bereits von Kay festgestellt, ist dieses Verhältnis offenbar in guter Näherung normalverteilt, wovon man sich durch klassische statistische Anpassungstests überzeugen kann. Eine weitere Diskussion dieses Bildes erübrigt sich, da hierfür bereits reichhaltige Literatur vorliegt.

Für Vorinformationen über die Baustellenstreuung sind mehrfache Probelastungen auf einer Baustelle maßgebend. Außer den Daten von Kay wurden für Bild 5 noch jene aus /3/ und /14/ verwendet. Die Streuung wurde hier als Präzision^{*)} h des Logarithmus der Pfahltragfähigkeit, also als Reziprok der Baustellenvarianz der logarithmierten Werte $h = 1/\sigma^2$ eingeführt.

4. Theoretische Grundlagen

4.1 Die Prädiktorverteilung der Pfahltragfähigkeit

Wir wenden nun die bekannten Resultate der Bayesschen Statistik an. Die a priori Dichte der mittleren Tragfähigkeit und der Baustellenpräzision kann aus den Angaben des vorangegangenen Abschnittes abgeleitet werden. Ergebnisse der Probelastungen werden als bedingte Dichte (unter der Bedingung eines Mittelwertes und der Baustellenpräzision) in der sogenannten Likelihoodfunktion zusammengefaßt. Mithilfe des Bayesschen Satzes werden beide Informationen zur a posteriori

*) Der Begriff 'Präzision' findet sich in /15/. Seine Verwendung und Interpretation bedarf größter Sorgfalt. Hier wird er aus rechentechnischen Gründen benützt.

Dichte kombiniert. Diese ist dann Ausgangspunkt für die Prädiktordichte der Pfahltragfähigkeit.

Eine geeignete Form des Bayesschen Satzes, dessen linke Seite bereits die a posteriori Dichte darstellt, ist nachstehend angegeben:

$$f''(\underline{\theta} | D, \underline{z}) = N \cdot f'(\underline{\theta} | D) \cdot L(\underline{z} | \underline{\theta}) \quad (3)$$

worin N eine normalisierende Konstante, $f'(\underline{\theta} | D)$ die a priori Dichte des Parametervektors $\underline{\theta}$ und $L(\underline{z} | \underline{\theta})$ die Likelihoodfunktion der Probelastungen $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ist. Unter D seien die Daten für die Ableitung der Parameter der a priori Dichte verstanden. Die Prädiktordichte für einen Vektor $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ zukünftiger Ausprägungen wird dann durch Integration über den Parametervektor $\underline{\theta}$ gewonnen.

$$f(\underline{y} | D, \underline{z}) = \int_{\underline{\theta}} f(\underline{y} | \underline{\theta}) \cdot f''(\underline{\theta} | D, \underline{z}) d\underline{\theta} \quad (4)$$

Bild 4 zeigte, daß das Verhältnis von beobachteten zu mit der Rammformel von Janbu bestimmten Tragfähigkeiten in guter Näherung log-normalverteilt ist. Dieselbe Annahme sei nun auch für die Ergebnisse der Probelastungen auf einer bestimmten Baustelle gemacht. Zumindest widersprechen die zur Verifizierung einer solchen Annahme zur Verfügung stehenden Daten, nämlich genau jene, die auch für Bild 5 verwendet wurden, dieser Annahme nicht. Mithin gilt für den Logarithmus der Tragfähigkeit $R = \log \tilde{R}$ die Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ . Damit können die Rechnungen nach Gl. (3) bzw. (4) wesentlich vereinfacht werden, da unter diesen Umständen die a posteriori Dichte von $\underline{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ nach Beobachtung von \underline{z} vom gleichen Typus wie die empirische a priori Dichte nach Beobachtung von D wird, wenn vorher bezüglich der Lage von M und Σ^2 keine Präferenzen ausgedrückt wurden, und somit die Ausgangsverteilung für $\underline{\theta}$ als nicht-informativ (diffus) genommen wurde. In diesem Fall heißt die a posteriori Dichte eine natürliche Konjugierte der Likelihoodfunktion /5, 15/. Die Verteil-

lung von (M, Σ^2) ist dann, wie die a priori Verteilung eine sogenannte Normal-Invertierte Gamma-Verteilung.

In der Regel wird angenommen, daß Informationen über M und Σ aus der gleichen Stichprobe stammen. Im vorliegenden Fall wird die a priori Information für M jedoch aus der Janbu-Formel gewonnen, die Information über Σ stammt dagegen aus mehrfachen Probelastungen auf Baustellen.

Eine a priori Dichte vom Normal-Invertiert-Gamma Typ, die diesen Sachverhalt widerspiegelt, ist /15/:

$$f'(\mu, h) \propto h^{1/2} \exp[-\frac{1}{2} h n' (\mu - \mu')^2] \exp[-\frac{1}{2} h v' \sigma'] \quad (5)$$

worin n' = äquivalenter a priori Stichprobenumfang für den Mittelwert von R
 μ' = a priori Mittelwert von R
 v' = äquivalenter a priori Stichprobenumfang der Präzision H
 σ' = a priori Lageparameter von H

Man beachte, daß $H = 1/\Sigma^2$ gilt. Eine neue Stichprobe, $\underline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, also z. B. die Ergebnisse der Probelastungen mit den Parametern (n, \bar{r}, s^2) , wobei

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \tilde{r}_i \quad (6)$$

und
$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (\log \tilde{r}_i - \bar{r})^2 \quad (7)$$

sowie
$$v = n - 1 \quad (8)$$

führt zur a posteriori Dichte

$$f''(\mu, h | \underline{r}) \propto h^{1/2} \exp[-\frac{1}{2} h n'' (\mu - \mu'')^2] \times h^{1/2} (v'')^{-1} \exp[-\frac{1}{2} h v'' \sigma''] \quad (9)$$

Darin sind

$$n'' = n + n' \quad (10)$$

$$\mu'' = (n\bar{r} + n'v')/n'' \quad (11)$$

$$v'' = n + v' \quad (12)$$

$$v''v'' = v'v' + vS^2 + n'\mu'^2 + n\cdot\bar{r}^2 - n''\mu'' \quad (13)$$

Die Prädiktorverteilung von R wird schließlich nach (4) zu (siehe Anhang)

$$f(r|\underline{r}, D) \propto \left[1 - \frac{\tilde{h}''}{v''} (r - \mu'') \right]^{-\frac{v''-1}{2}} \quad (14)$$

bestimmt. Das ist eine Studentsche t-Verteilung mit dem Freiheitsgrad v'' und sonstigen Parametern μ'' und

$$\tilde{h}'' = \frac{n''}{(n''+1)v''} \quad (15)$$

4.2 Sicherheitsbeiwerte

Es ist derzeit üblich /18/, anstatt die Zuverlässigkeit von Tragkonstruktionen direkt aus Kosten-Nutzen-Betrachtungen zu bestimmen, vereinfachend Zuverlässigkeitsklassen anzugeben, die die Nutzen-Kosten-Aspekte jeder Bemessungsentscheidung zumindest in grober Näherung erfassen. Maß der Zuverlässigkeit ist dabei der Sicherheitsindex oder eine "operative" Versagenswahrscheinlichkeit. Diese Zuverlässigkeitsmaße haben gegenüber dem klassischen Sicherheitsbeiwert den Vorteil, daß sie den Einfluß der Unsicherheiten bei Voraussagen mit erfassen können. Die Probleme expliziter Quantifizierung und Gewichtung von erwartetem Nutzen und Kosten werden in der Regel durch Kalibration an bestehenden Bemessungsregeln umgangen. Der Sicherheitsindex nach Gl. (1) hat, wie z. B. in /1/ ausführlich diskutiert, allerdings eine Reihe von Nachteilen. Er beruht u. a. nur auf dem Kenntnis von ersten und zweiten statistischen Momenten der unsicheren Größe und berücksichtigt daher das tatsächliche Verteilungsgesetz nur näherungsweise.

Einige andere, bei sonstigen Anwendungen maßgebende Nachteile sind hier nicht von Interesse. In Übereinstimmung mit /19/ sei daher als Definition

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (16)$$

gesetzt, d. h. der Sicherheitsindex β ist jene Variable, die sich aus ^{der} Inversen der Normalverteilung für die "wahre" Versagenswahrscheinlichkeit ergibt. Im vorliegenden Falle ist es leicht möglich, mit diesem Konzept einen neuen Sicherheitsindex zu definieren, d. h.:

$$\beta_{St} = \frac{r_o - \mu''}{\sqrt{h''}} = -T_v^{-1}(P_f) \quad (17)$$

$T_v(.)$ ist darin die bereits eingeführte Studentsche t-Verteilung. Bild 6 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Bild 6a wertet ihn numerisch aus. Man erkennt, daß besonders für kleine $P_f = \Phi(-\beta) \beta_{St}''$ und β_{St}'' nach Gl. (1) und mit der Annahme normalverteilter Werte Q merklich voneinander abweichen können. Aus Gl. (17) folgt

$$r_o = T_v^{-1}[\Phi(-\beta)] \cdot \sqrt{h''} + \mu'' \quad (18)$$

Hieraus wird der Sicherheitsbeiwert dann nach

$$F = 10^{-r_o} \quad (19)$$

bestimmt.

5. Numerische Ergebnisse

Bei der Auswertung der Bild 4 zugrundeliegenden Beobachtungen (Janbus Formel) errechnet man einen Mittelwert von 0.016 und eine Varianz von 0.027 für R. Natürlich hätte man auch jede andere Raumformel nehmen können. Die dänische Formel erbringt nahezu die gleichen Parameter. Andere Formeln ergeben z. T. merklich schlechtere, weil diffusere Information.

Die Dichteverteilung der Baustellenpräzision wurde bereits in Bild 5 dargestellt und soll entsprechend Abschnitt 4.1 als gammaverteilt angenommen werden. Zwei Verteilungen sollen in Betracht gezogen werden, und zwar eine, welche sämtliche 16 Baustellen ($\nu' = 8.5, \nu' = 0.015$) berücksichtigt, und eine andere, bei der die drei Baustellen mit der höchsten Präzision weggelassen sind ($\nu' = 20, \nu' = 0.016$). Die Parameter (ν', ν') werden jeweils aus den ersten beiden Momenten der empirischen Verteilung geschätzt. Leider ist eine solche Schätzung statistisch wenig effizient.

Den Umfang n' einer äquivalenten Stichprobe für den Mittelwert der Tragfähigkeit kann man durch ähnliche Überlegungen erhalten, die auch zu Gl. (14) führten. In den Daten für Bild 4 sind, wie mehrfach erwähnt, die Baustellenstreuungen enthalten. Aus ihrer Verteilung kann aber eine Prädiktorverteilung abgeleitet werden, die dann gilt, wenn noch keine Probelastungen ausgeführt wurden. Sie ist ebenfalls eine Studentverteilung mit den Parametern μ', ν' und $\tilde{h}' = n' / [(n'+1)\nu']$ und besitzt die Varianz

$$\text{Var}[R] = \tilde{h}'^{-1} \nu' (\nu' - 2)^{-1}$$

Die beobachtete Varianz war 0.027. Daher ergibt sich für die erste obengenannte Verteilung für die Baustellenpräzision $n' = 2.9$ und für die zweite Verteilung $n' = 1.9$. Man beachte die relativ kleinen Stichprobenumfänge, die letztlich ausdrücken, daß die Vorinformation nicht sehr scharf ist. Je mehr sich andererseits die globale Präzision der Baustellenpräzision (von oben her) nähert, umso kleiner wird n' .

Wenn nun Probelastungen über Gl. (3) bzw. Gl. (10) - (13) berücksichtigt werden, so wird das a posteriori Mittel μ'' größer oder kleiner als das a priori Mittel μ' , je nachdem \bar{F} größer oder kleiner als μ' ausfällt. Ebenso sinkt die a posteriori Varianz für R , wenn \bar{F} ungefähr dem a priori Mittel entspricht, und wächst mit der Differenz $|\bar{F} - \mu'|$. Ein Wert $r_1 = 3$ bedeutet daher, daß gleichzeitig a posteriori Mittel und Varianz größer werden. Folglich muß auch der Sicherheitsbeiwert vom Versuchsergebnis abhängen.

Bild 7 veranschaulicht den Sicherheitsbeiwert für eine Voraussage nach der Janbu-Formel für verschiedene Sicherheitsindizes in Abhängigkeit vom Ergebnis einer einzigen Probebelastung. Dabei wurde die stark streuende Verteilung für H nach Bild 5 gewählt. Bleibt der Versuch unter der Vorhersage (d. h. $r < 1$), so muß der Sicherheitsbeiwert gegenüber demjenigen erhöht werden, der vor dem Versuch galt.

Fällt der Versuch jedoch wesentlich besser als die Rammformelvorhersage aus, so muß der Sicherheitsbeiwert ebenfalls erhöht werden. Das erscheint zunächst unverständlich, kann aber erklärt werden. Der Zuwachs deutet darauf hin, daß die Rammformel wesentlich weniger wirklichkeitsnah vorhersagt als ursprünglich erwartet. Da die Verteilung der Baustellenvarianz jedoch weit ausschwingt, ist der einzelne Versuch nicht informativ genug, um ausreichend zu belegen, daß die tatsächliche mittlere Tragfähigkeit mit dem Versuch übereinstimmt. Deshalb ist der Sicherheitsbeiwert zu erhöhen.

Wird hingegen die Baustellenpräzision als weniger streuend angenommen (durchgezogene Linie in Bild 5), so sieht man, daß nunmehr jede Probebelastung bereits deutlich die Gesamtinformation verbessert (vgl. Bild 8).

In den Bildern 9 und 10 findet man entsprechende Ergebnisse für zwei und drei Probebelastungen. In beiden Bildern ist auf der Abszisse das geometrische Mittel der Ergebnisse r_1 aufgetragen. Der Sicherheitsindex ist konstant gleich 2. Natürlich ist in diesem Fall nicht nur das "mittlere" Ergebnis von Bedeutung, sondern auch die Streuung der Einzelwerte. Sie gibt Aufschluß über die tatsächliche Baustellenvarianz. Für Bild 9 wurde als Maß für die Streuung das Verhältnis $\Delta = r_1/r_2$ gewählt, während in Bild 10 die Summe der quadrierten logarithmierten Abweichungen $s^2 = \sum (r_i - \bar{r})^2$ genommen wurde. Die Bilder stimmen qualitativ mit Bild 8 überein. Zusätzlich erkennt man, daß der Sicherheitsbeiwert F mit der Streuung zwischen den Versuchen wächst.

6. Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der Bilder 8 bis 9 entsprechen ganz offensichtlich unserer Erwartung. Sehr gute Versuchsergebnisse ermöglichen eine Erniedrigung des Sicherheitsfaktors und umgekehrt.

Größere Streuung der Versuchsergebnisse führt zur Erhöhung des Sicherheitsfaktors, da eine solche größere Unsicherheit im Mittelwert und für die Baustellenstreuung vermuten läßt.

Zum Vergleich sind in Bild 8 auch jene Sicherheitsfaktoren angegeben, die ohne Probelastungen unter sonst gleichen Verhältnissen notwendig wären. Die gestrichelte Linie deutet die Grenze zwischen Erhöhungen und Erniedrigungen von F als Funktion von r und β an.

Interessant ist ferner der Vergleich der hier gefundenen Resultate mit den Festlegungen in DIN 1054 bzw. DIN 4026. Letztere sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. Dabei ist nochmals hervorzuheben, daß die deutschen Bestimmungen Rammformeln nur zulassen, wenn ihre Gültigkeit vorher durch Versuche überprüft wurde.

Tabelle 1: Sicherheitsfaktoren nach DIN 1054 und zuverlässigkeitstheoretischen Untersuchungen

	Anzahl der Probelastungen	Sicherheitsfaktor nach DIN	Sicherheitsfaktoren für $\beta =$			
			2	1.75	1.5	1.0
Lastfall 1	1	2.00	2.05			
	2	1.75	1.95			
	3	1.75	1.90			
Lastfall 2	1	1.75		1.84		
	2	1.50		1.75		
	3	1.50		1.65		
Lastfall 3	1	1.50			1.67	1.40
	2	1.30			1.50	1.30
	3	1.30			1.35	1.15

Die berechneten Werte gelten grundsätzlich für $r = 1$. Bild 11 zeigt noch die Reduktion des Sicherheitsfaktors unter der Voraussetzung, daß $\beta = 2$ und daß $\Delta = s = 0$. Die letztgenannte Voraussetzung ist der günstigste Extremfall. Die Abbildung deutet weiter darauf hin, daß man mit zunehmender Anzahl von Probelastungen immer weniger an zusätzlichen Informationen gewinnt.

Es erscheint verfrüht, die Festlegungen ausführlicher mit den Rechenergebnissen zu vergleichen. Hier wäre vor allem eine im Lichte der neuen Sicherheitstheorie gültige Definition der Lastfälle zu erörtern. Die Abnahme der Faktoren mit dem Lastfall erscheint im Angesicht der Rechenergebnisse nicht hinreichend begründet. Auch ist der von DIN 1054 angesetzte Zugewinn an Information bei Probelastungen wohl zu hoch angesetzt. Eine umfassendere Diskussion dieser Fragen ist zu einem späteren Zeitpunkt vorgesehen.

Bemerkenswert erscheint ferner, daß Kays /6/ Untersuchungen fast durchwegs zu höheren Sicherheitsfaktoren führten. Das natürlich liegt an der dort zu groß angenommenen Unsicherheit über das a priori Mittel. Die hier gemachte ungünstige Annahme nicht-deterministischer Baustellenstreuung wiegt die zu konservative erste Annahme nicht auf.

7. Offene Fragen

Die vorliegende Untersuchung hatte in erster Linie zum Ziel, die Anwendung des Bayesschen Satzes bei der Verarbeitung verschiedener Informationsquellen zu demonstrieren. Hierzu mußten einige klassische Ansätze modifiziert bzw. verallgemeinert werden. Trotzdem scheint es, daß, selbst wenn nicht jeder Spezialfall in der Bayesschen Statistik für normalverteilte Variable bisher eine einfache Lösung fand, die wesentlichen Probleme gelöst sind.

Das verwendete Beispiel warf jedoch eine ganze Reihe von Fragen auf, die bald angegangen werden sollten.

Die größte Unsicherheit in den Eingangsparametern der vorstehenden Erörterungen besteht offensichtlich über die Baustellenstreuung. Mehr und systematischer aufbereitete Daten, die ohne Zweifel auch schon vorhanden, aber irgendwo vergraben sind, wären wünschenswert. In diesem Zusammenhang sollte auch der Einfluß von qualitativen und quantitativen Baugrunderkundungen auf die Baustellenvarianz untersucht werden.

Unklar scheint auch noch die Auswirkung der Festlegung, daß nach den deutschen Bestimmungen Rammformeln durch Versuche verifiziert werden müssen. Werden diese nicht nur verifiziert,

sondern gleichzeitig auch kalibriert, so dürfte sich dies im Sinne einer Verkleinerung der Vorhersagevarianz der Rammformel auswirken.

Die Untersuchungen setzten voraus, daß die Tragfähigkeit als sogenannte Grenzlaster bei jeder Probelastung eindeutig bestimmbar ist. In der Praxis ist dies durchaus nicht die Regel. Häufig kann aus technischen Gründen diese Grenzlaster nicht erreicht werden, oder man bleibt absichtlich unter dieser Grenzlaster, z. B. um den betreffenden Pfahl in der Gründung als voll mitwirkend in Rechnung stellen zu können. Dann tritt eine Extrapolationsaufgabe auf, die im Prinzip mit den Methoden der Bayesschen Regressionstheorie gelöst werden kann. Bei der weiteren Verarbeitung solcher Versuchsergebnisse ist aber die Tatsache zu berücksichtigen, daß es sich hierbei um zensierte, weniger informative Beobachtungen handelt.

Schließlich bedarf eine wichtige methodische Frage näherer Untersuchung. Sie ist von allgemeiner Bedeutung. Normen geben häufig aus der Erfahrung heraus gewonnene, im allgemeinen konservative (?) zulässige Belastungen an. Ihr Ansatz setzt meist die Erfüllung einer Reihe von Bedingungen voraus. Es liegt nahe anzunehmen, daß in solchen Angaben wichtige Vorinformation steckt, wenngleich in diesem Zusammenhang unbekannt bleibt, wie sie statistisch zu werten ist. Formale Anwendung der Bayesschen Methoden auf die in DIN 4026 angegebenen zulässigen Traglasten führt z.B. auf derzeit nicht deutbare Widersprüche. Es scheint als ob die angegebenen Traglasten eher als Mittelwerte aufzufassen sind. Das im einzelnen aufzuklären, muß weiteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Grundsätzlich aber ist offen, wie der Informationsgehalt solcher Angaben im Nachhinein quantifiziert werden kann. Umgekehrt ist aber im Hinblick auf eine breitere Anwendung des vorgestellten Konzeptes von zukünftigen Normen zu fordern, daß sie neben derartigen zulässigen Werten auch mitteilen, welche Unter- (Über-)schreitungswahrscheinlichkeiten diesen zukommen und welche empirische (gegebenenfalls subjektiv modifizierte) Verteilung von Beobachtungen den Festlegungen zugrunde lag.

8. Schlußfolgerungen

Die vorgeschlagene Methode, Vorinformationen bei der Wahl des Sicherheitsfaktors für Rammfahltragfähigkeiten zu berücksichtigen, stellt ein logisch einwandfreies und einfach anzuwendendes Hilfsmittel dar, die Ergebnisse von Probelastungen im Hinblick auf die Bemessung zu beurteilen, sowie über den Wert neuer Probelastungen zu entscheiden.

Die bisher erhaltenen numerischen Ergebnisse fallen durchaus in den von den deutschen Bestimmungen gesteckten Rahmen. Werden Probelastungen ausgeführt, die Voraussagen aufgrund guter Rammformeln (z. B. jener von Janbu) verifizieren, so können die Sicherheitsbeiwerte bei einem Versuch um 5 bis 10%, bei einem zweiten Versuch um weitere 5 bis 10% erniedrigt werden.

Es erscheint möglich, weitere Vorinformationen aus anderen Quellen, wie z. B. Sondierungen, heranzuziehen. Ebenso erscheint es möglich, Probelastungen im Sinne zensierter Beobachtungen mit oder ohne "Meßfehler", die bei der Bestimmung der Grenzlast aus der Lastsetzungslinie in Probelastungen entstehen können, zu berücksichtigen. Es handelt sich aber auch dann um Betrachtungen, in denen verschiedene empirische Informationen in logisch konsistenter und einfacher Weise zusammengefaßt werden.

Die Erörterungen erfolgten am Beispiel der Vorhersage der Tragfähigkeiten von Rammpfählen, in Verbindung mit Rammformeln. Abschließend sei aber betont, daß der allgemeine methodische Ansatz bei entsprechender Modifizierung ganz generell, etwa für Vorhersagen für Bohrpfähle, für Erdanker oder für andere Bauteile des konstruktiven Ingenieurbaus gilt und vor allem, daß jede andere Vorinformation als solche aus Rammformeln in diesem Rahmen verwendet werden kann.

Ergänzung

Die Untersuchungen über die im vorstehenden berichtet wurde, wurden im Frühjahr 1980 abgeschlossen und anschließend noch in verschiedener Richtung ergänzt. Hierüber gibt [20] Auskunft. Insbesondere wurden die a priori Annahmen durch Hinzunahme erweiterten Datenmaterials und verbesserter Auswertemethoden verschärft und andere Vorhersagemethoden, z.T. in Kombination, angewandt. Weitere Ergebnisse enthält [21].

Literaturverzeichnis:

1. Comité Européen du Béton, Bulletin d'Information N° 112, Joint Committee on Structural Safety, 1976
2. DIN 4026: Rammfähle, August 1975
DIN 1054: Zulässige Belastungen des Baugrunds, Nov. 1976.
3. Evangelista, A., Pelligrino, A., and Viggiani, C., "Variability among piles of the same foundation", Proceedings, 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, 1977.
4. Goble, G.G., Walker, F.K., Rausche, F., "Pile bearing capacity - prediction versus performance", ASCE Specialty Conference on Performance of Earth and Earth Supported Structures, 1972.
5. Jeffreys, H.; Theory of Probability, The Clarendon Press, Oxford, 1961.
6. Kay, J.N., "Safety factor evaluation for single piles in sand", ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 102 (GT 10), pp. 1093 - 1108, 1976.
7. Kay, J.N., "Factor of safety for piles in cohesive soils", Proceedings, 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, 1977.
8. König, G., "Die Tragfähigkeit von Pfählen", Der Bauingenieur, 45, 1, S. 23-29, 1970.
9. Leung, P. K-K., "Modeling uncertainty in geotechnical predictions", Thesis presented to the Massachusetts Institute of Technology in partial fulfillment of the requirements for the degree Master of Science, 1977.

10. Madhar, M.R., and Arumugam, A., "Pile capacity - a reliability approach", Proceedings, 3d International Conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Sydney, 1979.
11. Meyerhof, G.G., "Bearing capacity and settlement of pile foundations", ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 102 (GT 3), pp. 195-228, 1976.
12. Meyerhof, G.G., "Discussion to, 'Safety factor evaluation for single piles in sand', by J.N. Kay", ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 103 (GT 4), p. 362, 1977.
13. Olsen, R.E., and Flaate, K.S., "Pile driving formulas for friction piles in sand", ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, Vol. 93 (SMG), pp. 279-296, 1967.
14. Petermann, H., Lackner, E., and Schenek, W., "Tragfähigkeit von Pfählen. Großversuche und ihre Auswertung", Berichte aus der Bauforschung, H. 49, Berlin, 1958/59.
15. Raiffa, H., and Schlaifer, R.L., Applied Statistical Decision Theory, Harvard University, School of Business Administration, Research Division, Boston, 1961.
16. Rollberg, D., "Bestimmung der Tragfähigkeit und des Rammwiderstands von Pfählen und Sondierungen", Veröffentlichungen des Instituts für Grundbau, Bodenmechanik, Felsmechanik und Verkehrswasserbau der RWTH Aachen, H. 3, 1977.
17. Wagner, S.P., and Krizek, R.J., "Statistical optimization of friction pile foundations", Proceedings, 2nd International Conference on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Aachen, 1975.

18. Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen an bauliche Anlagen (Entwurf), Institut für Bautechnik, Berlin, 1977.
19. General Principles on Reliability for Structural Design, Joint Committee for Structural Safety, Lund, 1979.
20. Rackwitz, R.: Unveröffentlichte Ergänzung zum vorliegenden Bericht, TU München, November 1980.
21. Baecher, G.B., Rackwitz, R.: Factors of Safety and Pile Load Tests, Int. Journ. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 6, 1982, pp. 409-424.

Anhang: Ableitung der Prädiktordichte für die Pfahltragfähigkeit

Die in Gl. (9) angegebene a posteriori Dichte ist, wie beschrieben, vom Normal-Gamma-Typ. Die bedingte Dichte von $R = \log \tilde{R}$ bei bekanntem $M = \mu$ und $H = h$ ist normal.

$$f(r|\mu, h) \propto h^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}h(r-\mu)^2\right] \quad \text{A.1}$$

Einsetzen von Gl. (9) und (A.1) in Gl. (4), und Integration über μ ergibt:

$$f(r) \propto \int_h \exp\left\{-\frac{1}{2}hD\right\} h^{\frac{v''-1}{2}} dh \quad \text{A.2}$$

mit

$$D = [v''v'' + n''u''^2 + \bar{r}^2 - (n''+1)z^2]$$

$$z = (n''\mu'' + r)/(n''+1)$$

Die Integration über h führt zu

$$f(r) \propto \frac{\Gamma\left[(v''-1)/2\right]}{D^{\frac{v''-1}{2}}} \quad \text{A.3}$$

Einige Umformungen sowie die Bestimmung der Normierungskonstante durch Integration über alle r ergibt schließlich

$$f(r) \propto \left[1 + \frac{\tilde{h}''}{v''} (r - \mu'')^2\right]^{-\frac{v''+1}{2}} \quad \text{A.4}$$

Das ist die Dichte der Studentischen t-Verteilung mit den Parametern v'' , μ'' und

$$\tilde{h}'' = \left(\frac{n''}{n''+1}\right)v''$$

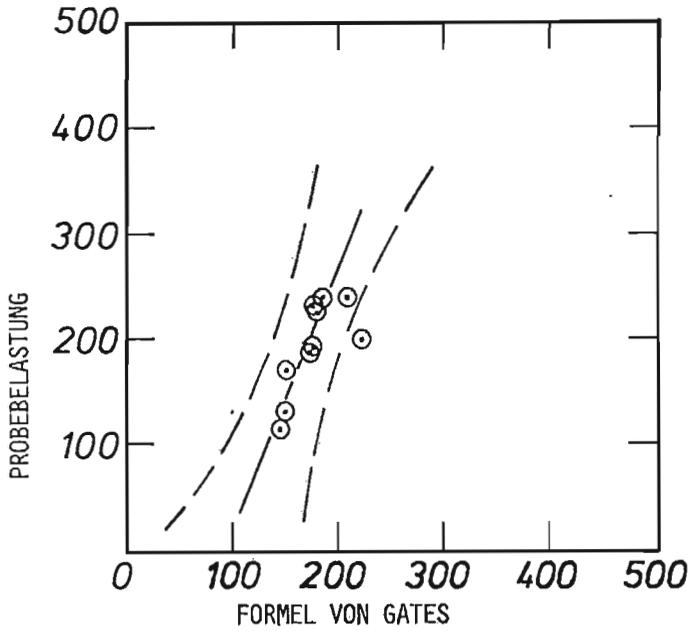


Bild 1: Korrelation zwischen nach GATES /4/ berechneten und beobachteten Tragfähigkeiten (die angegebenen Zahlen in kips, 100 kips = 0.44 MN)

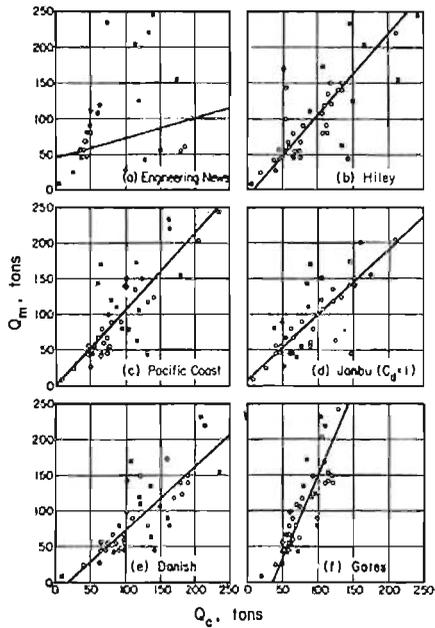


Bild 2: Korrelation zwischen mit verschiedenen Rammformeln vorhergesagten (Q_c) und gemessenen (Q_m) Pfahltragfähigkeiten (entnommen aus /13/)

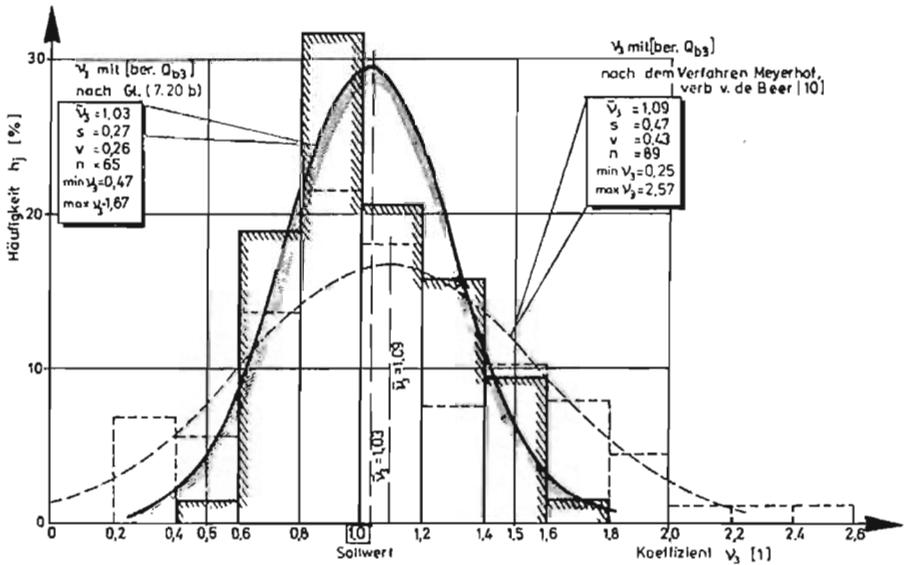


Bild 3: Häufigkeitsverteilungen der Koeffizienten v_3 für Rampo Pfähle in nichtbindigen Böden (entnommen aus /16/. Der Koeffizient v_3 ist das Verhältnis von berechneten und beobachteten Tragfähigkeiten. Bezüglich der weiteren Bezeichnungen und Hinweise siehe /16/)

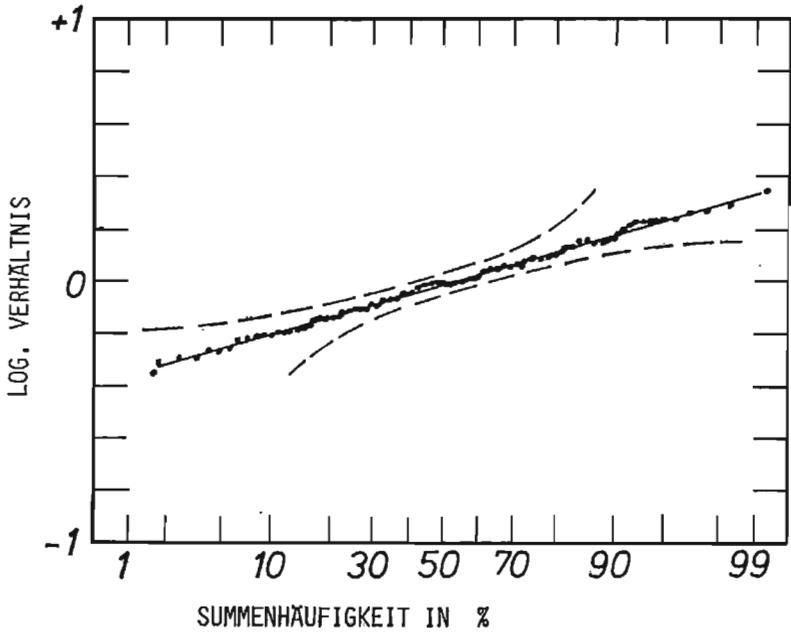


Bild 4: Summenhäufigkeit des Logarithmus des Verhältnisses von beobachteten und aufgrund der Rammformel von Janbu berechneten Tragfähigkeiten nach /6,8,9,13/

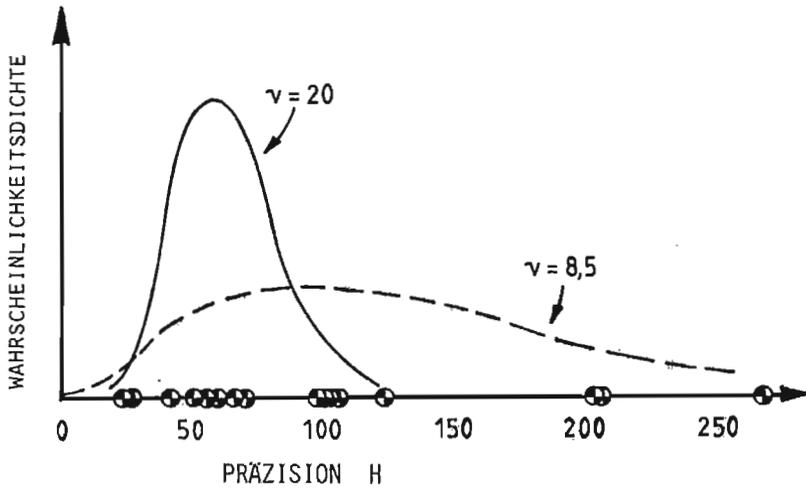


Bild 5: Verteilung der Baustellenpräzision für 16 Baustellen

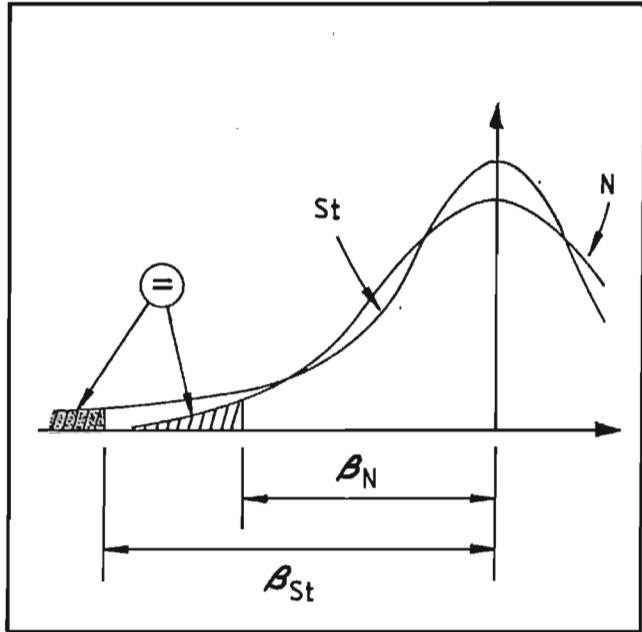


Bild 6: Zusammenhang zwischen den Sicherheitsindices β_{St} und β_N bei gleicher Unterschreitungswahrscheinlichkeit für die rechnerische Tragfähigkeit

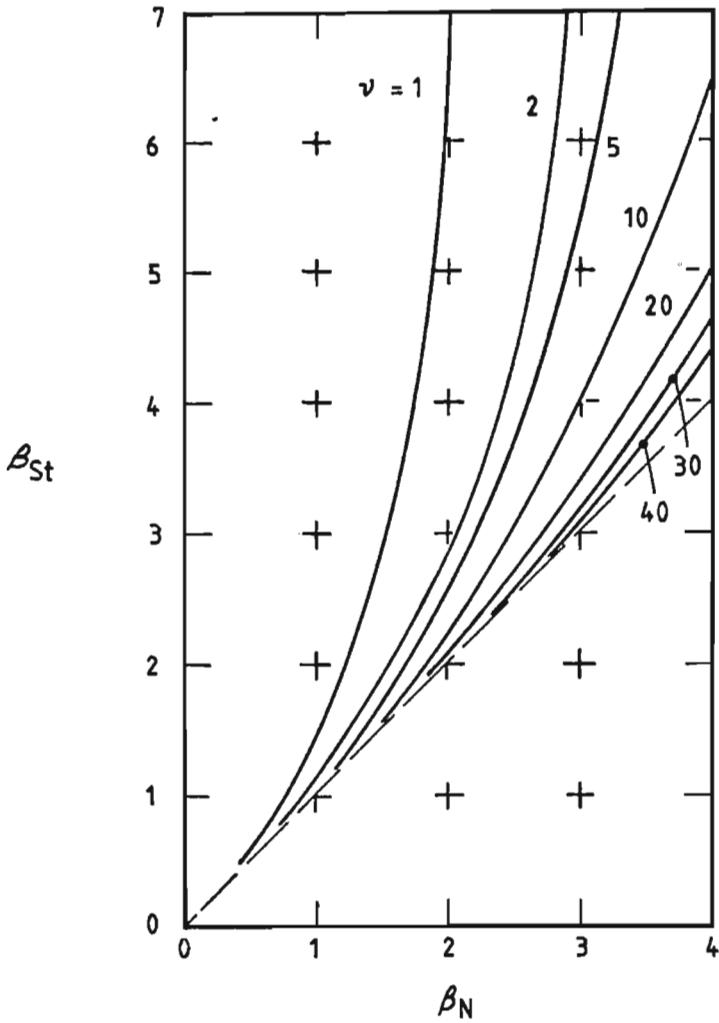


Bild 6a: Zusammenhang zwischen β_{St} und β_N für verschiedene Freiheitsgrade

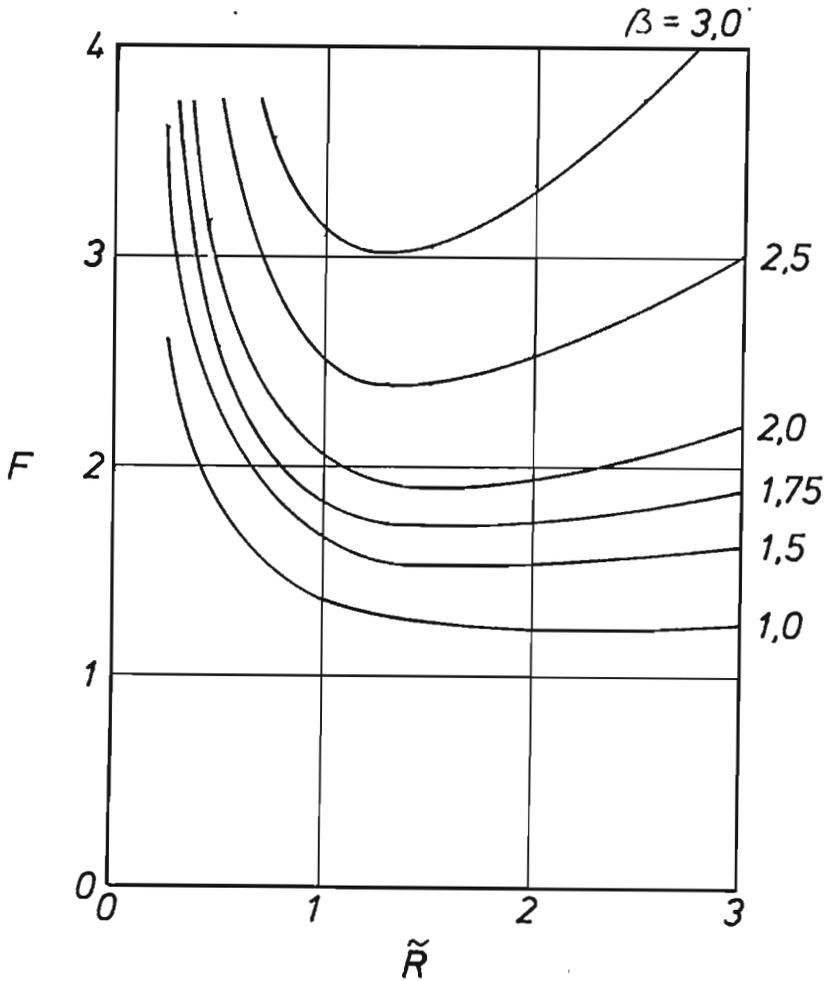


Bild 7: Sicherheitsbeiwert F für verschiedene Sicherheitsindices β in Abhängigkeit vom Verhältnis beobachteter und vorhergesagter Tragfähigkeit (große Baustellenpräzision)

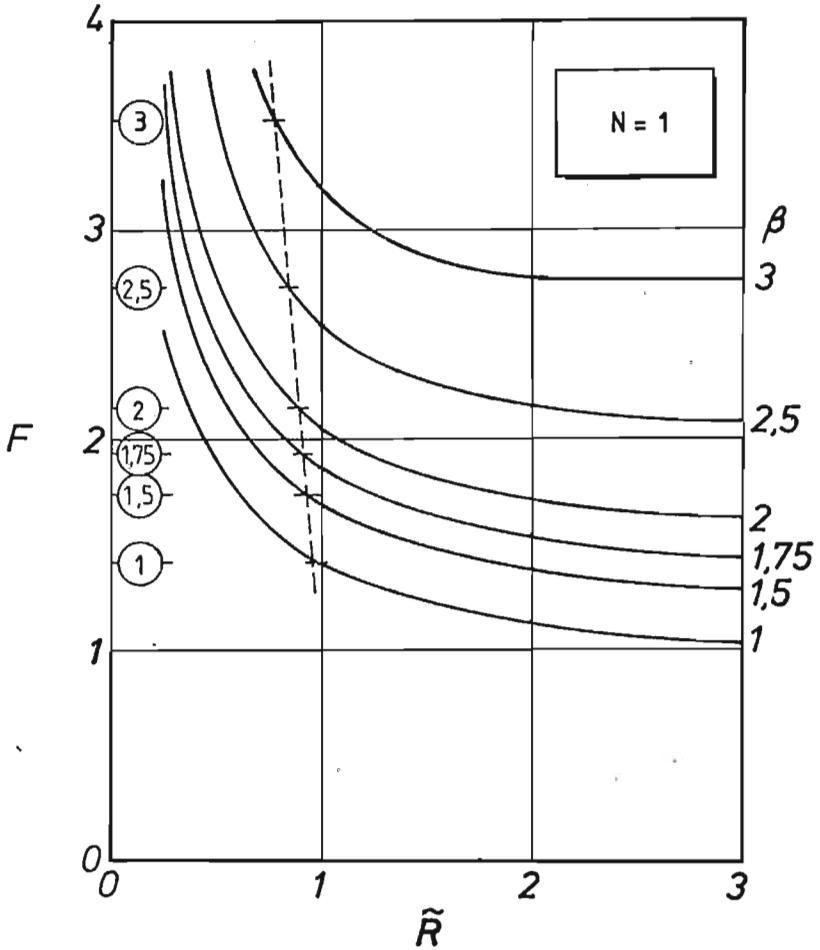


Bild 8: Sicherheitsbeiwert F für verschiedene Sicherheitsindices β in Abhängigkeit vom Verhältnis beobachteter und vorhergesagter Tragfähigkeit (kleine Baustellenpräzision)

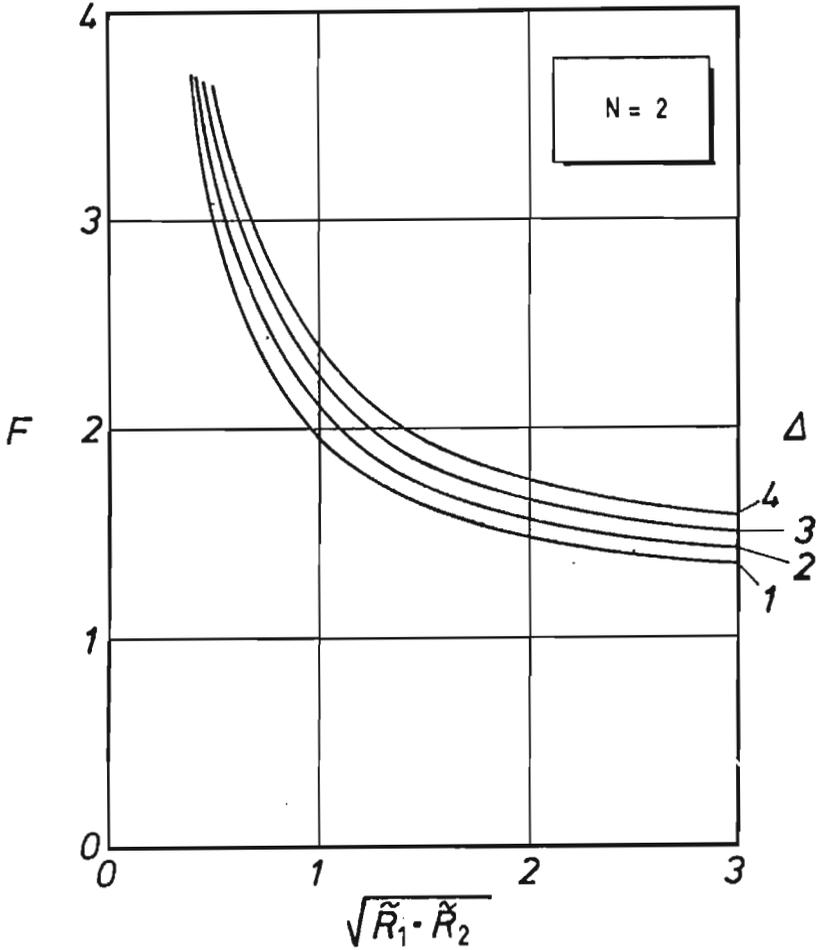


Bild 9: Sicherheitsbeiwert F für einen Sicherheitsindex $\beta = 2$ bei zwei Probelastungen (Bezeichnungen siehe Text)

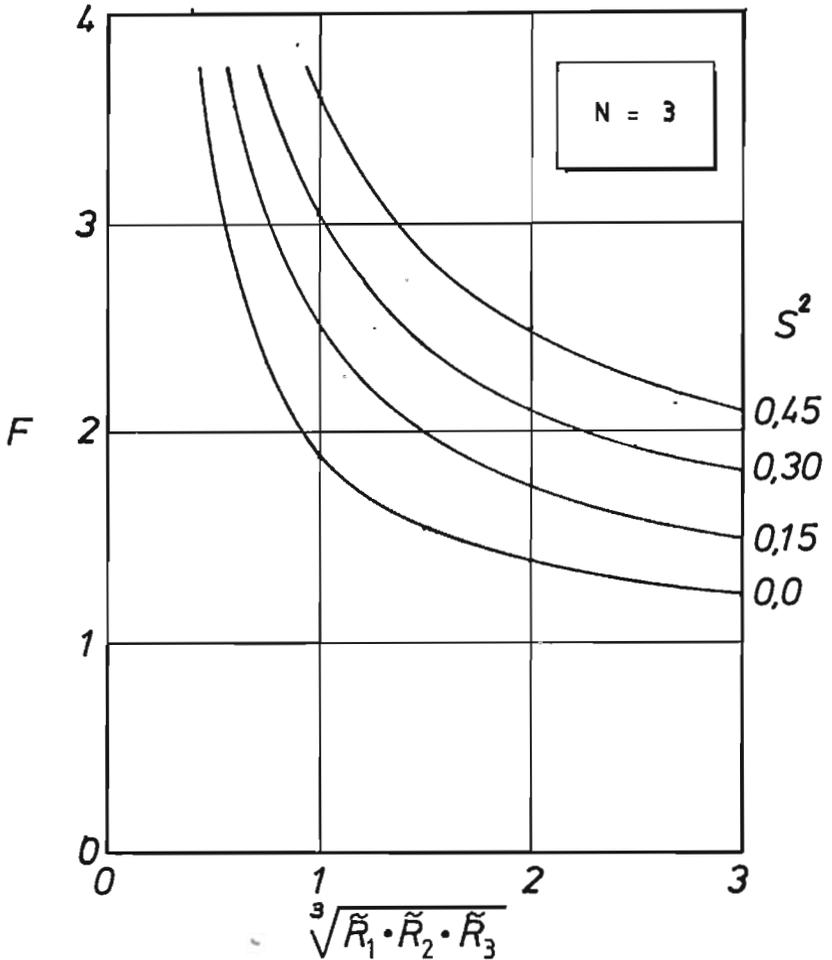


Bild 10: Sicherheitsbeiwert F für einen Sicherheitsindex $\beta=2$ bei drei Probelastungen (Bezeichnungen siehe Text)

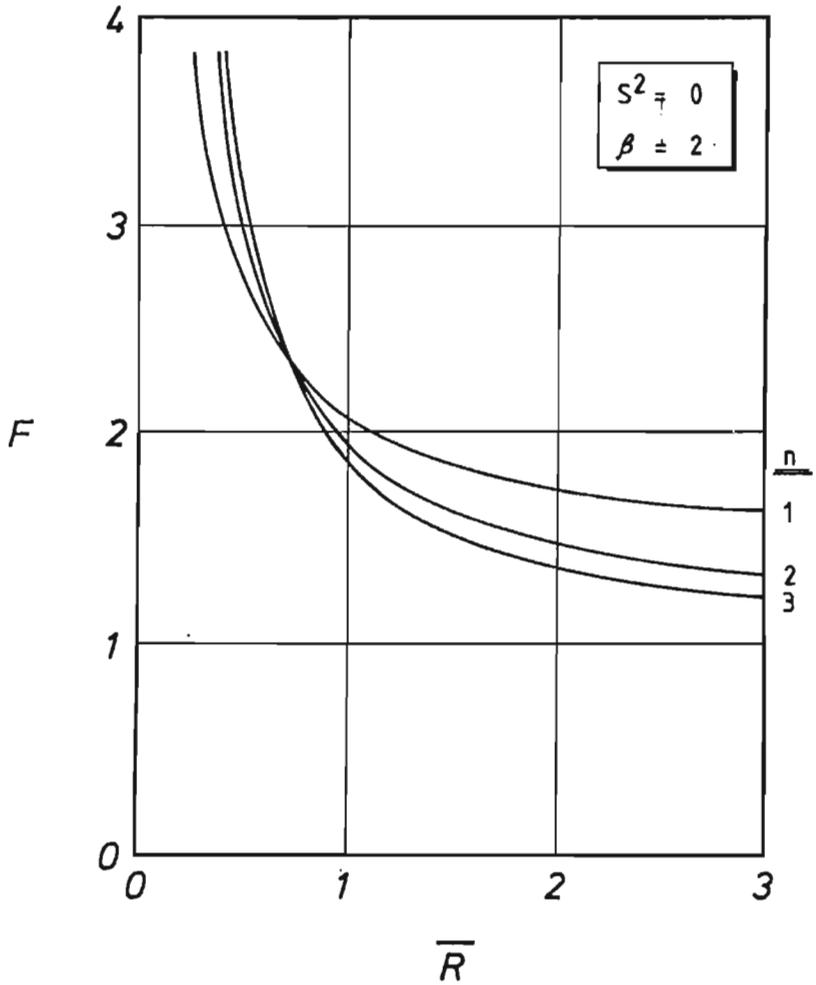


Bild 11: Sicherheitsbeiwert F für einen Sicherheitsindex $\beta = 2$ und nichtstreuenden Probelastungen

STOCHASTISCHE VERFAHREN
ZUR SCHÄTZUNG VON BODENKENNWERTEN

D. Alber

R. Floss

1. Einführung

Ein stets wiederkehrendes Problem des Erd- und Grundbaus besteht darin, Eigenschaften und Kennwerte eines Bodens möglichst genau zu schätzen. Da sie sich aber von Ort zu Ort, in engsten Abständen ändern, lassen sich zwei mögliche Fragestellungen formulieren:

- Die interessierenden Kenngrößen sollen, abhängig von der jeweiligen Problemstellung, "auf der sicheren Seite liegend" abgeschätzt werden. Dies führt zu den traditionellen Verfahren, die Bodenparameter als feste, deterministische Größen angeben.
- Die interessierenden Kennwerte werden als Mittelwerte eines bestimmten Gebiets oder Volumens betrachtet und ihr Streubereich abgeschätzt. Dieser Weg wird von den probabilistischen Verfahren eingeschlagen, die im Folgenden erläutert werden. Auf die theoretische Begründung der stochastischen Beziehungen und deren Ableitung wird im Kontext bewußt verzichtet. Diese Zusammenstellung soll ein eher intuitives Verständnis für probabilistische Ansätze wecken.

Zur Vereinfachung werden nur statistische homogene Böden betrachtet, d.h. ihre Eigenschaften sollen in keiner Richtung einen Trend aufweisen (wie z.B. ein mit der Tiefe zunehmender Steifemodul) und zufällig um einen festen, aber unbekanntem Mittelwert streuen. Weiterhin

wird die richtige Klassifizierung der Böden, z.B. nach DIN 18196, vorausgesetzt. Fehler, die bei Probenentnahmen und Versuchen entstehen, bleiben unberücksichtigt.

2. Bodeneigenschaften als streuende Größen

2.1 Verteilung von Bodenkennwerten und ihre Parameter

Die bautechnisch relevanten Eigenschaften eines Bodens wie Wichte, Winkel der inneren Reibung, Kohäsion, Steifemodul, Durchlässigkeit u.a.m. sind von einer Vielzahl von Parametern abhängig wie Mineralart, Entstehungsgeschichte, Kornform, -rauigkeit und -verteilung, Wassergehalt usw. Diese Parameter können sich in weiten Grenzen ändern. Ihr Streubereich wird generell durch die Klassifikation des Bodens und speziell durch die Betrachtung nur des jeweiligen Ortes der Bauaufgabe beschränkt. Die Annahme, daß diese Parameter mehr oder weniger zufällig um einen innerhalb dieses Gebiets konstanten Mittelwert streuen, darf demnach als berechtigt angesehen werden. Aus dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik kann nun gefolgert werden, daß eine Bodeneigenschaft, die aus einer Summe von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen gebildet wird, annähernd normal verteilt ist. Tatsächlich zeigen viele Bodenkennwerte von klassifizierten Böden dieses Verhalten. In Bild 1 sind einige Beispiele aus der Literatur zusammengestellt. Selbstverständlich können diese Histogramme nicht auf andere, gleich klassifizierte Böden übertragen werden. Neben der Unterschiedlichkeit der Eigenschaften selbst von gleich klassifizierten Böden läßt es die in Veröffentlichungen meist nicht angegebene Art der Probenentnahme (gezielt, zufällig, systematisch usw.) und der Verfahren der Feld- und Laborversuche eine Verallgemeinerung nicht zu. Wie schon früher festgestellt (FLOSS 1969, 1973) ist der Variationskoeffizient einer der wenigen verwertbaren Größen.

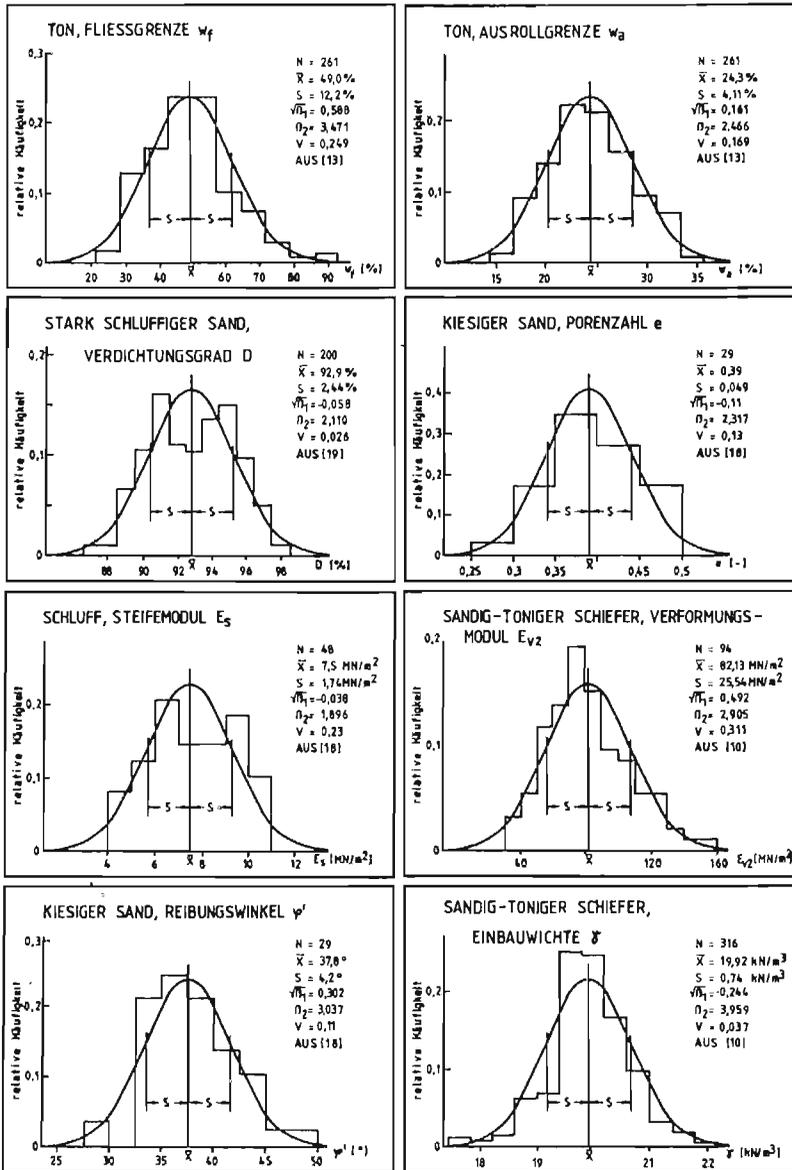


Bild 1 Histogramme von Bodenkennwerten und Dichte der Normalverteilung

Bei Bodenkennwerten, die keine Werte kleiner als Null zulassen und einen großen Variationskoeffizienten aufweisen ($V \geq 30\%$) kann mit einer logarithmischen Normalverteilung eine bessere Anpassung erzielt werden als mit einer Normalverteilung (Bild 2). Erst unter der Annahme theoretischer Verteilungsfunktionen lassen sich die hier vorgestellten probabilistischen Verfahren durchführen.

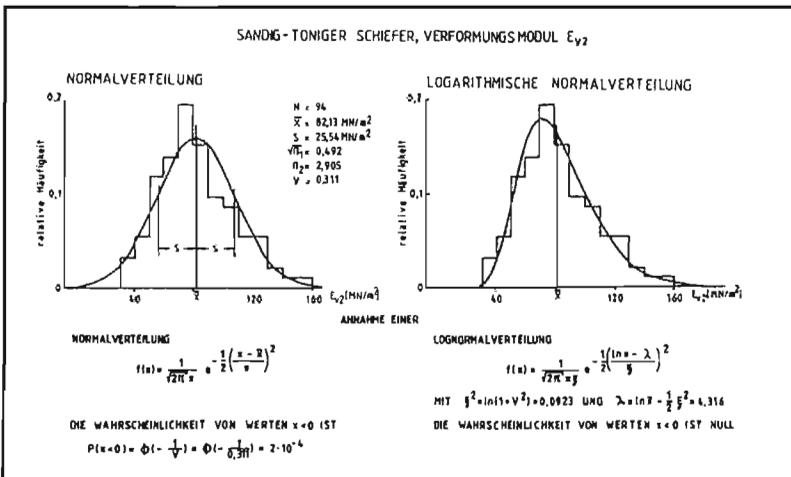


Bild 2 Anpassung von Normal- und Lognormalverteilung an eine Stichprobe

Es können nun nicht nur die Bodenkennwerte als streuende Größen aufgefaßt werden, sondern auch ihre statistischen Maßzahlen, insbesondere der hier interessierende Mittelwert. Er ist für ein bestimmtes Gebiet oder Volumen zwar konstant, aber nicht bekannt, da die Vollerhebung eines Bodenkennwerts, ganz abgesehen von den Kosten, nicht möglich ist, weil nahezu alle bodenmechanischen Prüfverfahren zerstörend sind und die zu untersuchende Grundgesamtheit in ihrer früheren Form nicht mehr existieren würde. Aus diesen Gründen sind Stichproben erforderlich, durch die Schätzungen der Parameter gewonnen werden. Da verschie-

dene Stichproben zu unterschiedlichen Schätzwerten führen, streuen diese Parameter.

Die Verteilung der Mittelwerte kann erneut nach dem zentralen Grenzwertsatz als normal angenommen werden. Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Zufallsstichproben und Mittelwerten:

	<u>Stichprobe</u>	<u>Mittelwert</u>
Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	-
Varianz	$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n}$
Variationskoeffizient	$v(x) = \frac{s(x)}{\bar{x}} \cong \text{konst}$	$v(\bar{x}) = \frac{s(\bar{x})}{\bar{x}} = \frac{s(x)}{\bar{x}\sqrt{n}} \neq \text{konst}$
Verteilung	normal oder lognormal	normal

LUMB (1966, 1979), SCHULTZE (1971, 1975), v. SOOS (1980) und andere zeigen, daß die Variationskoeffizienten der Bodenkennwerte wenig streuende Größen sind, die in guter Näherung als bekannt angenommen werden können. In Tafel 1 wurden für verschiedene Bodengruppen und Bodenkennwerte die in der Literatur mitgeteilten Variationskoeffizienten zusammengestellt. Mit diesen Informationen können wesentlich verfeinerte Aussagen über die Streuung der Mittelwerte als allein durch die im Grundbau üblichen Stichproben geringen Umfangs, gemacht werden.

2.2 Bedeutung und Verwendbarkeit von Mittelwerten

Wie PEINTINGER/REITMEIER in diesem Heft berichten, ist bei großmaßstäblichen Problemen, wie z.B. Böschungsbrüchen, vor allem die Kenntnis der Mittelwerte der Bodeneigenschaften über diesen Bereich zur Beurteilung der Standsicherheit von Bedeutung. Vorsicht bei der Verwendung von Mittelwerten ist geboten, wenn lokale Streuungen ein Versagen

TAFEL 1: VARIATIONSKOEFFIZIENTEN V[%]

BODENART	$\varphi, \tan \varphi'$	c'	c_u	q_u	w_n	n	e_a	S_r	C_c	$\delta \cdot \delta_d$	g_{pr}	w_{opt}	D_{pr}	E_s	E_{v2}	k	w_p	w_l
KIES	KIES + SAND	6 13				10 19	13 30						3 4					
	GROB-SAND	7 10	(76)			(15)	(10)	(19)								(120)		
SAND	MITTEL-SAND	9 14	(86)			(14)	9 10	(18)					(2)			(150)		
	FEIN-SAND	7 14	(71)		(200)	(21)	8 11	(13)								(160)		
SCHLUFF	SAND + SCHLUFF	(14)				22 23												
	SCHLUFF	20 26	(66)		(130)		13 15	(22)							23 25	(300)		
TON	SCHLUFF + TON	7 29	26 31		40 49	30 46		17 32	9 19	25 47	(10)		(4)	21 40			(21)	(20)
	LEICHT PLAST.	10 19	22 55	10	30	6	(21)	15	9	25	(3)						(10)	(6)
	MITTEL PLAST.	10 26	(41)	25	40	14	(26)	21	10	39	(12)		(5)	(30)		(160)	(13)	(7)
	AUSGEPR. PLAST.	20 56	15 63	51	100	25	(14)	32	13	52	(2)						(15)	(10)
DÄMME	STRASSE				(37)					3	2	1	2		31		10	10
	STAUD. KERN			17														
	STAUD. FILTER				23					5	5	2	5					

LEGENDE: (.) NUR EIN WERT ANGEGEBEN; | SPANNWEITE DER WERTE - MITTELWERT
 - IN VERÖFFENTLICHUNGEN EMPFOHLENE WERTE

hervorrufen können, oder anders ausgedrückt: Mittelwerte dürfen nur bei konservativen Parallelsystemen angesetzt werden, nicht aber bei Seriensystemen (Bild 3). In letzterem Fall müssen lokale Extrema von gleitenden Mittelwerten untersucht werden. VANMARCKE (1977) gibt Hinweise zur Abschätzung ihrer Wahrscheinlichkeiten.

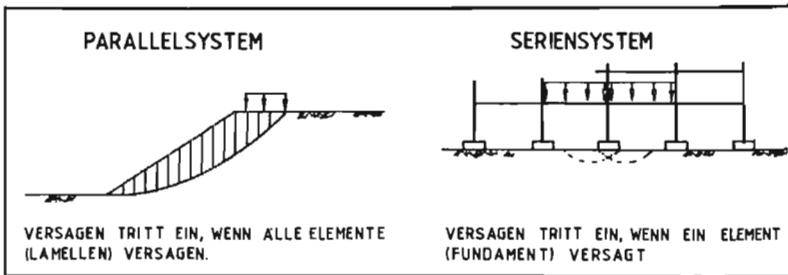


Bild 3 Parallel- und Seriensystem

2.3 Autokorrelation von Bodenkennwerten

Die bei den üblichen statistischen Verfahren vorausgesetzte Unabhängigkeit - gleichbedeutend mit einem zufälligen, regellosen Streuen - kann für Boden nicht aufrechterhalten werden. Es ist unmittelbar einsehbar, daß zwei dicht nebeneinander entnommene Bodenproben in der Regel einander "ähnlicher" sind als zwei weit voneinander entfernte (Bild 4). Durch diese Eigenschaft können die Schätzwerte einer Zufallsstichprobe stark verzerrt werden, wenn z.B. mehrere, eng beieinander entnommene Proben, die eigentlich nur einen Stichprobenwert repräsentieren, als mehrere Beobachtungen in die Schätzung eingehen. LUMB (1974) stellt hierzu fest, daß im allgemeinen systematische Stichproben den geschichteten Zufallsstichproben, und diese wiederum den einfachen Zufallsstichproben überlegen sind (Bild 5).

STANGE (1971 a) gibt Schätzwerte für die Varianz bei den verschiedenen Stichprobenverfahren an und führt aus, daß zur Vernachlässigung des Autokorrelationseinflusses der Probenabstand ein Vielfaches der Länge betragen muß, innerhalb derer eine positive Autokorrelation existiert. Aus Bild 4 und weiteren veröffentlichten Untersuchungen kann angenommen werden, daß für natürlich anstehende Böden in der Regel diese Längen für Bodenkennwerte in horizontaler Richtung kleiner als 10 m und in vertikaler Richtung kleiner als 5 m sind.

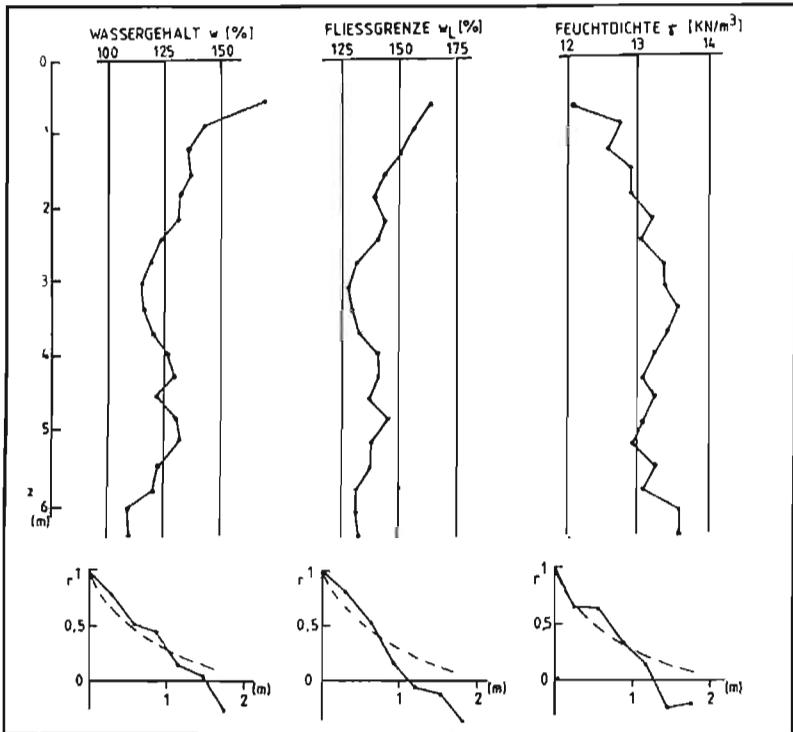


Bild 4a Streuung von Wassergehalt, Fließgrenze und Feuchtdichte und Autokorrelation $r(\Delta z)$ (LUMB, 1974)

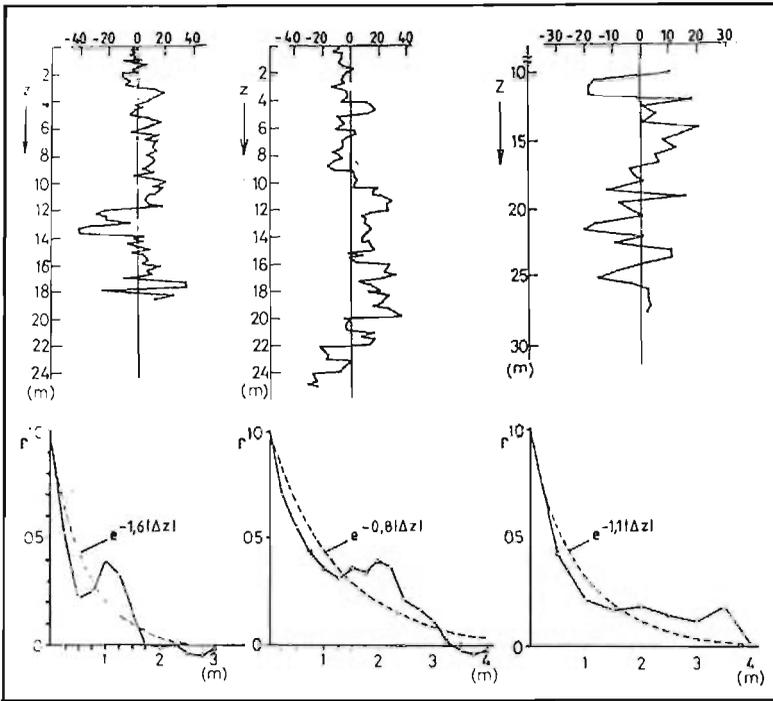


Bild 4b Undränierte Scherfestigkeit c_u . Reststreuung nach Entfernung der linearen Trends in kN/m^2 und Autokorrelationen $r(\Delta z)$ nach MATSUO und ASOKA (1977)

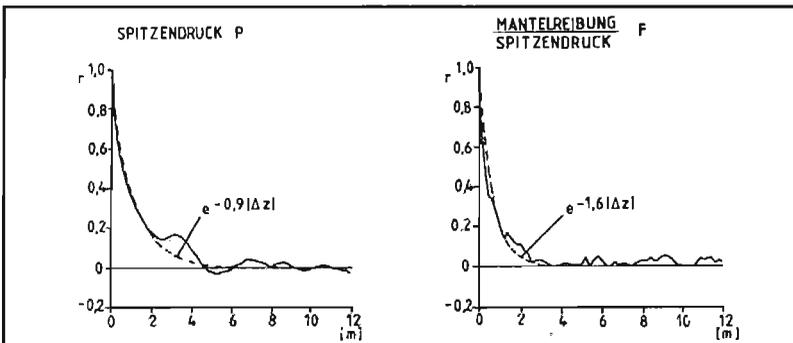


Bild 4c Autokorrelation $r(\Delta z)$ von Meßwerten der holländischen Tiefen-sonde nach ALONSO und KRIZEK (1975)

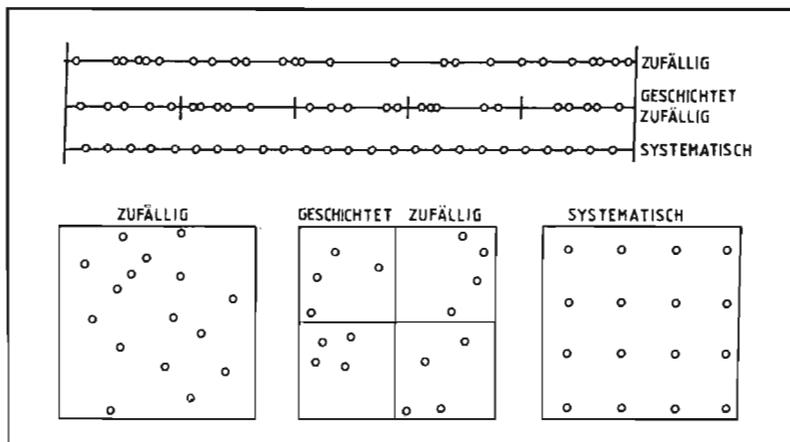


Bild 5 Stichprobenverfahren

BAECHER (1981) schlägt bei autokorrelierten Stichprobenwerten ein wegen der Invertierung der Kovarianzmatrix etwas aufwendiges Verfahren zur Ermittlung der optimalen linearen Schätzung des Mittelwertes vor, bei dem die einzelnen Probenwerte so gewichtet werden, daß die Varianz des Mittelwertes minimal wird. Es besteht grundsätzlich die Möglichkeit, die einzelnen Proben mit Einflußwerten eines bodenmechanischen Modells zu beaufschlagen, so daß der Mittelwert unter Berücksichtigung der räumlichen Streuung und der jeweiligen Problemstellung bestimmt werden kann. Bei kleineren Stichprobenumfängen muß allerdings die Autokorrelationsfunktion bekannt sein, während sie bei größerem Datenmaterial mit dem Verfahren von AGTERBERG (1970) aus der Stichprobe geschätzt werden kann.

3. Schätzung des Mittelwertes bei Kenntnis des Variationskoeffizienten

KAY und KRIZEK (1971) schlagen ein einfaches Verfahren vor, das es erlaubt, zusätzlich zu einer Stichprobe den Variationskoeffizienten in die Schätzung mit einzubeziehen. Insbesondere bei geringen Stichprobenumfängen wird die Varianz des Mittelwertes gegenüber den üblichen Verfahren mit geschätzter Standardabweichung spürbar verringert.

Gegeben sei von einer normalverteilten Bodeneigenschaft X des Umfanges n und dem Mittelwert \bar{x} . Aus anderen Quellen (z.B. Tafel 1) sei der Variationskoeffizient V bekannt. Damit kann eine standardnormalverteilte Zufallsvariable u_i definiert werden

$$u_i = \frac{\bar{x} - \hat{x}_i}{V\hat{x}_i/\sqrt{n}}$$

wobei \hat{x}_i ein Schätzwert für den Mittelwert μ betrachtet und als Zufallsvariable behandelt wird.

KAY/KRIZEK erhalten die Dichtefunktion für den Schätzwert \hat{x} des festen, aber unbekanntes Mittelwertes:

$$P(\mu > \hat{x}_1) = \int_{-\infty}^{u_1} f_N(u) du = \Phi(u_1)$$

$$\text{bzw. } P(\hat{x}_2 > \mu > \hat{x}_1) = \int_{u_2}^{u_1} f_N(u) du = \Phi(u_1) - \Phi(u_2)$$

Die Verteilungsfunktion des Mittelwertes ist nicht symmetrisch zu \bar{x} (vgl. Beispiel 1). Dies resultiert aus der Voraussetzung eines konstanten Variationskoeffizienten, die bei einem kleineren Mittelwert auch eine kleinere Varianz bedingt. Ein mehr konservativer Ansatz für untere Grenzwerte ist die Annahme einer konstanten Standardabweichung des Mittelwertes mit der normalverteilten Zufallsvariablen

$$u_i = \frac{\bar{x} - \hat{x}_i}{V\bar{x}/\sqrt{n}}$$

4. Schätzung des Mittelwertes unter Berücksichtigung von Vorinformation

Bei der Beurteilung von Bodeneigenschaften wird neben den Ergebnissen von Untersuchungen im Feld und im Labor auch stets die Erfahrung des Baugrundsachverständigen mit einfließen. RACKWITZ/PEINTINGER (1981) geben ein Verfahren an, mit dem diese Erfahrung unter Zuhilfenahme des Bayesschen Satzes ihren zahlenmäßigen Ausdruck findet. Hierbei können Informationen über Mittelwert und Standardabweichung aus verschiedenen Quellen in die Schätzung eingehen. Die Qualität dieser Informationen wird dabei für den Mittelwert durch die äquivalente Stichprobenmenge n und für die Standardabweichung durch die Zahl der Freiheitsgrade ν ausgedrückt. Für jede Information wird zunächst berechnet, welchen Werten von n und ν sie entspricht. Anschließend wird sie mit der schon bekannten (a priori) Information verknüpft. Als Ergebnis (a posteriori) erhält man ein höheres Informationsniveau, das bei neuen Erkenntnissen wiederum zur a priori Information wird. Die "Wertigkeit" der Kenntnisse über die Bodeneigenschaften wird dabei durch die Informationszustände systematisiert.

4.1 Informationszustand I

Läßt sich der Boden einer Bodengruppe nach DIN 18196 zuordnen, so können z.B. mit den Tabellen von v. SOOS (1980) die Bodenkenngrößen in erster Näherung abgeschätzt werden. Die in diesen Tabellen für jede Bodengruppe genannten Tabellen dürfen als Grenzen interpretiert werden, zwischen denen die mittleren Kenngrößen eines ca. 0,5 m³ großen Probenvolumens in 90% aller Fälle liegen würden. Betrachtet man die Bodeneigenschaften als von Punkt zu Punkt veränderlich und autokorreliert, so können aus diesen Intervallen mit Hilfe einer Autokorrelationsfunktion Intervallsgrenzen für die "Punkteigenschaften" angegeben werden.

RACKWITZ/PEINTINGER nehmen eine Autokorrelationsfunktion der Form

$$r = \exp -\left\{ \left(\frac{\Delta X}{\delta_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{\delta_2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{\delta_3} \right)^2 \right\}$$

mit $\delta_1 = \delta_2 = 5 \text{ m}$ und $\delta_3 = 1 \text{ m}$

an, die als gute Näherung der publizierten Autokorrelationen angesehen werden kann. Damit ergibt sich für die Intervallgrenzen ein Vergrößerungsfaktor von

$$F(0,5 \text{ m}^3) \approx 1,24.$$

Mit der Annahme, daß der wahrscheinlichste Wert einer Bodeneigenschaft in der Intervallmitte liegt, erhält man mit x_0 und x_u als Grenzen des Intervalls als ersten Schätzwert des Mittels

$$\bar{x}' = \frac{x_0 + x_u}{2},$$

dessen 90% Konfidenzintervall mit

$$I_G = F(0,5 \text{ m}^3) \cdot (x_0 - x_u) = 1,24 (x_0 - x_u)$$

berechnet werden kann. Wird der Variationskoeffizient als bekannt vorausgesetzt (vgl. Tafel 1), so ergibt sich der Schätzwert der Standardabweichung aus

$$s' = v \cdot \bar{x}'.$$

Nun interessiert noch, wievielen Stichprobenwerten diese Information entspricht. RACKWITZ (1981) führt aus, daß die Verteilung einer Zufallsvariablen mit geschätzten Werten für Mittel- und Standardabweichung

$$t_v' = \frac{y - \bar{x}'}{s'} \sqrt{\frac{n'+1}{n'}}$$

der Studentverteilung mit ν' Freiheitsgraden folgt.

Je höher die Zahl der Freiheitsgrade ist, desto genauer ist die Standardabweichung bekannt. RACKWITZ/PEINTINGER geben als Schätzwert $\nu' = 3$ an. Damit erhält man für die Grenzen eines 90% Konfidenzintervalls mit

$$P(T \leq -t_{\nu}') = P(T \geq t_{\nu}') = 5\%$$

$$t_{\nu}' = 2,35$$

und damit die der Information über den Mittelwert äquivalenten Stichprobenanzahl

$$n' = \frac{1}{\left(\frac{I_G/2}{s' \cdot t_{\nu}'}\right)^2 - 1} \cdot$$

Damit sind alle statistischen Parameter (\bar{x}' , n' , s' , ν') des Informationszustandes I bekannt. Die Aussagen sind allerdings noch viel zu unscharf, um verwertbar zu sein.

4.2 Informationszustand II

Hier soll von einem Baugrundsachverständigen der Mittelwert \bar{x} und sein $\alpha\%$ Konfidenzintervall mit den Grenzen x_0 und x_u , sowie die Standardabweichung s mit den zugehörigen Freiheitsgraden ν geschätzt werden. Da die beiden letzten Parameter etwas unanschaulich sind, kann an ihrer Stelle auch die Spannweite R , also die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert einer (gedachten) Stichprobe von n Werten verwendet werden. Sie steht bei einer Normalverteilung mit der Standardabweichung in folgendem Zusammenhang:

Mit $R = x_{\max} - x_{\min}$

aus einer Stichprobe des Umfanges n ist der Schätzwert der Standardabweichung

$$s = R \cdot 1/d_v \text{ mit } v = n-1 \text{ Freiheitsgraden}$$

und $1/d_v$ aus Tabelle 1.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$1/d_v$	0,707	0,523	0,447	0,404	0,374	0,355	0,339	0,326	0,316	0,307
v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tab. 1 Zusammenhang zwischen Spannweite R und geschätzter Standardabweichung s

Eine weitere Möglichkeit ist die Annahme eines $\alpha\%$ Konfidenzintervalls für die Spannweite. STANGE (1971a) gibt Fraktilwerte ihrer Verteilung an, woraus dann die Zahl der Freiheitsgrade und der Mittelwert von R rückgerechnet werden kann. Letzterer liegt nicht symmetrisch zu den Grenzen R_O und R_U des Konfidenzintervalls, sondern stets etwas näher am unteren Wert des Konfidenzintervalls, bedingt durch die asymmetrische Form der Verteilung von R .

Die Ermittlung der Zahlenwerte erfolgt am einfachsten mit den Hilfsgrößen der Tabelle 2:

$$\text{Mit dem Verhältniswert } V_v = \frac{R_O}{R_U}$$

kann die Zahl der Freiheitsgrade v und der Faktor c zur Bestimmung des Mittelwertes von R

$$R = c_v (R_O + R_U)$$

abgelesen werden. Der Schätzwert für die Standardabweichung kann nun mit den Werten der Tabelle 1 ermittelt werden.

$\alpha=90\%$	V_v	30,8	7,70	4,78	3,75	3,22	2,90	2,68	2,52	2,40	2,31
	v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	c_v	0,394	0,453	0,469	0,476	0,480	0,482	0,483	0,485	0,486	0,487
$\alpha=99\%$	V_v	397	34,0	13,8	8,89	6,71	5,60	4,86	4,41	4,08	3,79
	v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	c_v	0,283	0,372	0,409	0,428	0,438	0,445	0,450	0,453	0,456	0,457

Tab 2 Hilfsgrößen zur Bestimmung der Freiheitsgrade und des Mittelwerts R

Es muß betont werden, daß die Schätzung der Spannweite von der Unsicherheit über die Lage des Mittelwertes vollkommen unabhängig sein soll. Am konkreten Beispiel einer Schätzung des Reibungswinkels könnte z.B. so vorgegangen werden: Unter der Annahme, daß der Boden sehr inhomogen sei und der Mittelwert $x_{\bar{\phi}}$ einen beliebigen, aber festen Wert habe, erhält man die größte Spannweite R_0 der Einzelwerte, bei sehr homogenem Boden mit wiederum beliebigem, aber festem Mittelwert erhält man die kleinste Spannweite R_u . Es ist jedoch nicht erlaubt so zu verfahren, daß der Boden einmal als sehr inhomogen angenommen wird, und aus der Differenz des bei einem großen Mittelwert nun größtmöglichen und bei einem kleinen Mittelwert kleinstmöglichen Reibungswinkels R_0 zu berechnen, und entsprechend für homogenen Boden, da dann die Spannweiten durch die Unsicherheit des Mittelwertes vergrößert werden.

Die Schätzung des $\alpha\%$ Konfidenzintervalls des Mittelwertes ist auf zwei verschiedene Arten möglich, die eine getrennte Behandlung erfordern:

- a) Schätzung unter der Bedingung, daß die Standardabweichung den vorher berechneten Wert annimmt

Wenn das $\alpha\%$ Konfidenzintervall geschätzt wird unter der Annahme, daß die Einzelwerte so wie bei der Ermittlung der Standardabweichung streu-

en, dann folgt die Zufallsvariable

$$u = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

einer Normalverteilung und für die Intervallgrenzen \bar{x}_0, \bar{x}_u gilt

$$\bar{x}_0 = \bar{x} + u_{(1+\alpha)/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_u = \bar{x} + u_{(1-\alpha)/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

mit $u_{(1\pm\alpha)/2}$ als $(1\pm\alpha)/2$ Fraktilwert der Normalverteilung (vgl. Tab. 3).

$\alpha\%$	90	99
$u_{(1\pm\alpha)/2}$	$\pm 1,645$	$\pm 2,576$

Tab. 3 Zweiseitige Fraktilwerte $u_{(1\pm\alpha)/2}$ der Normalverteilung

Damit wird

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{x}_0 + \bar{x}_u)$$

$$\text{und } n = \frac{u^2 (1-\alpha)/2 \cdot S^2}{(\bar{x}_0 - \bar{x}_u)^2} .$$

Damit sind die Stichprobenparameter (\bar{x}, n, s, v) bekannt.

Die Berechnung der a posteriori-Parameter geschieht anhand folgender Beziehungen:

Mit den a priori Parametern (\bar{x}', n', s', v') und den Stichprobenparametern (\bar{x}, n, s, v) ergibt sich

$$n'' = n + n'$$

$$v'' = v + v' + 1$$

$$\bar{x}'' = \frac{n\bar{x} + n'\bar{x}'}{n + n'}$$

$$s''^2 = \frac{1}{v''} \left(v s^2 + v' s'^2 + \frac{n n' (\bar{x} - \bar{x}')^2}{n + n'} \right).$$

Diese Beziehungen gelten, wenn Mittelwert und Standardabweichung aus derselben (gedachten) Stichproben ermittelt wurden.

b) Schätzung des $\alpha\%$ Konfidenzintervalls unabhängig von der vorher berechneten Standardabweichung

Wenn das $\alpha\%$ Konfidenzintervall geschätzt wird unter der Annahme, daß es stets seine Grenzen beibehält, unabhängig davon, wie groß die Standardabweichung der Einzelwerte zuvor geschätzt wurde, dann folgt die Zufallsvariable

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

einer Studentischen t-Verteilung mit v Freiheitsgraden. Für die Intervallgrenzen \bar{x}_O , \bar{x}_U gilt dann

$$\bar{x}_O = \bar{x} + t_{v, (1+\alpha)/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_U = \bar{x} + t_{v, (1-\alpha)/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

mit $t_{v, (1-\alpha)/2}$ als $(1-\alpha)/2$ Fraktilwert der Studentverteilung mit v Freiheitsgraden (vgl. Tab. 4).

$\alpha=90\%$	v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$t_{v,(1\pm\alpha)/2}$	$\pm 6,31$	$\pm 2,92$	$\pm 2,35$	$\pm 2,13$	$\pm 2,02$	$\pm 1,94$	$\pm 1,90$	$\pm 1,86$	$\pm 1,83$	$\pm 1,81$
$\alpha=99\%$	v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$t_{v,(1\pm\alpha)/2}$	$\pm 63,7$	$\pm 9,93$	$\pm 5,84$	$\pm 4,60$	$\pm 4,03$	$\pm 3,71$	$\pm 3,50$	$\pm 3,36$	$\pm 3,25$	$\pm 3,17$

Tab. 4 Zweiseitige Fraktilewerte $t_{v,(1\pm\alpha)/2}$ der Studentverteilung

Damit ergibt sich für den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{x}_0 + \bar{x}_u)$$

und für den Stichprobenumfang

$$n = \frac{t_{v,(1\pm\alpha)/2}^2 s^2}{(\bar{x}_0 - \bar{x}_u)^2} .$$

Damit sind die Stichprobenparameter (\bar{x}, n, s, v) bekannt.

Die Berechnung der a posteriori Parameter geschieht mit folgenden Beziehungen:

Aus den a priori Parametern (\bar{x}', n', s', v') und den Stichprobenparametern (\bar{x}, n, s, v) werden die a posteriori Parameter zu

$$n'' = n + n'$$

$$v'' = v + n + v'$$

$$\bar{x}'' = \frac{n\bar{x} + n'\bar{x}'}{n + n'}$$

$$s''^2 = \frac{1}{v''} \left(v \frac{v-1}{v-2} s^2 + v' s'^2 + \frac{nn'(\bar{x}-\bar{x}')^2}{n + n'} \right).$$

Diese Beziehungen gelten, wenn Mittelwert und Standardabweichung aus verschiedenen (gedachten) Stichproben ermittelt wurden.

Jede weitere Erkenntnis im Informationszustand II, sei es durch zusätzliche Ortsbesichtigungen, Aufschlüsse oder Klassifikationsversuche, kann mit den angegebenen Verfahren in (fiktive) Stichprobenparameter umgesetzt werden. Die bisherigen a posteriori Parameter (\bar{x}'' , n'' , s'' , v'') werden in a priori Parameter (\bar{x}' , n' , s' , v') umbenannt und ergeben zusammen mit der neuen Stichprobe (\bar{x} , n , s , v) die verbesserten a priori Parameter.

4.3 Informationszustand III

Hier fallen nur direkte und indirekte Messungen der interessierenden Eigenschaften an. Die Parameter (\bar{x} , n , s , v) einer direkt gemessenen Stichprobe lassen sich mit den bekannten Formeln errechnen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$
$$v = n - 1$$

Die Parameter einer indirekt gemessenen Stichprobe müssen aus einer Regressionsbeziehung ermittelt werden. Zur Vereinfachung werden hier eine lineare Abhängigkeit der interessierenden Eigenschaften X von der gemessenen Eigenschaft Y angenommen und eine Normalverteilung von X bei festem Y vorausgesetzt, die gegebenenfalls durch Transformation der Variablen erreicht werden können. Die Regressionsbeziehung soll aus schon vorhandenem Datenmaterial (Index *) derselben Grundgesamtheit geschätzt werden: Aus n^* Wertepaaren (x^*, y^*) wird $(n^*, x^*, s_{x^*}^{*2}, s_{y^*}^{*2}, s_{xy}^{*2})$ berechnet und man erhält eine Regressionsgerade

$$x = b(y - \bar{y}^*) + \bar{x}^*$$

$$\text{mit } b = \frac{s_{yx}^*}{s_{y^*}^{*2}} \text{ und dem Korrelationskoeffizient } r = \frac{s_{xy}^*}{s_{x^*}^* s_{y^*}^*}.$$

Die Annahme, daß das schon vorhandene Datenmaterial und der untersuchte Boden derselben Grundgesamtheit entstammen, sollte zuvor durch einen statistischen Test auf Gleichheit der Mittelwerte überprüft werden.

Für eine indirekte Stichprobe des Umfangs m , (y_1, y_2, \dots, y_m), werden die zugehörigen Schätzwerte x_i mit ihren "Wertigkeiten" n_i anhand folgender Beziehung ermittelt:

$$x_i = b(y_i - \bar{y}^*) + \bar{x}^*$$

$$n_i = \frac{1}{(y_i - \bar{y}^*)^2 n^*} \frac{1}{1 + \frac{s_y^{*2}}{s_x^{*2}} (n^* - 1)}$$

Der Stichprobenumfang der indirekten Stichprobe von x wird dann zu

$$n = \sum_{i=1}^m n_i$$

und der Mittelwert 'zu

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i.$$

Die Varianz erhält man aus

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m n_i x_i \right)^2 \right) + \frac{n^*-1}{n^*-2} (1-r^2) \frac{s_x^{*2}}{n^*} \frac{m}{n}$$

mit den Freiheitsgraden

$$v = (n-1)r^2 + (n^*-1)(1-r^2).$$

Da der zweite Anteil $(n^*-1)(1-r^2)$ von v die Information der Regressionsbeziehung enthält, die möglicherweise schon im Informationszustand I oder II in die Schätzung von X eingegangen ist, scheint es

sinnvoll, mit

$$v = (n-1)r^2$$

nur die Aussagen der indirekten Stichprobe (y_1) mitzunehmen. Wie aus dem Einfluß des Korrelationskoeffizienten r zu erkennen ist, bringen indirekte Stichproben nur bei guter Korrelation genügende Informationen über die Lage des Mittelwertes.

Mit den so erhaltenen Parametern (n , \bar{x} , s , v) wird nun wiederum mittels der in Abschn. 4.2 angegebenen Beziehung eine neue a posteriori Schätzung (n'' , \bar{x}'' , s''^2 , v'') errechnet.

4.4 Hinweise zur Anwendung

RACKWITZ/PEINTINGER weisen darauf hin, daß dieses Schätzverfahren mit Vorinformation nur bei richtig klassifizierten Böden anwendbar ist, daß aber andererseits auch nur bei einer offensichtlichen Fehlklassifikation die Vorinformation verworfen werden sollte. Bei stark von den Erwartungen abweichenden Versuchsergebnissen sind allerdings Stichproben größeren Umfangs erforderlich, um genügend sichere Aussagen treffen zu können. Da bei diesem Verfahren jede Information auch bei späteren Informationszuständen erhalten bleibt, und entsprechend ihrer Sicherheit (ausgedrückt durch den Stichprobenumfang n und die Freiheitsgrade v) gewichtet wird, sollten insbesondere die Konfidenzintervalle in den Informationszuständen I und II sehr sorgfältig, und eher zu groß als zu klein, geschätzt werden.

Da die gemeinsame Verteilung von (σ, μ) als χ^{-1} -Normal angenommen wurde, folgt die Verteilung des Mittelwertes der Studentischen t -Verteilung mit v'' Freiheitsgraden, dem Mittelwert x'' und der Varianz s''^2/n'' :

$$t_{v''} = \frac{\mu - x''}{s'' / \sqrt{n''}}$$

Damit können Konfidenzintervalle, Bemessungswerte und Partialsicherheiten bestimmt werden.

5. Beispiele

5.1 Schätzung des Mittelwerts bei Kenntnis des Variationskoeffizienten

Es sei eine Stichprobe von 2 Triaxialversuchen zur Bestimmung des Reibungswinkels eines mittelplastischen Tons gegeben.

$$\begin{aligned} \phi' & \quad 18,3^\circ \quad 21,1^\circ \\ \text{Mittelwert } \phi' & = 19,7^\circ \text{ mit } n = 2 \\ \text{Standardabweichung } s & = 1,98 \text{ mit } \nu = n-1 = 1 \end{aligned}$$

oder nach Tabelle 1:

$$\begin{aligned} r & = 21,1 - 18,3 = 2,8^\circ \\ \text{mit } 1/d_\nu & = 0,707 \text{ folgt } s = 0,707 \cdot 2,8 = 1,98^\circ \text{ mit } \nu = 1 \end{aligned}$$

Variationskoeffizient aus Tafel 1: $V \approx 0,15$.

5.1.1 90% Konfidenzintervall nach dem Verfahren von KAY/KRIZEK (vgl. Bild 6)

Der Variationskoeffizient wird mit $V = 0,15$ als bekannt angenommen. Für die Grenzen des 90%Konfidenzintervalls ergibt sich:

Mit dem zweiseitigen Fraktilwert der Normalverteilung aus Tab. 3

$$\begin{aligned} u_{(1-0,9)/2} & = -1,645 & u_{(1+0,9)/2} & = 1,645 \\ \text{wird } \hat{\phi}'_0 & = \frac{19,7^\circ}{1-1,645 \cdot 0,15/\sqrt{2}} = 23,86^\circ \end{aligned}$$

$$\hat{\phi}'_U = \frac{19,7^\circ}{1 + 1,645 \cdot 0,15/\sqrt{2}} = 16,77^\circ$$

und damit $16,77^\circ \leq \mu_\phi \leq 23,86^\circ$.

5.1.2 90% Konfidenzintervall bei einer bekannten, konstanten Standardabweichung (vgl. Bild 6)

$$s = 0,15 \cdot 19,7 = 2,96^\circ$$

und daraus:

$$\hat{\phi}'_O = 19,7 + 1,645 \frac{2,96^\circ}{\sqrt{2}} = 23,13^\circ$$

$$\hat{\phi}'_U = 19,7 - 1,645 \frac{2,96^\circ}{\sqrt{2}} = 16,26^\circ$$

also $16,26^\circ \leq \mu_\phi \leq 23,13^\circ$.

5.1.3 90% Konfidenzintervall bei Schätzung der Standardabweichung aus der Stichprobe (vgl. Bild 6)

$$s = 1,98^\circ$$

mit dem zweiseitigen Fraktilwert der t-Verteilung aus Tab. 4 für $\nu = 1$:

$$t_{1;0,05} = -6,31 \quad t_{1;0,95} = 6,31$$

$$\text{wird } \hat{\phi}'_O = 19,7 + 6,38 \frac{1,98}{\sqrt{2}} = 28,6^\circ$$

$$\hat{\phi}'_U = 19,7 - 6,38 \frac{1,98}{\sqrt{2}} = 10,8^\circ$$

Mit $10,8^\circ \leq \mu_\phi \leq 28,6^\circ$ nimmt das allein aus dem Stichprobenumfang geschätzte 90% Konfidenzintervall einen unrealistisch großen Wert an. Dieses Beispiel zeigt, daß die aus den üblichen Versuchsumfängen - insbesondere für Scherparameter - resultierenden traditionellen Rechenwerte nicht allein aus Stichproben gewonnen werden können. Zur Festlegung solcher Rechenwerte müssen noch von anderer Seite Informationen mit

einfließen, die auch bei einer statistischen Behandlung dieses Problems mit verwendet werden sollten, wie in diesem Beispiel durch die Vorgabe eines Variationskoeffizienten.

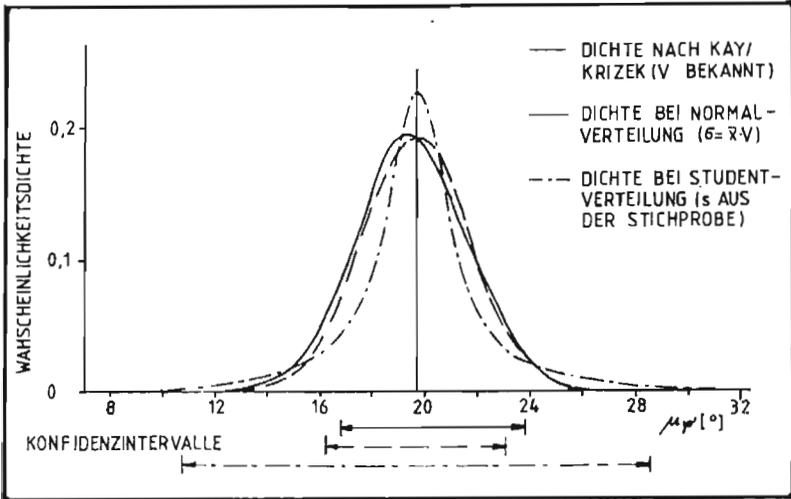


Bild 6 Wahrscheinlichkeitsdichten der Mittelwerte und 90% Konfidenzintervalle

5.2 Schätzung des Mittelwertes bei Vorinformation

Es soll der mittlere Reibungswinkel $\bar{\phi}'$ eines Tons geschätzt werden.

5.2.1 Informationszustand I

Kenntnis der groben Klassifikation "Ton".

90% Konfidenzintervall aus Tab. 1a von v. S00S (1980), Zeile 11-20:

$$x_u = 17^\circ \quad x_o = 32^\circ$$

$$\bar{x}' = \frac{17 + 32}{2} = 24,5^\circ$$

$$I_G = 1,24 (32 - 17) = 18,6^\circ$$

Variationskoeffizient aus Tafel 1: $V = 0,1 + 0,63$

Bei dem Verfahren nach RACKWITZ/PEINTINGER sollte der Variationskoeffizient so klein wie vertretbar angenommen werden, um einen Großteil der Streuung der Unsicherheit über die Lage des Mittelwertes zuzuweisen:

Mit $V = 0,10$ wird $s = 0,10 \cdot 24,5 = 2,45^\circ$

und $v' = 3$

$$\text{folgt } n' = \frac{1}{\left(\frac{18,6}{2,45 \cdot 2,35}\right)^2 - 1} = 0,6.$$

Damit sind die a priori Parameter $(\bar{x}', n', s', v') = (24,5; 0,6; 2,45; 3)$.

5.2.2 Informationszustand II

Ein Baugrundsachverständiger schätzt aufgrund seiner Erfahrung um die örtlichen Gegebenheiten:

- daß der effektive Reibungswinkel meistens, d.h. in 90% aller Fälle, höchstens um $\pm 4,25^\circ$ und mindestens um $\pm 1,30^\circ$ streut,
- daß unabhängig von der Streuung der Mittelwert gewiß, d.h. in 99% aller Fälle zwischen 17° und 21° liegt.

Die Schätzwerte für Standardabweichung und Freiheitsgrade werden anhand der Tab. 1 und 2 berechnet:

$$R_o = 2 \cdot 4,25 = 8,5^\circ \quad R_u = 2 \cdot 1,30^\circ = 2,6^\circ$$

$$V_v = \frac{8}{2,6} = 3,2.$$

Damit erhält man aus Tab. 2 für $\alpha = 90\%$ die Werte

$$v = 5 \quad c_v = 0,48.$$

Der Schätzwert für die Spannweite wird zu

$$R = 0,48(8,5^\circ + 2,6^\circ) = 5,33^\circ$$

und mit Tab. 1 wird die Standardabweichung s mit $1/d_v = 0,374$ für $v = 5$ zu

$$s = 0,374 \cdot 5,33^\circ = 1,99^\circ.$$

Der Schätzwert für den Mittelwert ist

$$x = \frac{1}{2} (17^\circ + 21^\circ) = 19^\circ.$$

Der Stichprobenumfang wird mit $t_{5, (1 \pm 0,99)/2} = \pm 4,03$ aus Tab. 4 zu

$$n = \frac{4,03^2 \cdot 1,99^2}{(21 - 17)^2} = 4,02.$$

Die Parameter der hypothetischen Stichproben lauten nun

$$(x; n; s; v) = (19^\circ; 4,02; 1,99^\circ, 5).$$

Die a posteriori Parameter werden damit zu

$$n'' = 4,02 + 0,6 = 4,62$$

$$s'' = 3 + 5 + 1,64 = 9,64$$

$$x'' = \frac{4,02 \cdot 19 + 0,6 \cdot 24,5}{4,02 + 0,6} = 19,71^\circ$$

$$s''^2 = \frac{1}{9,64} (5 \cdot 1,99^2 + 3 \cdot 2,45^2 + \frac{0,6 \cdot 4,02 (19 - 24,5)^2}{4,02 + 0,6})$$

$$s'' = 2,36^\circ$$

Nachdem durch eine Ortsbesichtigung mit Feldversuchen zur Klassifizierung die bisherigen Eingruppierung des Bodens verifiziert wurde, verschärft der Baugrundsachverständige seine Schätzung der Bodengruppe mit

- Ton, ausgeprägt plastisch
- der Spannweite des Reibungswinkels an 6 untersuchten (und genügend weit voneinander entfernten) Stellen mit $R = 5,3^\circ$
- das 90% Konfidenzintervall des Mittelwertes, ausgehend von der Streuung an den 6 untersuchten Stellen zu $18^\circ \leq \mu \leq 20^\circ$.

Die Stichprobenparameter werden zu

$$n = 6; \quad v = n - 1 = 5$$

aus Tab. 1: $1/d_v = 0,374$

$$s = 0,374 \cdot 5,3 = 1,98^\circ$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} (18 + 20) = 19^\circ.$$

Da die Schätzung des Mittelwertes unter der Annahme geschah, daß die beobachtete Streuung die wahre ist, wird

mit $u_{(1+0,9)/2} = \pm 1,645$ aus Tab. 4

$$n = \frac{1,645^2 \cdot 1,98^2}{(20 - 18)^2} = 2,65.$$

Die a posteriori Parameter werden zu

$$n'' = 2,65 + 4,62 = 7,27$$

$$v'' = 5 + 9,64 + 1 = 15,64$$

$$\bar{x}'' = \frac{2,65 \cdot 19 + 4,62 \cdot 19,71}{2,65 + 4,62} = 19,45^\circ$$

$$s''^2 = \frac{1}{15,64} (5 \cdot 1,98^2 + 9,64 \cdot 2,36^2 + \frac{2,65 \cdot 4,62 (19,71 - 19)^2}{2,65 + 4,62})$$

$$s'' = 2,18$$

5.2.3 Informationszustand III

Aus Laborversuchen wurden unter anderem folgende Werte für Reibungswinkel und Plastizitätszahl ermittelt:

ϕ' (°)	17,0	19,3	20,9
I_p (%)	45	37,5	36,5

sowie eine weitere Stichprobe mit Plastizitätszahlen

I_p (%)	33,4	37,9	39,2	41,9	47,8
-----------	------	------	------	------	------

Zunächst werden die a posteriori Parameter mit den Stichprobenwerten für ϕ' auf den neuen Stand gebracht.

Mit den Parametern der Stichprobe des Reibungswinkels

$$n = 3 \quad v = 2$$

$$\bar{x} = 19,07^\circ \text{ und } s = 1,96^\circ$$

wird

$$n'' = 3 + 7,27 = 10,27$$

$$v'' = 2 + 15,64 + 1 = 18,64$$

$$\bar{x}'' = \frac{3 \cdot 19,07 + 7,27 \cdot 19,45}{3 + 7,27} = 19,34^\circ$$

$$s''^2 = \frac{1}{18,64} (2 \cdot 1,96^2 + 15,64 \cdot 2,18^2 + \frac{3 \cdot 7,27(19,07 - 19,45)^2}{3 + 7,27})$$

$$s'' = 2,10^\circ$$

Aus früheren Untersuchungen ausgeprägt plastischer Tone derselben geologischen Formation liegen folgende Daten vor, die eine lineare Korrelation zwischen Plastizitätszahl und Reibungswinkel vermuten lassen:

$$(n^*; \phi'^*; I_p^*; s_{\phi'}^*; s_{I_p}^*; s_{\phi' I_p}^*) = (21; 20,4^\circ; 40,5\%; 2,86^\circ; 5,53\%; -14,43).$$

Bevor mit einer hieraus gewonnenen Regressionsbeziehung Schätzwerte für ϕ' ermittelt werden, muß zunächst geklärt werden, ob diese Daten derselben Grundgesamtheit entstammen, aus der die bisherigen Informationen gewonnen wurden. Das kann durch statistische Tests auf Gleichheit der Varianzen und Mittelwerte geschehen, wie sie in den meisten statistischen Handbüchern beschrieben sind. Im vorliegenden Fall wird die Hypothese der Gleichheit auf dem 10% Signifikanzniveau weder für ϕ' noch für I_p abgelehnt.

Die erste Stichprobe mit 3 Werten für ϕ' und I_p wird deshalb mit den Ergebnissen der früheren Untersuchungen vereinigt:

$$\begin{array}{ll} n^* & = 24 & v^* & = 23 \\ \bar{\phi}'^* & = 20,2^\circ & \bar{I}_p^* & = 40,4\% \\ s_{\phi'}^* & = 2,80^\circ & s_{I_p}^* & = 5,43\% \\ s_{\phi', I_p}^* & = -13,4 & & \end{array}$$

Die Schätzungen für Korrelationskoeffizient und Regressionsgerade sind

$$r = \frac{-13,4}{2,8 \cdot 5,43} = -0,88 \quad b = \frac{-13,4}{5,43^2} = -0,454$$

und

$$\begin{aligned} \phi' &= -0,454 (I_p - 40,4) + 20,2 \\ \phi' &= 38,57 - 0,454 I_p \end{aligned}$$

Aus der zweiten Versuchsreihe ergeben sich die Schätzwerte für ϕ' mit

$$\phi_j' = 38,57 - 0,454 I_{pj}$$

$$n_i = \frac{1}{(I_{P_i} - 40,4)^2 \cdot 24} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5,43^2(24-1)}{}}$$

zu	I_{P_i} (%)	33,4	37,0	39,2	41,9	47,8
	ϕ' (°)	23,41	21,77	20,77	19,55	16,87
	n_i	0,37	0,71	0,95	0,93	0,34

und mit den Hilfsgrößen

$$\sum_{i=1}^5 n_i = 3,30 \quad \sum_{i=1}^5 n_i x_i = 67,77 \quad \sum_{i=1}^5 n_i x_i^2 = 1401,3$$

wird

$$n = 3,3$$

$$x = \frac{67,77}{3,3} = 20,54^\circ$$

$$s^2 = \frac{1}{3,3-1} (1401,3 - \frac{1}{3,3} 67,77^2) + \frac{24-1}{24-2} (1-0,88^2) \frac{2,8^2}{24} \cdot \frac{5}{3,3}$$

$$s = 2,05$$

$$v = 2,3 \cdot 0,88^2 + 23(1-0,88^2) = 1,78 + 5,19$$

$$\text{geschätzt: } v = 1,78$$

Die a posteriori Parameter werden zu

$$n'' = 3,3 + 10,27 = 13,57$$

$$v'' = 1,78 + 18,64 + 1 = 21,42$$

$$\bar{x}'' = \frac{3,3 \cdot 20,54 + 10,27 \cdot 19,34}{3,3 + 10,27} = 19,63^\circ$$

$$s''^2 = \frac{1}{21,24} (1,78 \cdot 2,04^2 + 18,64 \cdot 2,10^2 + \frac{3,3 \cdot 10,27 (20,54 - 19,34)^2}{3,3 + 10,27})$$

$$s'' = 2,09$$

Mit diesen Parametern soll das 90% Konfidenzintervall des Mittelwertes geschätzt werden.

Der Fraktilwert der t-Verteilung wird bei $\alpha = 90\%$ und $\nu = 21,24$ zu

$$t_{21,24;(1-0,9)/2} = \pm 1,719$$

und damit

$$x_p = 19,63 + 1,719 \frac{2,09}{\sqrt{13,57}} = 20,61^\circ$$

$$x_n = 19,63 - 1,719 \frac{2,09}{\sqrt{13,57}} = 18,67^\circ$$

d.h.

$$18,67^\circ \leq \mu_{\phi_i} \leq 20,61^\circ.$$

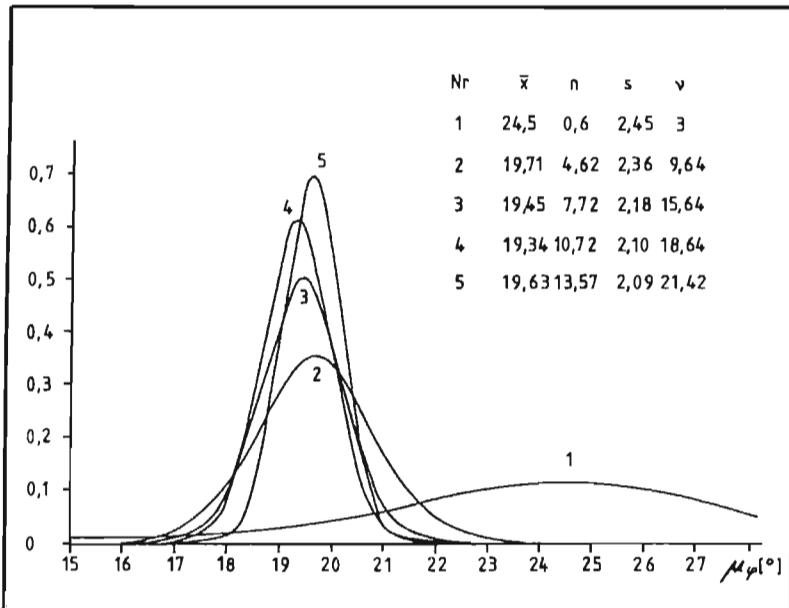


Bild 7 Wahrscheinlichkeitsdichten der Mittelwerte bei wachsender Information

Anhang

I. Bayes-Schätzung mit unterschiedlichem Informationsniveau für Mittelwert und Standardabweichung

Bei den hier verwendeten Schätzungen wurden stets natürlich-konjugierte a priori Verteilungen vorausgesetzt. Für normalverteilte Grundgesamtheiten sind dann Mittelwert und Standardabweichung $N\chi^{-1}$ verteilt.

1. Bayes-Schätzung aus einer gemeinsamen Stichprobe.

Aus einer Stichprobe wird zunächst die Standardabweichung s mit der zugehörigen Anzahl der Freiheitsgrade ν geschätzt, anschließend unter der Bedingung s und ν der Mittelwert \bar{x} und seine Varianz $\text{Var}(\bar{x})$.

Der Stichprobenumfang wird unter der Bedingung ermittelt, daß s der wahre Wert für die Standardabweichung ist, d.h. der Mittelwert μ ist um seinen Schätzwert normalverteilt:

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{s^2}{n} .$$

Die Likelihood-Funktion ist

$$l(\mu, \sigma | \bar{x}, u, s, \nu) = l(\mu | \sigma, \bar{x}, u) \cdot l(\sigma | s, \nu)$$

$$l(\mu | \sigma, \bar{x}, u) \propto \sigma^{-1} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\mu - \bar{x})^2 \right\}$$

$$l(\sigma | s, \nu) \propto \sigma^{-\nu} \exp \left\{ -\frac{\nu s^2}{2\sigma^2} \right\}$$

damit wird

$$l(\mu, \sigma | \bar{x}, n, s, \nu) = \sigma^{-(\nu+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (u(\mu - \bar{x})^2 + \nu s^2) \right\}$$

und die a posteriori Parameter der gemeinsamen Verteilung von (μ, σ) werden

$$n'' = n + n'$$

$$v'' = v + v' + 1$$

$$\bar{x}'' = \frac{1}{n''} (n\bar{x} + n'\bar{x}')$$

$$s''^2 = \frac{1}{v''} (vs^2 + v's'^2 + \frac{nn'(\bar{x}-\bar{x}')^2}{n+n'})$$

2. Bayes-Schätzung mit unvollständigen, unabhängigen Stichproben

Aus einer Stichprobe soll zunächst die Standardabweichung s mit der zugehörigen Anzahl der Freiheitsgrade v geschätzt werden.

Mit einer zweiten, von der ersten unabhängigen Stichprobe aus derselben Grundgesamtheit wird der Mittelwert \bar{x} und seine Varianz $\text{Var}(\bar{x})$ bzw. ein Konfidenzintervall geschätzt.

Nun sollen die beiden unvollständigen Stichproben vereinigt werden.

Der Stichprobenumfang n wird unter der Annahme berechnet, daß zu σ der Schätzwert s mit v Freiheitsgraden bekannt ist, d.h. der Mittelwert μ ist um seinen Schätzwert \bar{x} studentverteilt und man erhält

$$n = \frac{s^2}{\text{Var}(\bar{x})} \frac{v}{v-2} \quad \text{bzw.} \quad n = \frac{t_{v, (1\pm\alpha)/2}^2 \cdot s^2}{(x_o - x_u)^2} .$$

Die Likelihood-Funktion der ersten Stichprobe ist

$$l(\mu, \sigma | s, v) \propto \sigma^{-v} \exp \left\{ -\frac{vs^2}{2\sigma^2} \right\},$$

und die Likelihood der zweiten Stichprobe ist

$$\begin{aligned}
 l(\mu, \sigma | \bar{x}, \text{Var}(x)) &\propto \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (\mu - \bar{x})^2 \right) \right\} \\
 &= \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (n(\mu - \bar{x}) + n\text{Var}(\bar{x})) \right\} \\
 &= \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(n(\mu - \bar{x}) + \frac{v}{v-2} s^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

die gemeinsame Likelihood wird zu

$$l(\mu, \sigma | v, s, \bar{x}, n) \propto \sigma^{-(n-v)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (n(\bar{x} - \mu)^2 + v s^2 \frac{v-1}{v-2}) \right\}$$

Die Parameter der a posteriori Verteilung lauten damit

$$\begin{aligned}
 n'' &= n + n' \\
 v'' &= n + v + v' \\
 \bar{x}'' &= \frac{1}{n''} (n\bar{x} + n'\bar{x}') \\
 s''^2 &= \frac{1}{v''} \left(\frac{v-1}{v-2} v s^2 + v' s'^2 + \frac{nn'(\bar{x} - \bar{x}')^2}{n + n'} \right)
 \end{aligned}$$

II. Herleitung der Beziehungen zur Schätzung aus Regressionen

Aus der Annahme eines linearen Modells mit normalverteilter Reststreuung für eine zweidimensionale Stichprobe (x^*, y^*)

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon = y + \varepsilon,$$

worin die Zufallsvariable ε die Unsicherheit über die exakten Werte β_0 und β_1 sowie die unerklärte Varianz von \hat{y} abdecken soll, resultiert, daß die Zufallsvariable

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{y} - y}{s/\sqrt{\tilde{n}}} = t \quad \text{mit} \quad s^2 &= \frac{(n^* - 1)}{(n^* - 2)} (1 - r^2) \frac{s_y^{*2}}{n^*} \\
 \text{und} \quad \tilde{n} &= \left\{ 1 + \frac{(x - \bar{x}^*)^2 n^*}{s_x^{*2} (n^* - 1)} \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

einer studentischen t-Verteilung mit n^*-2 Freiheitsgraden folgt. Für einen weiteren gegebenen Wert x_i können so die Verteilungsparameter des daraus geschätzten Wertes \hat{y}_i angegeben werden mit

- dem Mittelwert $y_i = b(x_i - \bar{x}^*) + \bar{y}^*$
- dem "Stichprobenumfang" $\tilde{n}_i = \left\{ 1 + \frac{(x_i - \bar{x}^*)^2}{s_x^{*2}} \frac{n^*}{(n^*-1)} \right\}^{-1}$
- der Standardabweichung $s_a = \frac{n^*-1}{n^*-2} (1-r^2) \frac{s_y^{*2}}{n^*}$
- und den Freiheitsgraden $\nu = n^* - 2$

Werden nun für m verschiedene x_i Schätzungen vorgenommen, so können, unter der Voraussetzung, daß die x_i derselben Grundgesamtheit entstammen wie die x^* , die aus der Regressionsbeziehung bestimmten y_i als Einzelwerte unterschiedlicher Genauigkeit zur Berechnung der Mittelwert μ_y verwendet werden. Die Schätzung für μ_y aus den y_i mit dem kleinsten mittleren Fehler ist also

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i y_i \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i$$

Hierbei kann n als Zahl der Beobachtungen interpretiert werden.

Die Summe der quadratischen Abweichungen ergibt sich zu

$$\sum_{i=1}^m s_{\hat{y}_i}^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i y_i^2 - n \bar{y}^2 + \sum_{i=1}^m \tilde{n}_i \epsilon_i^2$$

Für ϵ_i^2 wird der Erwartungswert $\text{Var}(\epsilon_i) = s_a^2 / \tilde{n}_i$ eingesetzt:

$$\sum_{i=1}^m \tilde{n}_i \epsilon_i^2 = \frac{n^*-1}{n^*-2} (1-r^2) \frac{s_y^{*2}}{n^*} m$$

und für die mittlere quadratische Abweichung erhält man

$$s_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^m \tilde{n}_i y_i^2 - n\bar{y}^2 \right) + \frac{n^*-1}{n^*-2} (1-r^2) \frac{s_y^{*2}}{n^*} \frac{m}{n}$$

als Schätzwert der Varianz von \hat{y} .

Die Zahl der Freiheitsgrade kann aus der χ^2 -Verteilung der Stichprobenvarianz berechnet werden:

$$v \cdot \chi^2 = v_R \chi_R^2 + v_A \chi_A^2$$

Die Varianz von \hat{y} setzt sich zusammen aus der quadratischen Abweichung auf der Regressionsgeraden (Index R) und der quadratischen Abweichung von der Regression (Index A)

mit $s_R^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^m \tilde{n}_i y_i^2 - n\bar{y}^2 \right)$ folgt

$$\frac{s_R^2}{\sigma_{\hat{y}}^2} = \chi_R^2 \text{ mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Setzt man für s_R^2 den Schätzwert $r^2 s_{\hat{y}}^2$ ein, dann ergibt sich

$$(n-1)\chi_R^2 = (n-1)r^2\chi^2$$

und $\chi_A^2 = \frac{n^*-1}{n^*-2} (1-r^2) \frac{m}{n} \frac{s_{\hat{y}}^{*2}}{\sigma_y^2}$ mit $(n^*-2)\frac{n}{m}$ Freiheitsgraden

daraus $\frac{n}{m}(n^*-2)\chi_A^2 = (n^*-1)(1-r^2)\chi^2$

damit ist

$$v = (n-1)r^2 + (n^*-1)(1-r^2).$$

Literatur

1. AGTERBERG, F.P.: Autokorrelation Functions in Geology, Geostatics, Ed: D.F. Merriam, Plenum Press, 1970
2. ALONSO, E.E. und KRIZEK, R.J.: Stochastic formulation of soil properties. Proc. 2nd Int. Conf. on the Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen 1975, Bd. II, S. 9-32
3. BAECHER, G.B.: Optimal Estimations for Soil Properties. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 107, 1981, No. GT5, S. 649-653
4. FLOSS, R.: Erdbautechnische Voraussetzungen für standardisierte Straßenbefestigungen. Vorträge und Referate der Straßenbautagung Hamburg, 1968. Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen e.V., Bonn-Bad Godesberg: Kirschbaum Verlag 1969 (Straße und Autobahn 20, 1969, H. 2, S. 39-45)
5. FLOSS, R.: Organisation und Ausführung der Überwachung von Erdarbeiten. Straße und Autobahn 24, 1973, H. 9, S. 377-387
6. KAY, H.N. und KRIZEK, R.J.: Estimation of the mean for soil properties. Proc. 1st Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hongkong 1971, S. 279-286
7. LUMB, P.: Safety factors and the probability distribution of strength. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 7, 1979, No. 3, S. 225-242
8. LUMB, P.: The Variability of natural soils. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 3, 1966, No. 2, S. 74-97
9. LUMB, P.: Application of Statistics in Soil Mechanics. In: Soil Mechanics - New Horizons, Hrsg.: I.K. Lee, Newnes Butterworths, London 1974
10. LOPEZ CORRAL, A. und FONSECA GARCIA, J.M.: Advantages and Disadvantages of the different Routine Tests for Statistical quality control in earthworks. Proc. 4th Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Firenze, 1983, Bd. II, S. 1489-1500
11. MATSUO, M. und ASOKA, A.: Probability models of undrained strength of marine clay layer. Soils and Foundations, Vol. 17, 1977, No. 3, S. 53-68
12. MERKBLATT über die Probenahme für bodenphysikalische Versuche im Straßenbau. Hrsg.: Forschungsgesellschaft für das Straßenwesen e.V., Köln, 1972

13. PEINTINGER, B.: Streuung von Bodenkenngrößen im Münchner Tertiär. Diplomarbeit am Institut für Grundbau und Bodenmechanik, Technische Universität München, 1979
14. RACKWITZ, R. und PEINTINGER, B.: Ein wirklichkeitsnahes stochastisches Bodenmodell mit unsicheren Parametern und Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung von Böschungen. Bauingenieur 56, 1981, H. 6, S. 215-221
15. RACKWITZ, R.: Zur Statistik von Eignungs- und Zulassungsversuchen für Bauteile. Bauingenieur 56, 1981, S. 103-107
16. SACHS, L.: Angewandte Statistik. 4. Aufl., Springer Verlag, 1974
17. SCHULTZE, E.: Frequency Distributions and correlations of soil Properties. Proc. 1st Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hongkong, 1971, S. 371-387
18. SCHULTZE, E.: Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures. Proc. 2nd Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Aachen 1975, Vol. II, S. 457-494
19. SHERMAN, G.B.; WATKINS, R.O. and PRYSOCK, R.H.: A Statistical Analysis of Embankment Compaction. HRB, Highway Research Record 177, 1967, S. 157-185
20. v. SOOS, P.: Eigenschaften von Boden und Fels; ihre Ermittlung im Labor. In: Grundbautaschenbuch, 3. Aufl., Teil 1. Hrsg.: U. Smoltzcyk. Berlin-München-Düsseldorf: W. Ernst & Sohn, 1980, S. 59-116
21. STANGE, K.: Angewandte Statistik. 1. Teil. Eindimensionale Probleme. Springer Verlag, 1970
22. STANGE, K.: Angewandte Statistik. 2. Teil. Mehrdimensionale Probleme. Springer Verlag, 1971
23. VANMARCKE, E.H.: Probabilistic modelling of soil profiles. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 103, 1977, No. GT11, S. 1227-1246

