Klaudius Henke

Darstellende Geometrie

Skript zur Vorlesung für Studierende in den Bachelorstudiengängen
Bauingenieurwesen, Umweltingenieurwesen und Berufliche Bildung
(gekürzte Fassung für die Prüfungsvorbereitung)

Technische Universität München
Lehrstuhl für Holzbau und Baukonstruktion
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Winter

Stand: Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

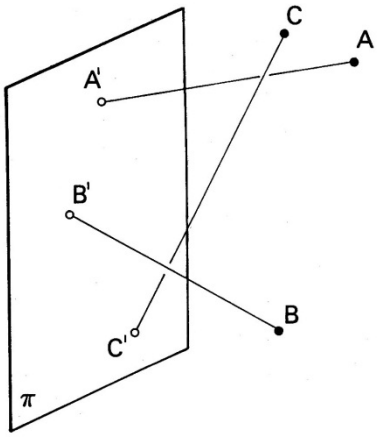
A Einleitung ... 1
1 Darstellende Geometrie ... 1
2 Abbildung ... 1
3 Projektion ... 1
3.1 Zentralprojektion ... 2
3.2 Parallelprojektion ... 2
4 Ebene Darstellungsarten ... 3
4.1 Perspektive ... 3
4.2 Axonometrie ... 4
4.3 Zweitafelprojektion ... 4
4.4 Kotierte Projektion ... 5
5 Projektions- und Darstellungsarten in der Übersicht ... 6
B Kotierte Projektion ... 7
1 Kotierte Projektion, Einleitung ... 7
2 Punkt in kotierter Projektion ... 7
2.1 Wahrer Abstand zweier Punkte ... 8
3 Gerade in kotierter Projektion ... 8
3.1 Wahrer Winkel zwischen Gerade und Tafel, wahre Länge von Strecken ... 9
3.2 Lage von Geraden zueinander ... 10
4 Ebene in kotierter Projektion ... 12
4.1 Lagemöglichkeiten von Ebenen ... 12
4.2 Ausgezeichnete Geraden einer Ebene: Höhenlinien und Falllinien ... 13
4.3 Wahrer Winkel zwischen Ebene und Tafel ... 14
4.4 Konstruktion der Ebenenspur aus drei Punkten ... 14
4.5 Wahre Größe und Form einer Fläche ... 15
4.6 Verschneidungsgerade zweier Ebenen ... 16
C Zweitafelprojektion ... 17
1 Zweitafelprojektion, Einleitung ... 17
2 Punkt in Zweitafelprojektion ... 17
2.1 Lageangabe von Punkten durch Koordinaten ... 18
2.2 Wahrer Abstand zweier Punkte ... 18
3 Gerade in Zweitafelprojektion ... 19
3.1 Wahrer Winkel zwischen Gerade und Tafel, wahre Länge von Strecken ... 19
3.2 Lage von Geraden zueinander ... 22
4 Ebene in Zweitafelprojektion ... 24
4.1 Allgemeine und besondere Lagemöglichkeiten von Ebenen ... 24
4.2 Gestützte oder gespannte Lage einer Ebene ... 26
4.3 Ausgezeichnete Gerade einer Ebene: Höhenlinien, Frontlinien und Falllinien ... 28
4.4 Wahrer Neigungswinkel einer Ebene ... 30
4.5 Ebenenspuren aus drei Punkten ... 31
4.6 Wahre Größe und Form einer Fläche ... 31
4.7 Lage eines Punktes zu einer Ebene ... 33
4.8 Wahrer Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene ... 34
4.9 Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene ... 35
4.10 Verschneidungsgerade zweier Ebenen ... 36
4.11 Wahrer Winkel zwischen zwei Ebenen ... 37
5 Gekrümmte Flächen in Zweitafelprojektion ... 38
5.1 Kegel und Zylinder, Definitionen ... 38
5.2 Arten von Kegelschnitten ... 39
5.3 Elliptischer Schnitt eines geraden Kreiskegels ... 41
D Axonometrie ... 43
1 Axonometrie, Einführung ... 43
2 Schräge Axonometrie ... 44
2.1 Kugel in der schrägen Axonometrie ... 44
2.2 Aufsichts- und Ansichtsaxonometrie ... 45
3 Orthogonale Axonometrie ... 46
3.1 Kugel in der Orthogonalen Axonometrie ... 46
3.2 Orthogonale Axonometrie in Dreitafelprojektion ... 47
3.3 Orthogonale Axonometrie im Einschneideverfahren ... 47
3.4 Projektion nach DIN 5 Teil 2 ... 49
3.5 Isometrische Projektion nach DIN 5 Teil 1 ... 50
E Perspektive ... 51
1 Perspektive, Einführung ... 51
1.1 Das Prinzip der Perspektive ... 51
1.2 Die Elemente der Zentralprojektion ... 51
1.3 Fluchtung im Perspektivischen Bild ... 52
1.4 Perspektive orthogonaler Körper in allgemeiner Lage ... 54
1.5 Eckperspektive ... 55
1.6 Zentralperspektive ... 56
2 Verfahren der Perspektivkonstruktion ... 56
2.1 Zentralperspektive aus zwei Rissen ... 57
2.2 Zentralperspektive aus dem Grundriss ... 58
2.3 Zentralperspektive mit Distanzpunkten ... 59
2.4 Eckperspektive aus zwei Rissen ... 61
2.5 Eckperspektive aus dem Grundriss ... 62
F Anhang ... 64

A Einleitung

1 Darstellende Geometrie

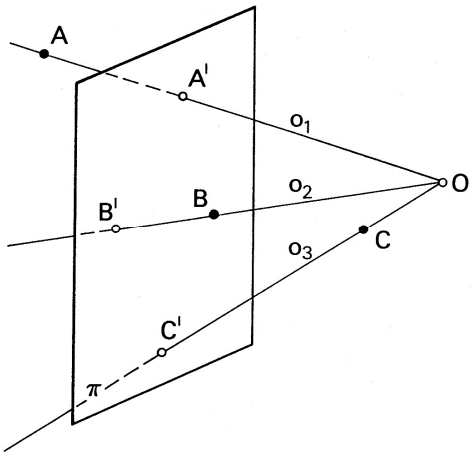
Die *Darstellende Geometrie* ist eine mathematische Disziplin, deren Aufgabe darin besteht, die geometrischen Fragestellungen zu beantworten, die bei der Abbildung von räumlichen Gegenständen auftreten. Die Abbildung erfolgt in der Regel auf eine Ebene.

2 Abbildung



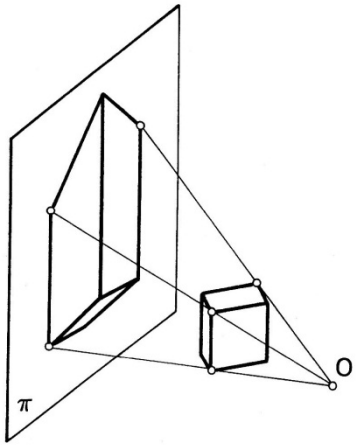
Die *Raumpunkte* A, B, C usw. werden *abgebildet*, indem sie den in der *Bildebene π* liegenden *Bildpunkten* A', B', C' usw. zugeordnet werden.

3 Projektion



Raumpunkte werden *projiziert*, indem sie durch *Projektionsstrahlen* o_1, o_2, o_3 usw. abgebildet werden. Die Projektionsstrahlen haben einen gemeinsamen Ursprung im *Projektionszentrum* O. Projektionen sind *geradentreu*, das heißt Geraden werden wieder als Geraden abgebildet.

3.1 Zentralprojektion

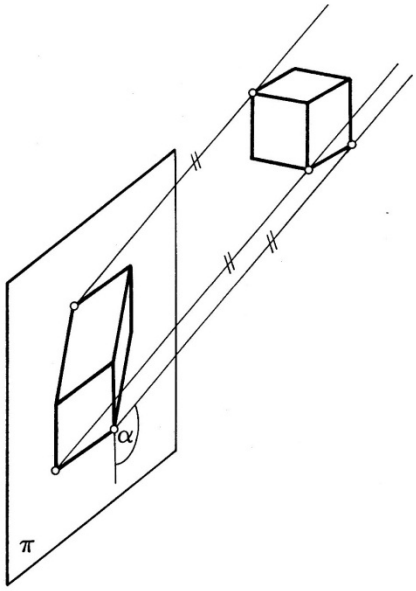


Jede Projektion ist Zentralprojektion (Projektionszentrum!). *Zentralprojektion* im engeren Sinne ist eine Projektion, bei der das Projektionszentrum im Endlichen liegt.

3.2 Parallelprojektion

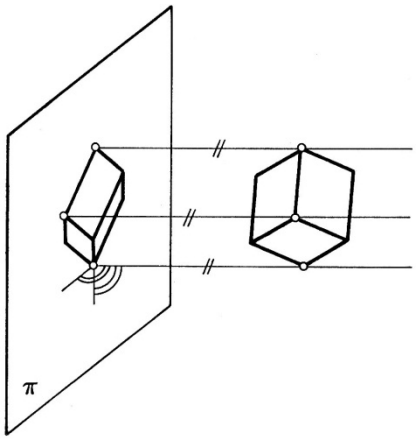
Liegt das Projektionszentrum im Unendlichen, so verlaufen die Projektionsstrahlen parallel zueinander: *Parallelprojektion*. Parallelprojektionen sind *parallentreu*, das heißt parallele Geraden werden wieder als parallele Geraden abgebildet.

Schiefe Parallelprojektion



Bei der *schiefen Parallelprojektion* schließen Projektionsstrahlen und Bildebene einen allgemeinen Winkel ein.

Orthogonale Parallelprojektion

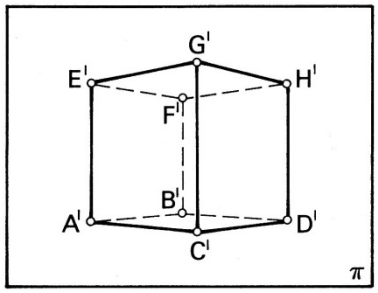


Bei der *orthogonalen Parallelprojektion* schließen Projektionsstrahlen und Bildebene einen rechten Winkel ein.

4 Ebene Darstellungsarten

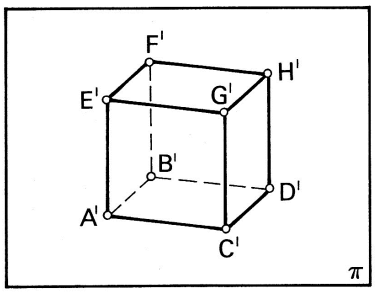
Bei den in der Praxis zur Anwendung kommenden ebenen Darstellungsarten handelt es sich teils um reine Projektionen (Perspektive und Axonometrie), teils um kombinierte (Zweitafelprojektion) und ergänzte (Axonometrie mit Achsenkreuz und kotierte Projektion) Projektionen.

4.1 Perspektive



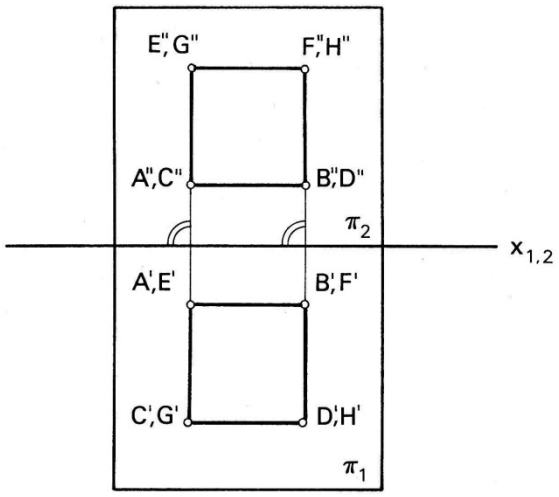
Perspektiven entstehen durch Zentralprojektion. Sie sind dadurch charakterisiert, dass die Bilder aller Geraden, die untereinander parallel sind, auf einen gemeinsamen Punkt fluchten. Nur solche Parallelenscharen, die parallel zur Bildebene verlaufen, erscheinen auch im Bild als Schar von Parallelen. Somit können bei der Darstellung orthogonaler Körper je nach Lage von Objekt und Bildebene zueinander drei Arten von Perspektiven unterschieden werden: 1. Perspektive mit drei Fluchtpunkten bei allgemeiner Lage zwischen Objekt und Bildebene, 2. Perspektive mit zwei Fluchtpunkten (*Eckperspektive*) bei Parallelität zwischen einer Kantenrichtung und Bildebene und 3. Perspektive mit einem Fluchtpunkt (*Zentralperspektive*) bei Parallelität zweier Kantenrichtungen zur Bildebene. Räumliche Zusammenhänge können in Perspektiven sehr anschaulich dargestellt werden.

4.2 Axonometrie



Unter diesem Begriff werden die durch schiefe oder orthogonale Parallelprojektion entstehenden Darstellungsarten zusammengefasst, die dazu geeignet sind, einen räumlichen Eindruck des Gegenstandes zu vermitteln. Gegenüber der Perspektive sind sie durch das Fehlen der Fluchtung (Parallelentreue der Parallelprojektion!) weniger anschaulich, jedoch aus dem gleichen Grund erheblich leichter zu zeichnen. Durch die Überlagerung des axonometrischen Bildes mit dem Bild eines Achsenkreuzes (von daher "*Axonometrie*") entsteht eine Darstellung, aus der eindeutig auf die Geometrie des Bildgegenstandes geschlossen werden kann.

4.3 Zweitafelprojektion



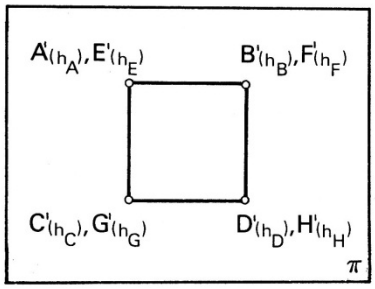
Sollen die Maße eines Gegenstandes unmittelbar dessen Darstellung entnommen werden können, so sind diejenigen Bilder am besten geeignet, die durch orthogonale Parallelprojektion entstehen. Die Anordnung der Projektionselemente wird zu diesem Zweck so gewählt, dass wesentliche Achsen und Ebenen des Gegenstandes parallel zur Bildebene ("*Tafel*") verlaufen, und somit alle zu diesen parallele Kanten und Flächen unverzerrt erscheinen. Zwei Dimensionen des Gegenstandes können in einem solchen sogenannten *Normalriss* eindeutig umkehrbar dargestellt werden.

Zur Darstellung der dritten Dimension dient bei der *Zweitafelprojektion* ein zweiter Normalriss, der mit dem ersten Riss einem Winkel von 90° einschließt. Um beide Rissebenen gleichzeitig in der Zeichenebene darstellen zu können, wird der zweite Riss um die als *Rissachse* $x_{1,2}$ bezeichnete Verschneidungsgerade der beiden Ebenen in den ersten Riss geklappt. Die erste Rissebene π_1, erstreckt sich in der Regel horizontal und wird als *Grundriss* bezeichnet. Die Bezeichnungen von im Grundriss abgebildeten Elementen des Gegenstandes erhalten ein Apostroph (z.B. A', B', C' usw.).

Die senkrecht auf der Grundrissebene stehende Ebene π_2 wird als *Aufriss* bezeichnet. Die Bezeichnungen von im Aufriss abgebildeten Elementen des Gegenstandes erhalten zwei Apostrophe (z.B. A", B", C" usw.). Grundriss- und Aufrissbild ein und desselben Punktes liegen auf einer *Ordner* genannten Linie, welche die Rissachse im rechten Winkel schneidet (*zugeordnete Normalrisse*).

Bei der sogenannten *Dreitafelprojektion* wird zur Steigerung der Anschaulichkeit oder für Hilfskonstruktionen zusätzlich auf eine dritte Bildebene π_3 projiziert, die mit π_1, und π_2 jeweils einen rechten Winkel einschließt. π_3 wird ebenfalls in die Zeichenebene geklappt, das in ihr liegende Bild heißt *Seitenriss*, Bezeichnungen werden dreifach apostrophiert.

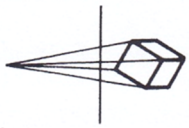
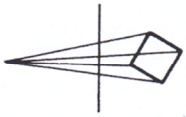
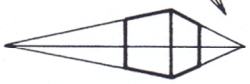
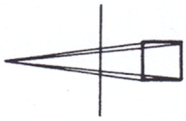
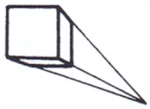
4.4 Kotierte Projektion



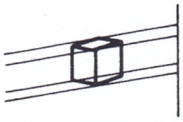
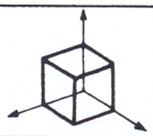
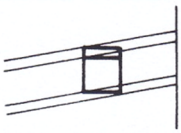
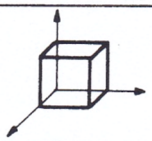
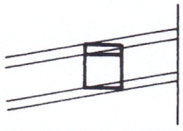
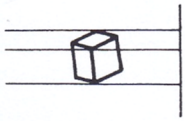
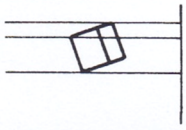
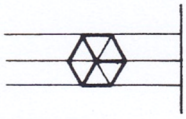
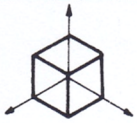
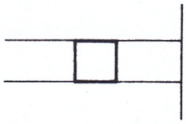
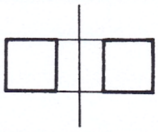
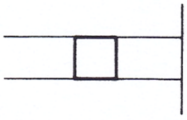
Ein räumlicher Gegenstand kann auch in einem Normalriss (*senkrechte Eintafelprojektion*) eindeutig umkehrbar erfasst werden, indem die dritte Dimension zahlenmäßig dargestellt wird (*kotierte Projektion*). In der Regel wird auf eine horizontale Tafel projiziert. Die Darstellung der vertikalen Dimension erfolgt durch in Klammern gestellte numerische Höhenangaben (*Höhenkoten* oder kurz *Koten*) für wesentliche Punkte des Gegenstandes. Als Bezugsebene für die Höhenangaben dient die Bildebene oder eine Ebene des Objektes.

5 Projektions- und Darstellungsarten in der Übersicht

Zentralprojektion

	allgemeine Lage		
	Eckperspektive		
	Zentralperspektive		

Parallelprojektion

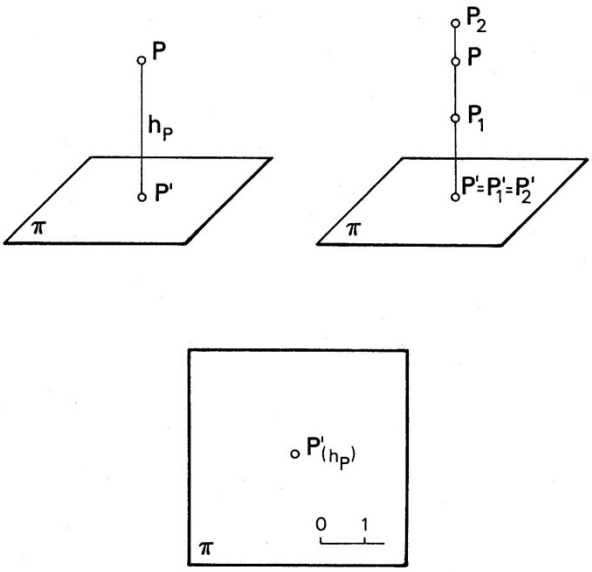
schief	Axonometrie	allgemeine Lage		
		Ansichtsaxonometrie		
		Aufsichtsaxonometrie		
orthogonal		allgemeine Lage		
		DIN 5 Teil 2		
		Isometrie		
	Normalrisse	Zweitafelprojektion		
		kotierte Projektion		

B Kotierte Projektion

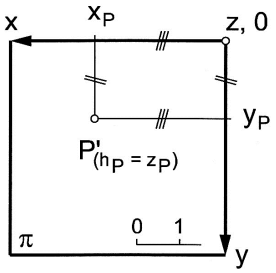
1 Kotierte Projektion, Einleitung

Die kotierte Projektion entsteht durch orthogonale Parallelprojektion auf eine in der Regel horizontale Bildebene. Während Breiten- und Tiefenmaße des Darstellungsgegenstandes dem Bild unmittelbar entnommen werden können, müssen die Informationen über die Höhen gesondert vermittelt werden. Dies geschieht, indem die Abbildungen wesentlicher Objektpunkte durch in Klammern gestellte Höhenkoten ergänzt werden. Als Bezugsebene für die Koten dient im Folgenden die Bildebene.

2 Punkt in kotierter Projektion



Der durch den Punkt P verlaufende Projektionsstrahl erzeugt auf der Bildebene π das Bild P'. Dem Bild kann die horizontale Lage des Punktes P entnommen werden, über die Höhenlage von P sagt die zeichnerische Darstellung nichts aus. P' könnte ebenso das Bild eines jeden auf dem Projektionsstrahl liegenden Punktes sein. Beispielsweise haben auch die höher und tiefer als P liegenden Punkte P_1, und P_2 ihr Bild in P'. Eindeutig festgelegt ist die räumliche Lage von P erst, wenn die zeichnerische Darstellung durch die zahlenmäßige Höhenangabe h_P ergänzt wird. Um die Einheit zwischen Zeichnung und Zahlen herzustellen, wird eine Einheit der gewählten Einheit zeichnerisch dargestellt.

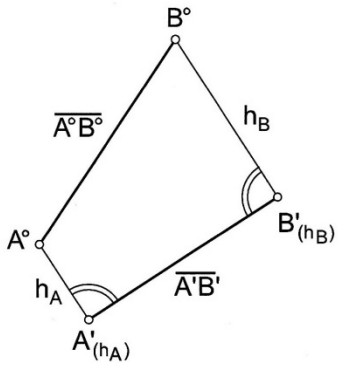


Die Lage des Punktes P in einem zuvor festgelegten kartesischen Koordinatensystem kann durch drei Koordinatenwerte (Reihenfolge x, y, z) eindeutig angegeben werden. Um einen so beschriebenen Punkt in kotierter Projektion darzustellen, werden Bildebene und Koordinatensystem

einander überlagert: Der Bildebene liegt in der Ebene, die durch die Achsen x und y aufgespannt wird. Die z-Achse steht im Koordinatenursprung 0 senkrecht auf der Bildebene.

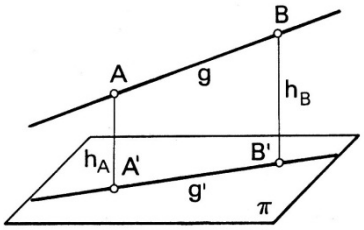
Es werden *Rechts-* und *Linkssysteme* unterschieden. Bei einem Rechtssystem (siehe Abbildung oben) liegen die positiven Hälften von x-Achse und y-Achse im Grundriss so zueinander, dass sie durch eine Drehung der x-Achse um 90° gegen den Uhrzeigersinn auf Deckung gebracht werden können.

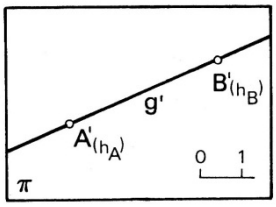
2.1 Wahrer Abstand zweier Punkte



Der Abstand zwischen den Punkten A und B ($h_A \neq h_B$) ist in der Projektion verkürzt abgebildet. Der wahre Abstand zwischen den Punkten A und B kann in einer auf A' und B' errichteten, senkrecht auf der Bildebene stehenden Hilfsebene gefunden werde. Diese Hilfsebene beinhaltet in der Höhe h_A senkrecht über seinem Bild A' den Punkt A und in der Höhe h_B senkrecht über seinem Bild B' den Punkt B. Die in der Hilfsebene liegenden Elemente können in der Bildebene sichtbar gemacht werden, indem die Hilfsebene um 90° in die Bildebene geklappt wird. Zwischen den Klappbildern A° und B° kann der wahre Abstand zwischen den Punkten A und B abgelesen werden.

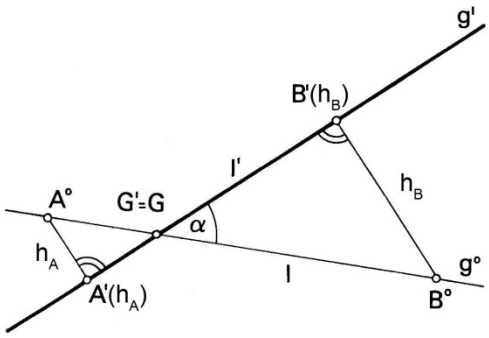
3 Gerade in kotierter Projektion





Aufgrund der Geradentreue von Projektionen ist das Bild einer Geraden g wiederum eine Gerade: g'. Um aus g' eindeutig auf die Lage von g schließen zu können, bedarf es weiterer Angaben, wie etwa der Kotierung der Bilder zweier auf g liegender Punkte: A'(h_A) und B'(h_B).

3.1 Wahrer Winkel zwischen Gerade und Tafel, wahre Länge von Strecken



Eine zur Bildebene geneigte Gerade erscheint verkürzt. Um die *wahre Länge* der Strecke zwischen zwei auf der Geraden liegenden Punkten im Bild sichtbar machen zu können, bedarf es der Projektion der Geraden auf eine zu ihr parallele Hilfsbildebene. Auf dieser *Hilfsebene* erscheint ein *Hilfsriss* der Geraden in wahrer Länge. Besonders handlich gestaltet sich die Konstruktion, wenn als Hilfsebene eine senkrecht stehende und die Gerade beinhaltende Ebene genommen wird. Dies hat überdies den Vorteil, dass gleichzeitig der kleinste Winkel (*wahrer Winkel*) zwischen Gerade und Tafel gefunden wird.

Gegeben sei die Gerade g mit zwei auf ihr liegenden Punkten A und B, dargestellt in kotierter Projektion. A habe die Höhe h_A, B habe die Höhe h_B, wobei h_A und h_B im Beispiel unterschiedliche Vorzeichen haben! Gesucht sei die wahre Länge l der Strecke zwischen A und B sowie der wahre Winkel α zwischen g und der horizontalen Bildtafel π.

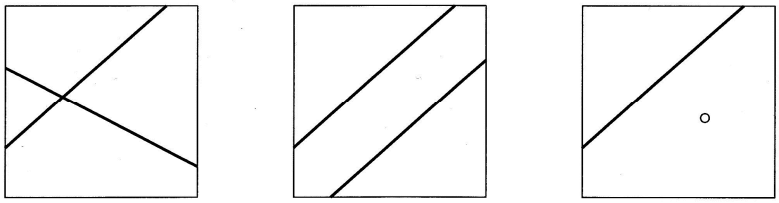
Auf dem Bild g' von g wird eine senkrecht stehende Hilfsebene errichtet. Die Gerade g ist Element dieser Hilfsebene. In dieser Ebene liegt außerdem der wahre Winkel α. Um die Hilfsebene in der Zeichenebene sichtbar zu machen, wird sie um 90° in die Bildebene *geklappt*. Als Klappachse dient g'. Die geklappten Punkte A° und B° erscheinen im Beispiel wegen der verschiedenen Vorzeichen auf verschiedenen Seiten von g'. In A' wird im rechten Winkel zu g' der absolute Betrag von h_A, in B' in entgegengesetzter Richtung der absolute Betrag von h_B abgetragen. In den Endpunkten dieser Strecken liegen A° und B°. Die Gerade durch A° und B° stellt g in wahrer Länge dar. Die Strecke zwischen A° und B° ist gleich der wahren Länge l. Der kleine Winkel zwischen g' und g° ist gleich dem wahren Winkel α.

Dem geklappten Hilfsriss kann auch leicht die Höhe eines jeden auf g liegenden Punktes entnommen werden. Der Punkt mit der Höhe 0 ist der *Spurpunkt* G von g. G wird in sich selbst projiziert: G' ist gleich G.

3.2 Lage von Geraden zueinander

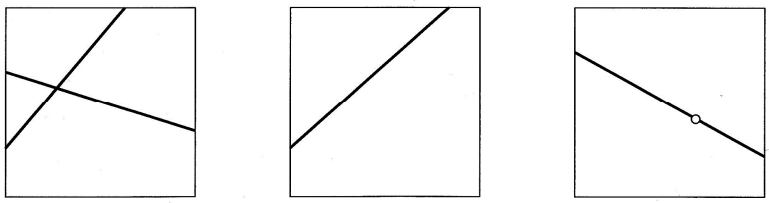
Zwei Geraden schneiden sich, oder sie schneiden sich nicht (*windschief*). Der Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen: Parallelität der Geraden.

Windschiefe Geraden



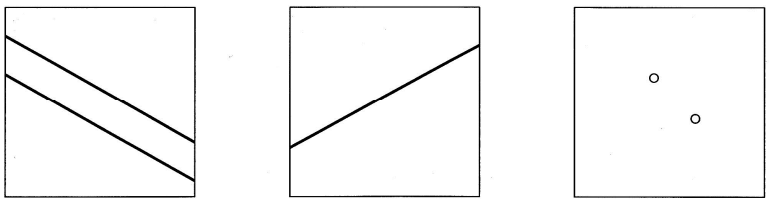
Zwei Geraden die sich nicht schneiden und die nicht parallel zueinander verlaufen, stehen windschief zueinander. Windschiefe Geraden erscheinen in der orthogonalen Parallelprojektion als zwei sich schneidende Geraden, als zwei parallele Geraden (beide Geraden liegen in parallelen, senkrecht auf der Bildebene stehenden Ebenen) oder als Gerade und Punkt (eine Gerade steht senkrecht auf der Bildebene).

Sich schneidende Geraden



Sich schneidende Geraden erscheinen in der orthogonalen Parallelprojektion als zwei sich schneidende Geraden, als eine Gerade (beide Geraden liegen in einer senkrecht auf der Bildebene stehenden Ebene) oder als Punkt auf einer Gerade (eine Gerade steht senkrecht auf der Bildebene).

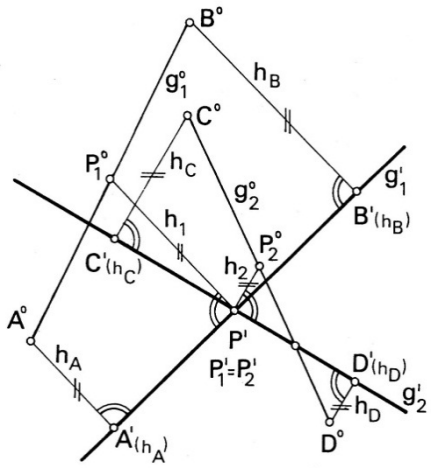
Parallele Geraden



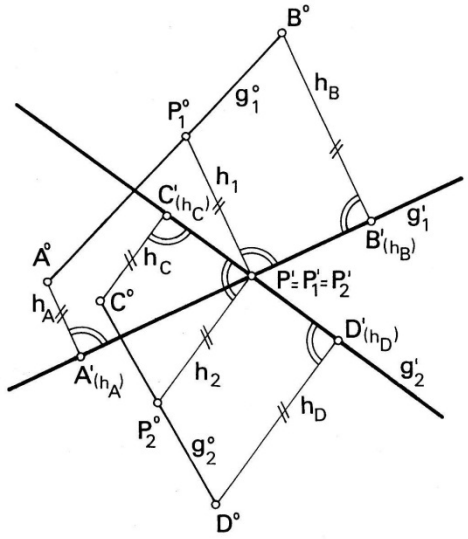
Parallele Geraden erscheinen in der orthogonalen Parallelprojektion als zwei parallele Geraden, als eine Gerade (beide Geraden liegen in einer senkrecht auf der Bildebene stehenden Ebene) oder als zwei Punkte (beide Geraden stehen senkrecht auf der Bildebene).

Windschief oder sich schneidend

Schneiden sich die Bilder zweier Geraden, so schneiden sich die Geraden in einem gemeinsamen Punkt P oder sie verlaufen windschief zueinander. Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, kann durch Klappen der Geraden jeweils um ihr Grundrissbild ermittelt werden.



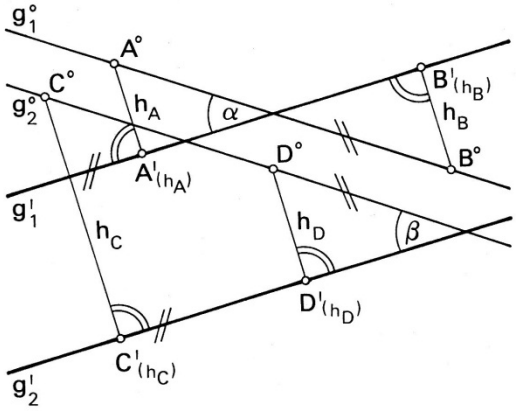
Verlaufen die Geraden windschief zueinander, so ist der Schnittpunkt P' von g_1' und g_2' kein Bild eines gemeinsamen Punktes von g_1 und g_2, sondern das gemeinsame Bild der beiden auf verschiedenen Höhen h_1 und h_2 liegender Geradenpunkte P_1 und P_2.



Schneiden sich die Geraden, so haben die über (bzw. unter) dem Schnittpunkt P' von g_1' und g_2' liegenden Geradenpunkte P_1 und P_2 die gleiche Höhe $h_1 = h_2$, P' ist also das Bild eines gemeinsamen Punktes $P = P_1 = P_2$ von g_1 und g_2.

Windschief oder parallel

Verlaufen die Bilder zweier Geraden parallel zueinander, so sind die Geraden selbst ebenfalls parallel oder sie verlaufen windschief zueinander.



Sind die Geradenbilder g_1' und g_2' parallel, so sind die Geraden g_1 und g_2 dann parallel, wenn beide Geraden die gleiche Neigung α = ß aufweisen. Das ist dann der Fall, wenn sie, jeweils zur gleichen Seite um ihr Bild in die Bildebene geklappt, parallele Klappbilder g_1° und g_2° haben. Andernfalls handelt es sich um ein Paar windschiefer Geraden.

4 Ebene in kotierter Projektion

4.1 Lagemöglichkeiten von Ebenen

Eine Ebene E schneidet die Bildebene *π* in der *Spurgeraden* s. Neben der *allgemeinen Lage* sind zwei besonderen Lagemöglichkeiten von Bedeutung: *Projizierende Ebene* und *Höhenebene*.

Allgemeine Lage

Ebene und Tafel schließen einen allgemeinen Winkel ein.

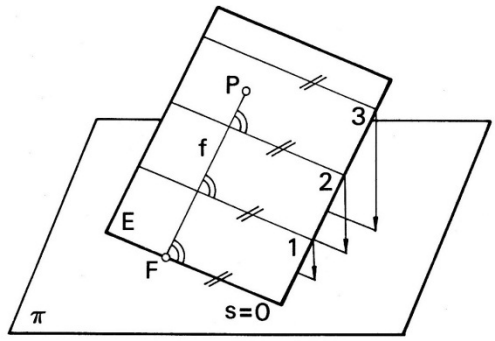
Projizierende Ebene

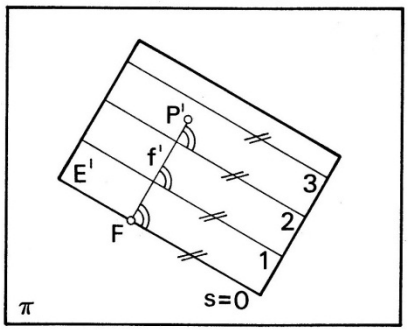
Die Ebene steht senkrecht auf der Tafel. Alle Punkte der Ebene werden auf eine Gerade E' gleich s projiziert.

Höhenebene

Die Ebene erstreckt sich parallel zur Tafel. Die Spur liegt im Unendlichen.

4.2 Ausgezeichnete Geraden einer Ebene: Höhenlinien und Falllinien





Außer den bereits eingeführten Spuren sind für Konstruktionen mit Ebenen die spurparallelen *Höhenlinien* und die spurnormalen *Falllinien* von besonderer Bedeutung.

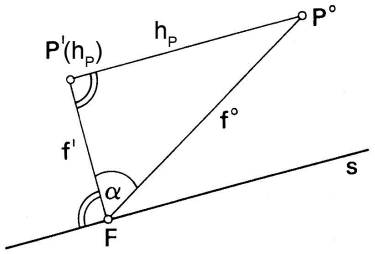
Höhenlinien einer Ebene

Eine Höhenlinie 1, 2, 3 usw. einer Ebene E ist der Ort aller Ebenenpunkte gleicher Höhe. Die Spur ist die Höhenlinie mit der Höhe 0. Alle anderen Höhenlinien verlaufen parallel zur Spur, ebenso ihre Bilder. Höhenlinien werden mit dem Zahlenwert ihrer Höhe bezeichnet. Die Bezeichnungen ihrer Bilder werden meist nicht mit Apostrophen versehen.

Falllinien einer Ebene

Die Falllinie f einer Ebene E von einem Punkt P ist die kürzeste Strecke von P zur Spur. Falllinien stehen rechtwinklig auf den Höhenlinien. Ihre Bilder stehen rechtwinklig auf denen der Höhenlinien. Ihre wahre Neigung entspricht dem Gefälle der Ebene.

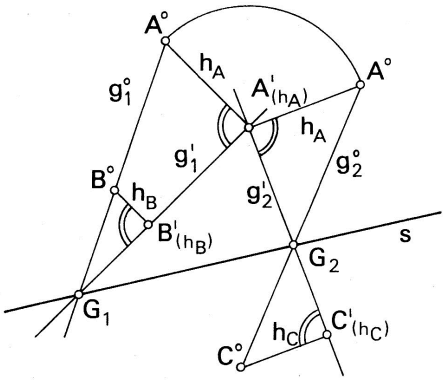
4.3 Wahrer Winkel zwischen Ebene und Tafel



Gegeben sei eine Ebene, dargestellt durch ihre Spur s und einen auf ihr liegenden Punkt P. Gesucht sei der wahre Winkel α zwischen Ebene und Tafel.

Zu diesem Zweck wird eine projizierende Hilfsebene errichtet, die P beinhaltet und gleichzeitig senkrecht auf der geneigten Ebene steht. In der Hilfsebene liegen auch die Falllinie f, deren Grundrissbild f', das Bild P' sowie der Falllinienspurpunkt F. f und f' bilden zusammen mit h_P ein rechtwinkliges Dreieck PP'F mit der Falllinie als Hypotenuse. Dieses Dreieck ist das *Stützdreieck* der Ebene im Punkt P. Es schließt in F zwischen f und f' den gesuchten Winkel α ein. Da das Stützdreieck in einer projizierenden Ebene liegt, erscheint es zunächst als Strecke P'F. Um es in der Zeichenebene sichtbar zu machen, wird es mit f' als Klappachse um 90° in die Bildebene geklappt: Von P' wird das Lot f' auf s gefällt. Im Lotfuß liegt F. In P' wird rechtwinklig zu f' die Höhe von P abgetragen und so der geklappte Punkt P° gefunden. Zwischen P° und F verläuft die geklappte Falllinie f°.

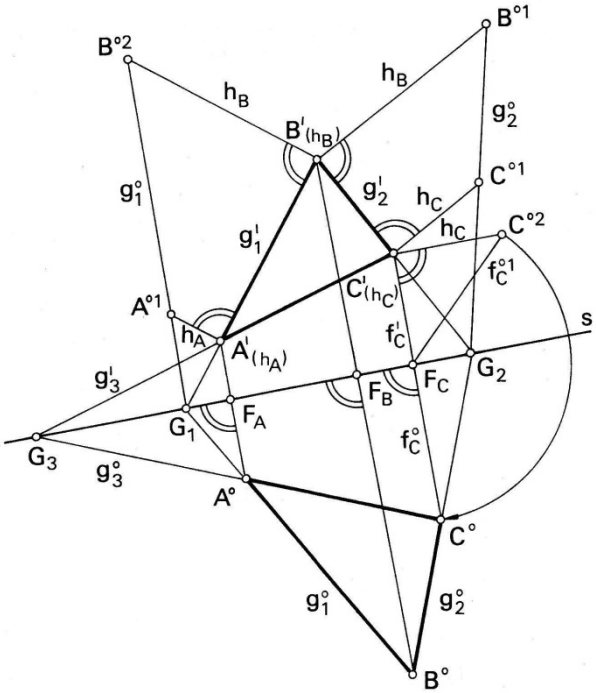
4.4 Konstruktion der Ebenenspur aus drei Punkten



Gegeben seien die Punkte A, B und C, dargestellt in kotierter Projektion. Gesucht sei die Spur s der durch die drei Punkte aufgespannten Ebene.

Durch beliebige zwei der drei Punkte (z.B. A und B) wird eine Gerade g_1, gelegt. Die Gerade ist Element der Ebene, deren Spur gesucht wird. Der Spurpunkt G_1, der Geraden ist ein Punkt der Ebenenspur. Mit Hilfe eines anderen Punktepaares (z.B. A und C) wird ein zweiter Punkt G_2 der Ebenenspur gefunden, welche somit festgelegt ist. Die Konstruktion in der Zeichenebene erfolgt wiederum in geklappten Hilfsrissen.

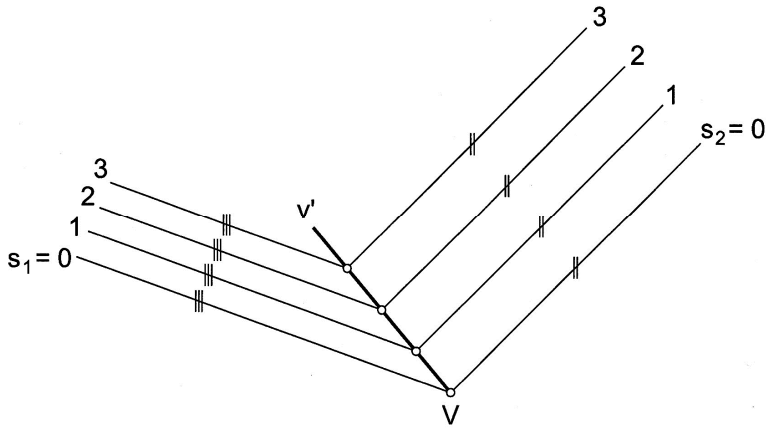
4.5 Wahre Größe und Form einer Fläche



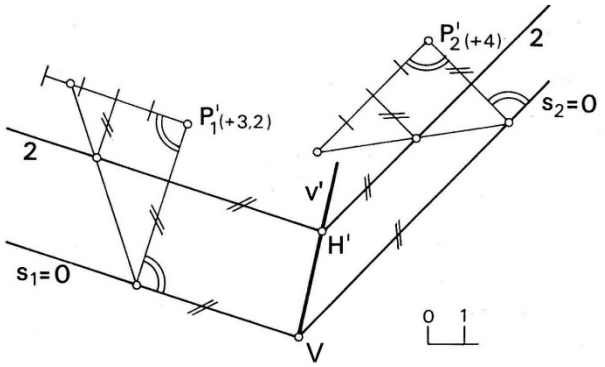
Gegeben sei die Fläche ABC, dargestellt in kotierter Projektion. Die Fläche hat eine allgemeine Lage zur Bildebene und erscheint somit verzerrt. Gesucht sei ein Bild der Fläche in wahrer Größe und Form (*wahre Fläche*). Zunächst wird aus den drei Eckpunkten A, B und C, wie oben gezeigt, die Spur s der die Fläche enthaltenden Ebene konstruiert. Um ihre Spur als Achse wird diese Ebene mitsamt der Fläche solange gedreht, bis sie in der Bildebene zu liegen kommt, wo die in ihr liegende Fläche unverzerrt abgebildet wird. Bei diesem Klappvorgang beschreiben die in der Ebene liegenden Punkte (also auch A, B und C) Kreisbahnen, deren jeweiliger Radius der Entfernung des einzelnen Punktes von der Spur, also der wahren Länge der zugehörigen Falllinie entspricht. Die Kreisbahnen liegen in projizierenden Ebenen, und erscheinen daher als senkrecht auf der Spur stehende Strecken $A'A°^2$, $B'B°^3$ und $C'C°^3$. Um eine solche Kreisbewegung in der Zeichenebene sichtbar zu machen, wird die die Kreisbahn enthaltende Ebene um 90° in die Bildebene geklappt, wie dies hier am Beispiel des Punktes C demonstriert sei. Als Klappachse dient die Projektion der Kreisbahn $C'C°^3$. In der geklappten Ebene erscheinen das Stützdreieck $C'C°^2F_c$ und die Kreisbahn $C°^2C°^3$. Der Mittelpunkt der Kreisbahn ist der Falllinienspurpunkt F_c, ihr Radius die wahre Länge der Falllinie $F_cC°^2$. Im Schnittpunkt der Kreisbahn mit ihrer Grundrissprojektion liegt der geklappte Punkt $C°^3$.

Auf die gleiche Weise könnten auch die übrigen Eckpunkte der geklappten Fläche konstruiert werden; ihr Bild lässt sich jedoch einfacher über das Klappen der die Seiten der Fläche enthaltenden Geraden vervollständigen: Vom geklappten Bild $g_3°$ der Geraden g_3 ist der Punkt $C°^3$ bereits bekannt. Ein zweiter Punkt lässt sich leicht finden, indem das Bild g_3' bis zur Spur s verlängert wird. Hier liegt der Spurpunkt G_3, der beim Klappvorgang um s erhalten bleibt. Im Schnittpunkt von $g_3°$ mit der Spurnormalen durch A' liegt der geklappte Punkt $A°^2$. Durch Klappen der Geraden g_2 wird im Schnittpunkt mit der Spurnormalen durch B' der geklappte Punkt $B°^3$ gefunden.

4.6 Verschneidungsgerade zweier Ebenen



Die Verschneidungsgeraden v zweier Ebenen in allgemeiner Lage verläuft durch die Schnittpunkte der jeweils gleichnamigen Höhenlinien der beiden Ebenen.



Gegeben seien zwei Ebenen in allgemeiner Lage, dargestellt jeweils durch die Spur s_1, = 0 bzw. s_2 = 0 und die kotierte Projektion P_1' bzw. P_2'eines Punktes P_1 bzw. P_2 der jeweiligen Ebene. Gesucht sei die Verschneidungsgerade v der beiden Ebenen.

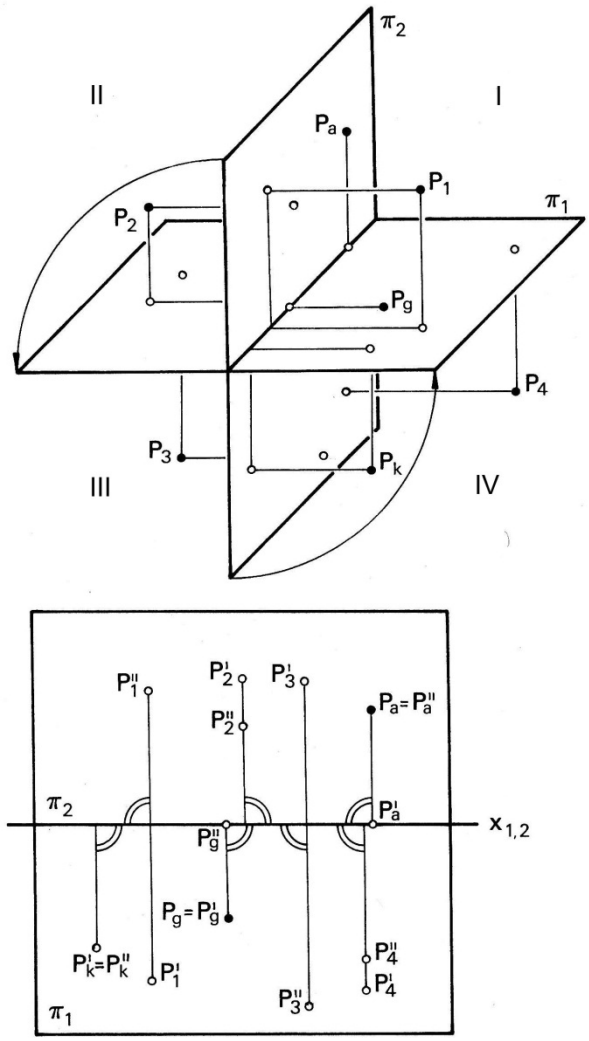
Der Schnittpunkt V der beiden Spuren s_1 und s_2 ist gemeinsamer Punkt beider Ebenen und damit Punkt der Verschneidungsgeraden v. Eine Höhenebene von beliebiger Höhe (z.B. 2) schneidet beide Ebenen in Höhenlinien gleichen Betrags. Im Schnittpunkt H der Höhenlinien liegt ein weiterer Punkt der Verschneidungsgeraden. Die Lage der Höhenlinienprojektionen wird in den geklappten Stützdreiecken von P_1 und P_2 ermittelt. Ausgehend von der Projektion des Punktes P_1' bzw. P_2' wird auf der Höhenkathete des Stützdreiecks jeweils die gleiche Zahl von Höheneinheiten (z.B. 2) abgegriffen. Durch die so gewonnenen Punkte wird jeweils eine Parallele zur Falllinienprojektion gezogen. Diese Parallele schneidet die Hypotenuse des Stützdreiecks in einem Punkt der Höhenlinienprojektion. Aufgrund seiner Parallelität zur Spur ist das Bild der Höhenlinie bereits durch einen Punkt in seiner Lage festgelegt. Im Schnittpunkt der Höhenlinienprojektionen liegt das Bild H' des zweiten Punktes der Verschneidungsgeraden.

C Zweitafelprojektion

1 Zweitafelprojektion, Einleitung

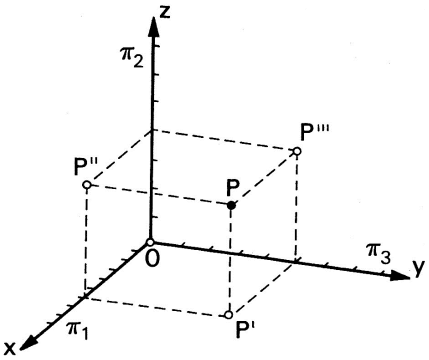
Die Zweitafelprojektion entsteht durch orthogonale Parallelprojektion auf zwei senkrecht aufeinander stehende Bildebenen. In der Regel wird mit einer horizontalen Bildebene π_1 und einer vertikalen Bildebene π_2 gearbeitet. Das Bild in der horizontalen Bildebene wird als Grundriss, das in der vertikalen als Aufriss bezeichnet. Um beide Bilder gleichzeitig in der Zeichenebene darstellen zu können, wird die Aufrissebene um die Rissachse $x_{1,2}$ in die Grundrissebene geklappt. Die Bezeichnungen von im Grundriss abgebildeten Elementen des Gegenstandes erhalten ein Apostroph, die von im Aufriss abgebildeten Elementen erhalten zwei Apostrophe.

2 Punkt in Zweitafelprojektion



Der Punkt P hat im Grundriss das Bild P', im Aufriss das Bild P". Grundriss- und Aufrissbild liegen auf einem Ordner. Ordner schneiden die Rissachse im rechten Winkel. Je nach räumlicher Lage des Punktes liegen seine Bilder auf verschiedenen Seiten der Rissachse, auf der gleichen Seite der Rissachse oder auf der Rissachse. Bei allen Punkten P_k, die im II. oder IV. Quadranten liegen und deren Abstand zu Grundriss- und Aufrissebene gleich groß ist, fallen Grund- und Aufrissbild zusammen. Die Gesamtheit aller Punkte für die dies gilt bilden die Koinzidenzebene E_k.

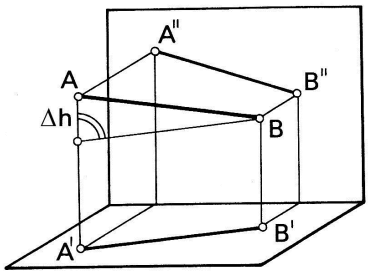
2.1 Lageangabe von Punkten durch Koordinaten

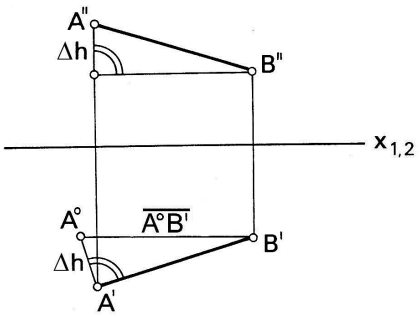


Die räumliche Lage von Punkten in einem zuvor festgelegten kartesischen Koordinatensystem kann durch drei Koordinatenwerte (Reihenfolge x, y, z) eindeutig angegeben werden. Um einen so beschriebenen Punkt in zugeordneten Normalrissen darzustellen, werden die Projektionsebenen und das Koordinatensystem einander überlagert: Der Grundriss liegt in der Ebene, die durch die Achsen x und y aufgespannt wird. Der Aufriss liegt in der Ebene, die durch die Achsen x und z aufgespannt wird. Der Seitenriss (falls vorhanden) liegt in der Ebene, die durch die Achsen z und y aufgespannt wird. Die Rissachsen fallen mit den Koordinatenachsen zusammen, ihr Schnittpunkt mit dem Koordinatenursprung 0. Durch die drei Koordinatenwerte ist nun auch die Lage der Punktbilder in den Rissen festgelegt.

Es werden *Rechts-* und *Linkssysteme* unterschieden. Bei einem Rechtssystem (siehe Abbildung oben) liegen die positiven Hälften von x-Achse und y-Achse im Grundriss so zueinander, dass sie durch eine Drehung der x-Achse um 90° gegen den Uhrzeigersinn auf Deckung gebracht werden können. Im Folgenden werden ausschließlich Rechtssysteme dargestellt.

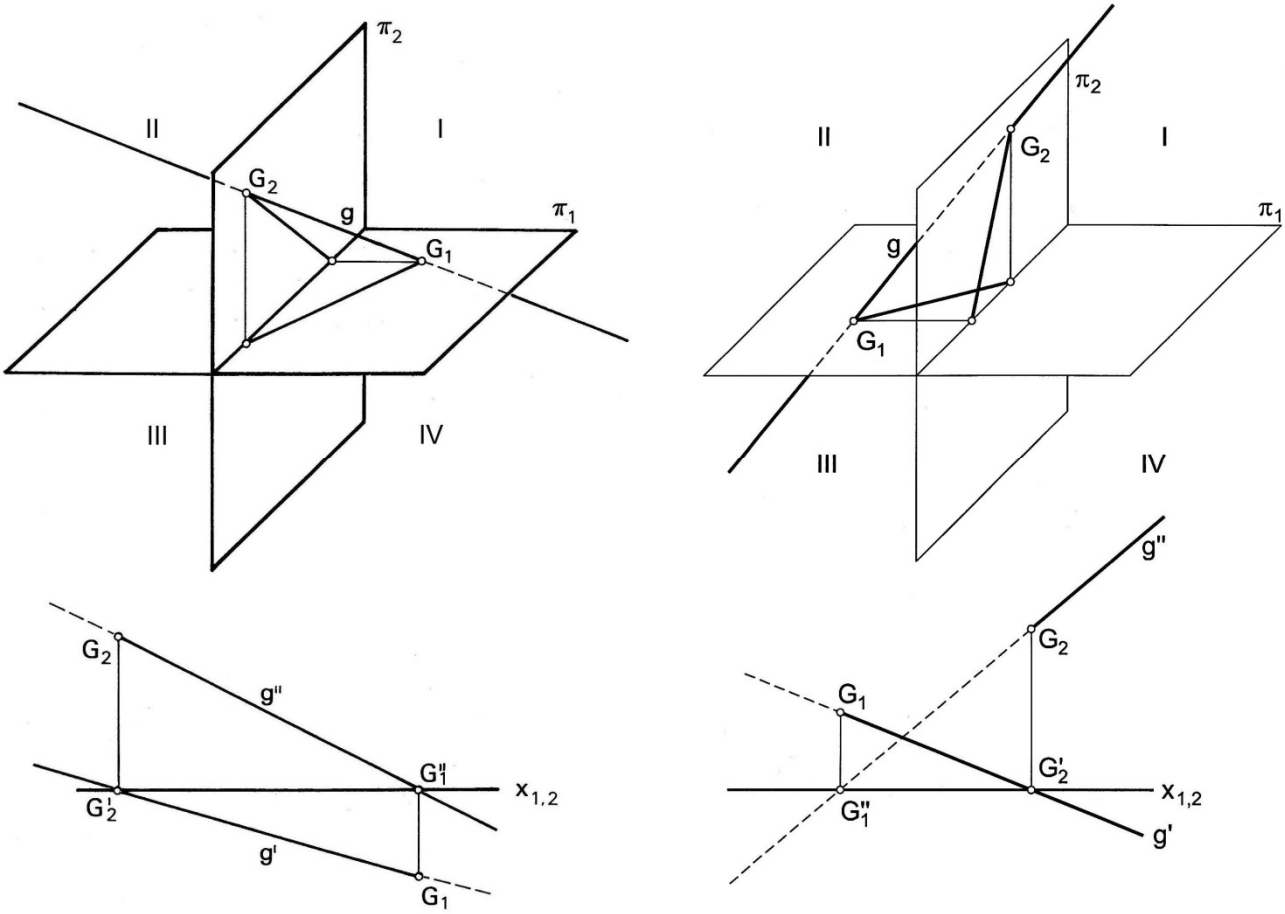
2.2 Wahrer Abstand zweier Punkte





Die Verbindungslinie zwischen den Punkten A und B steigt, wie aus dem Aufriss ersichtlich, vom Punkt B zum Punkt A um den Differenzbetrag Δh an. Aus diesem Grund ist die Strecke AB im Grundriss verkürzt abgebildet (A'B' < AB). Der wahre Abstand der Punkte AB ist gleich der Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhendifferenz Δh und der Grundrissprojektion A'B' als Katheten.

3 Gerade in Zweitafelprojektion

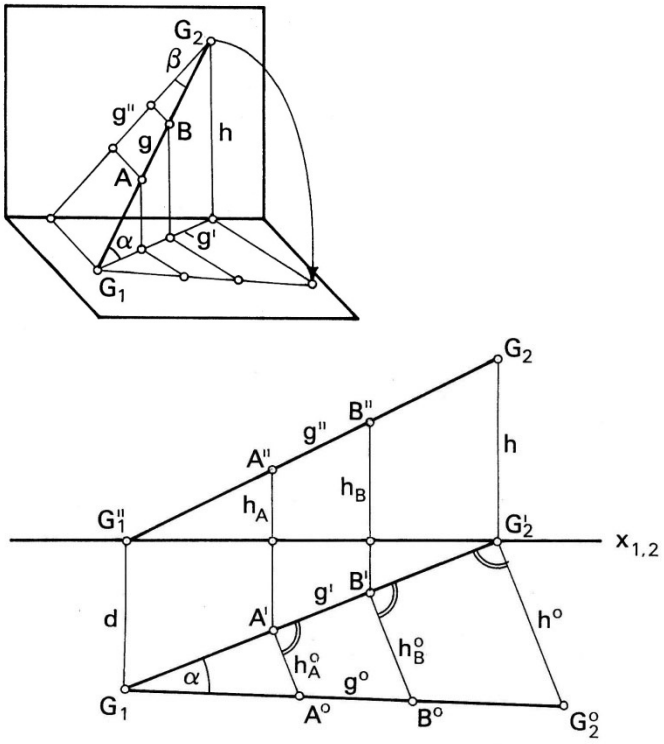


Die Gerade g durchstößt die Bildtafeln in den Punkten G_1 und G_2. Diese Punkte werden *Spurpunkte* genannt. Das Aufrissbild von G_1 liegt im Schnittpunkt des Aufrissbildes von g mit der Rissachse. Das Grundrissbild von G_2 liegt im Schnittpunkt des Grundrissbildes von g mit der Rissachse. Im Bild links ist eine Gerade dargestellt, die den II., I. und IV. Quadranten durchläuft. Im Bild rechts eine solche, die sich über I., II. und III. Quadranten erstreckt.

3.1 Wahrer Winkel zwischen Gerade und Tafel, wahre Länge von Strecken

Eine Strecke auf einer Geraden in allgemeiner Lage zur Bildebene wird verkürzt abgebildet. Der wahre Winkel zwischen der Geraden und den Bildebenen wird ebenfalls verzerrt wiedergegeben. Um Strecke und Winkel unverzerrt darzustellen, können die folgenden *Klapp-* und *Drehkonstruktionen* angewendet werden. Beide hier gezeigten Beispiele arbeiten mit einer senkrecht stehenden Hilfsebene, die die Gerade g enthält. In ihr liegt das rechtwinklige Dreieck, welches aus der Geraden g, ihrer Grundrissprojektion g' und der Senkrechten h gebildet wird. Dieses Dreieck enthält zwischen g und g' den gesuchten wahren *Neigungswinkel α* und, mit der Geraden g, auch alle wahren Längen von Strecken auf g.

Klappen in die Grundrissebene



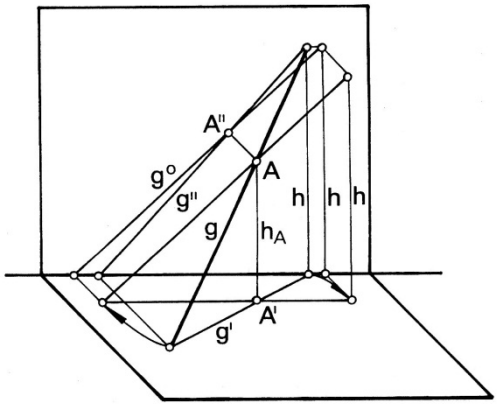
Das rechtwinklige Dreieck aus g, g' und h kann in der Zeichenebene dargestellt werden, wenn es mit g' als Achse um 90° in die Grundrissebene geklappt wird.

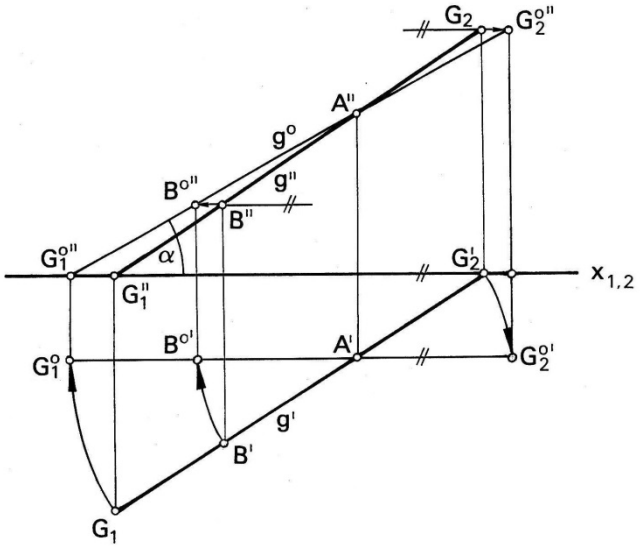
Zeichnerisch heißt das: Die Höhe h des Spurpunktes G_2 über der Grundrissebene, die dem Aufriss entnommen werden kann, wird in G_2' im rechten Winkel auf g' errichtet. Die Verbindungsgerade g° zwischen G_2° und G_1 ist ein unverzerrtes Bild der Geraden g. g° und g' schließen den gesuchten wahren Winkel ein.

Soll allein die wahre Länge von AB ermittelt werden, so kann mit Hilfe der Höhen von A und B (h_A und h_B) das Trapez A'B'B°A° konstruiert werden.

Der wahre Winkel zwischen der Geraden g und der Aufrissebene (*wahrer Richtungswinkel ß*) wird durch Klappen in die Aufrissebene mit g" als Klappachse gefunden.

Paralleldrehen zur Aufrissebene





Das rechtwinklige Dreieck aus g, g' und h erscheint unverkürzt in der Aufrisstafel, wenn es um eine beliebige senkrechte Achse solange gedreht wird, bis es parallel zur Aufrissebene liegt. Zweckmäßigerweise wird eine in der Hilfsebene liegende Senkrechte als Drehachse herangezogen, also z.B. die Senkrechte h_A durch den Punkt A.

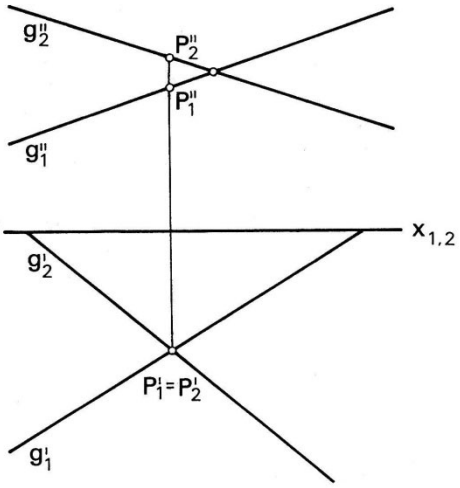
Durch A' wird eine Parallele zur Rissachse gelegt. Mit Hilfe von Zirkelschlägen werden die Strecken $A'G_1$ und $A'G_2'$ auf diese Parallele übertragen und die Endpunkte in den Aufriss projiziert. Die Gerade durch $G_1°''$, A'' und $G_2°''$ ist das unverzerrte Bild der Geraden g. Auf ihr liegende Strecken werden in wahrer Länge abgebildet. g°'' und die Rissachse x schließen den wahren Neigungswinkel α ein.

Der wahre Richtungswinkel ß wird durch Drehen um eine senkrecht zur Aufrissebene stehende Achse ermittelt.

3.2 Lage von Geraden zueinander

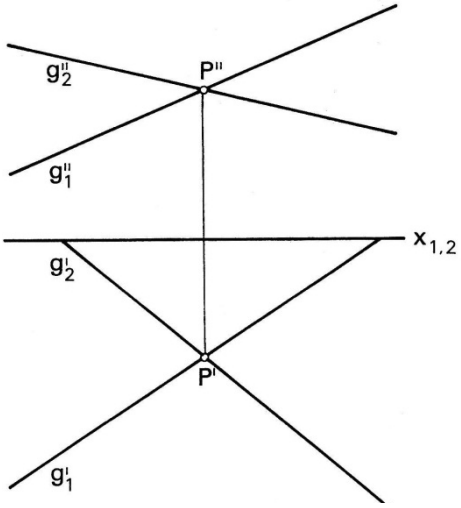
Zwei Geraden schneiden sich, oder sie schneiden sich nicht (*windschief*). Der Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen: Parallelität der Geraden.

Windschiefe Geraden



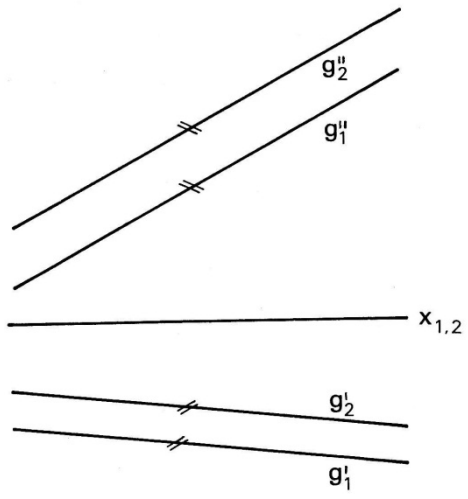
Zwei Geraden, die sich nicht schneiden und die nicht parallel zueinander verlaufen, stehen windschief zueinander. Die Schnittpunkte der Grund- und Aufrissbilder sind keine Bilder eines wahren Schnittpunktes der Geraden im Raum: Der Schnittpunkt von g_1' und g_2' ist kein Bild eines gemeinsamen Punktes von g_1 und g_2, sondern das gemeinsame Grundrissbild der beiden in verschiedener Höhe liegenden Punkte P_1 und P_2.

Sich schneidende Geraden



Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte der projizierten Geraden in Grund- und Aufriss auf einem Ordner liegen.

Parallele Geraden



Wegen der Parallelentreue sind alle durch Parallelprojektion erzeugten Bilder paralleler Geraden ebenfalls parallel. Also erscheint in der Zweitafelprojektion ein paralleles Geradenpaar in beiden Rissen als Paar paralleler Geraden. Nicht parallel hingegen sind Geraden, die nur in einem Riss parallel erscheinen.

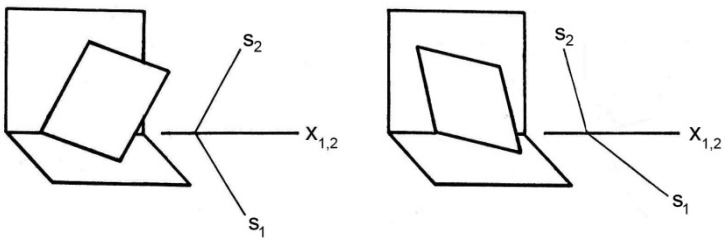
Ausnahme: Liegen beide Geraden in Ebenen, die sowohl zur Grundriss- als auch zur Aufrissebene senkrecht stehen, so erzeugen auch windschiefe Geraden in beiden Rissen parallele Bilder.

4 Ebene in Zweitafelprojektion

4.1 Allgemeine und besondere Lagemöglichkeiten von Ebenen

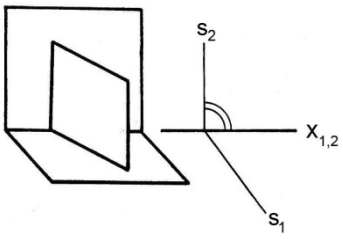
Eine Ebene E schneidet die Grundrissebene in der Geraden s_1, die Aufrissebene in der Geraden s_2. Diese Geraden werden Spurgeraden oder kurz Spuren genannt. Die Spuren treffen sich in einem Punkt auf der Rissachse.

Allgemeine Lage



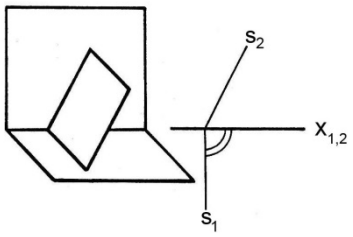
Beide Spurgeraden ebenso wie ihr gemeinsamer Punkt auf der Rissachse liegen im Endlichen. Die Spuren schließen mit der Rissachse schiefe Winkel ein. Es wird zwischen gestützter (links) und gespannter Lage (rechts) unterschieden (siehe Kapitel 5.2).

Grundrissprojizierende Ebene



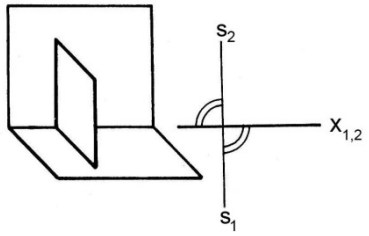
Die Ebene steht senkrecht auf der Grundrissebene. Die Aufrissspur schneidet die Rissachse im rechten Winkel. Eine solche Ebene wird auch als *erstprojizierend* bezeichnet.

Aufrissprojizierende Ebene



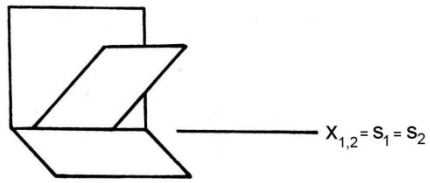
Die Ebene steht senkrecht auf der Aufrissebene. Die Grundrissspur schneidet die Rissachse im rechten Winkel. Eine solche Ebene wird auch als *zweitprojizierend* bezeichnet.

Doppeltprojizierende Ebene



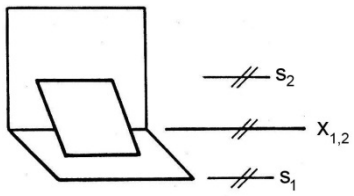
Eine Ebene, die sowohl grund- als auch aufrissprojizierend ist, heißt *doppelprojizierend*. Beide Spuren stehen senkrecht auf der Rissachse und erscheinen in der Zweitafelprojektion als durchlaufende Linie.

Die Rissachse beinhaltende Ebene



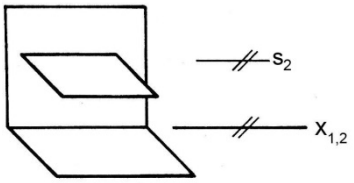
Schneidet die Ebene die Tafeln in der Rissachse, so fallen dort beide Spuren zusammen. Aus dem Bild der Zweitafelprojektion ist die Lage der Ebene nicht bestimmbar.

Parallel zur Rissachse verlaufende Ebene



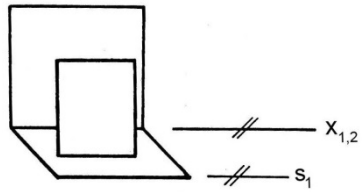
Beide Spuren verlaufen parallel zur Rissachse.

Höhenebene



Die Ebene verläuft parallel zur Grundrissebene. Die Grundrissspur liegt im Unendlichen. Die Aufrissspur verläuft parallel zur Rissachse.

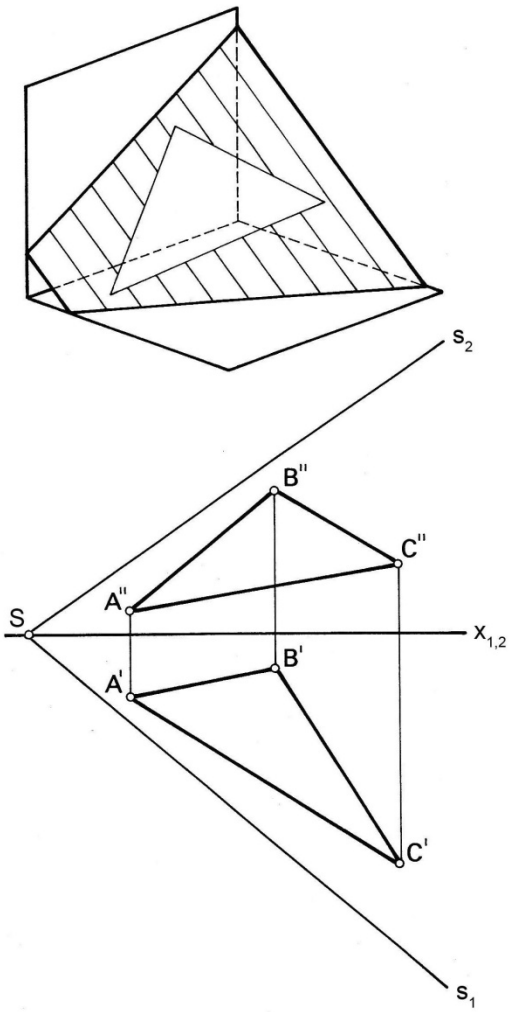
Frontebene



Die Ebene verläuft parallel zur Aufrissebene. Die Aufrissspur liegt im Unendlichen. Die Grundrissspur verläuft parallel zur Rissachse.

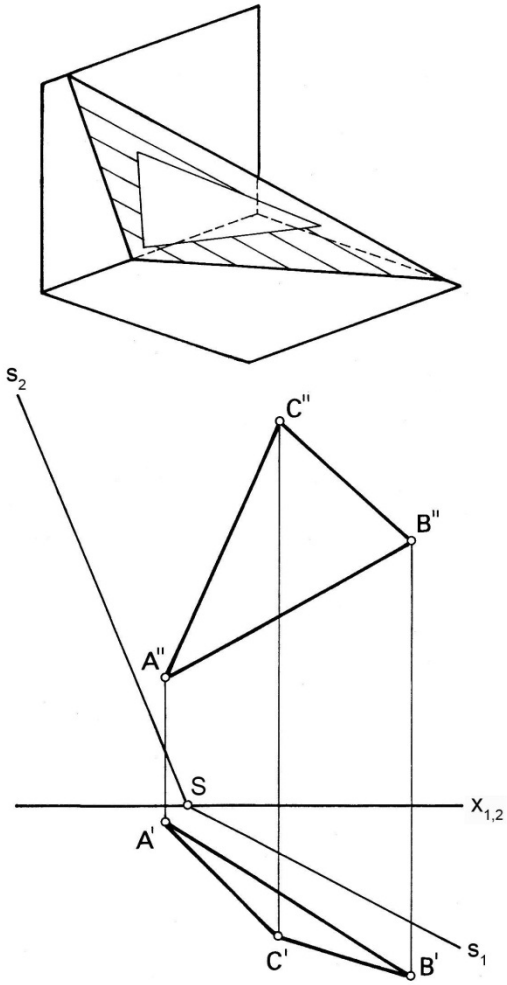
4.2 Gestützte oder gespannte Lage einer Ebene

Gestützte Lage



Eine Ebene hat eine gestützte Lage, wenn sie sich (wie etwa eine ans Haus gelehnte Leiter) gegen die Aufrissebene "lehnt". Die Ebenenspur im Seitenriss (hier nicht dargestellt) verläuft fallend von links oben nach rechts unten. Im Grund- und Aufriss ist die gleiche Seite der Ebene sichtbar. Die Eckpunkte einer in ihr liegenden Fläche erscheinen in den beiden Rissen mit gleichem Umlaufsinn: A', B', C und A'', B'', C''.

Gespannte Lage

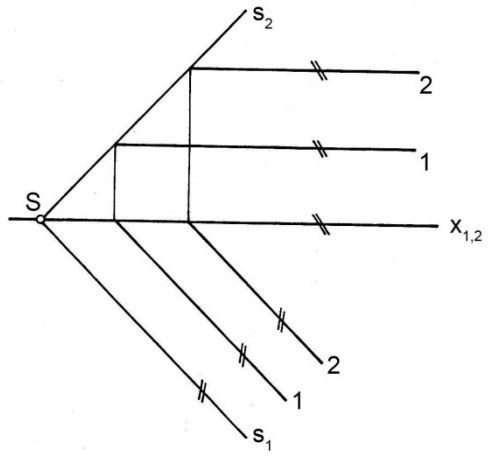


Ein Ebene hat eine gespannte Lage, wenn sie aus der Raumkante der beiden senkrecht aufeinander stehenden Bildebenen herausragt (bildlich gesprochen also gegen Umfallen *eingespannt* werden muss). Die Ebenenspur im Seitenriss (hier nicht dargestellt) verläuft steigend von links unten nach rechts oben. Im Grundriss ist die eine, im Aufriss die andere Seite der Ebene sichtbar. Die Eckpunkte einer in ihr liegenden Fläche erscheinen in den beiden Rissen mit gegenläufigem Umlaufsinn: A', B', C' und A", C", B".

4.3 Ausgezeichnete Gerade einer Ebene: Höhenlinien, Frontlinien und Falllinien

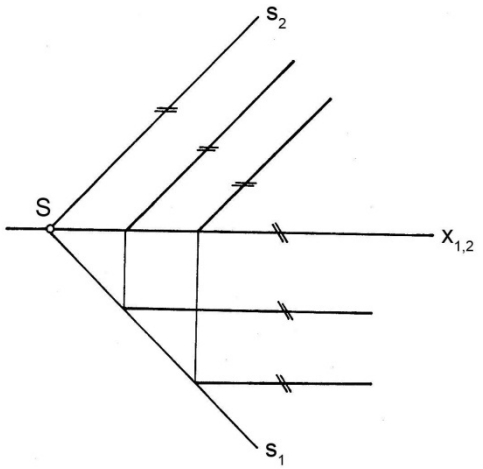
Außer den bereits eingeführten *Spuren* sind für Konstruktionen mit Ebenen die spurparallelen *Hauptlinien* und die spurnormalen *Falllinien* von besonderer Bedeutung. Bei den Hauptlinien werden die *Höhen-* und *Frontlinien* unterschieden.

Höhenlinien einer Ebene



Eine Höhenlinie einer Ebene ist der Ort aller Punkte gleicher Höhe. Die Grundrissspur ist die Höhenlinie mit der Höhe 0. Alle andren Höhenlinien verlaufen parallel zur Grundrissspur, ebenso ihre Bilder. Im Aufriss erscheinen die Höhenlinien als Horizontalen.

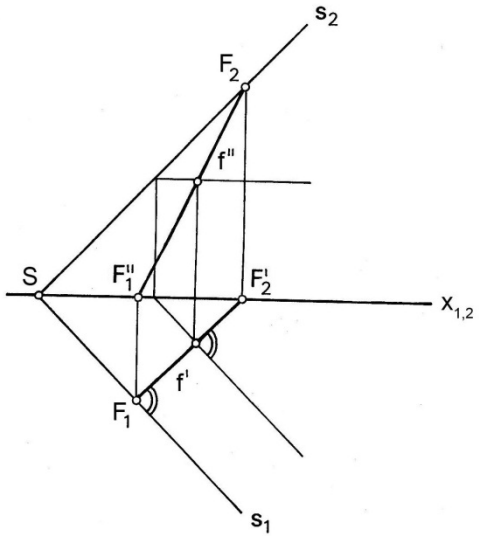
Frontlinien einer Ebene



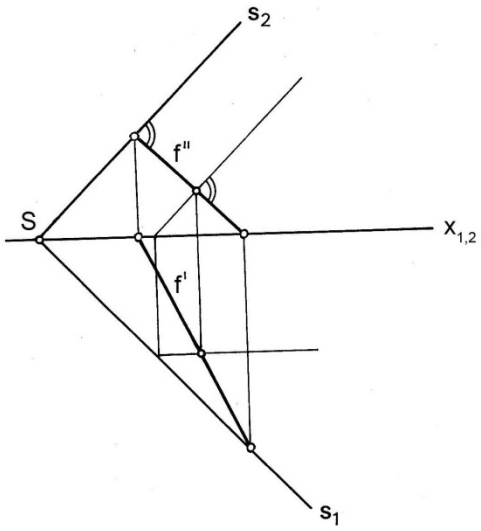
Eine Frontlinie einer Ebene ist der Ort aller Punkte mit gleichem Abstand zur Aufrissebene. Die Aufrissspur ist die Frontlinie mit der Distanz 0. Alle anderen Frontlinien verlaufen parallel zur Aufrissspur, ebenso ihre Bilder. Im Grundriss erscheinen die Frontlinien als Parallele zur Rissachse.

Falllinien einer Ebene

Falllinien einer Ebene sind senkrecht auf den Hauptlinien stehende Geraden.

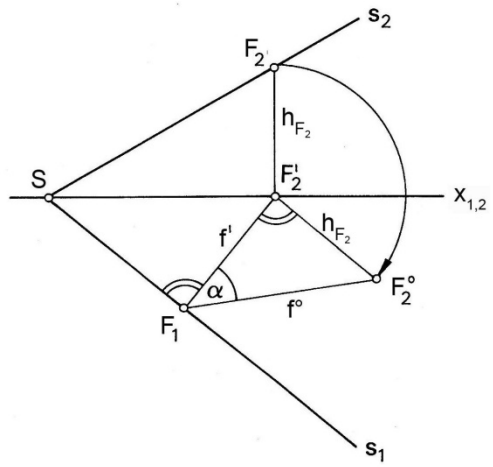


Falllinien erster Ordnung stehen rechtwinklig auf den Höhenlinien. Ihre Grundrissbilder stehen rechtwinklig auf denen der Höhenlinien. Ihre wahre Neigung entspricht dem Gefälle der Ebene.



Falllinien *zweiter Ordnung* stehen rechtwinklig auf den Frontlinien. Ihre Aufrissbilder stehen rechtwinklig auf denen der Frontlinien. Ihre wahre Richtung entspricht dem wahren Winkel zwischen Ebene und Aufrissebene.

4.4 Wahrer Neigungswinkel einer Ebene

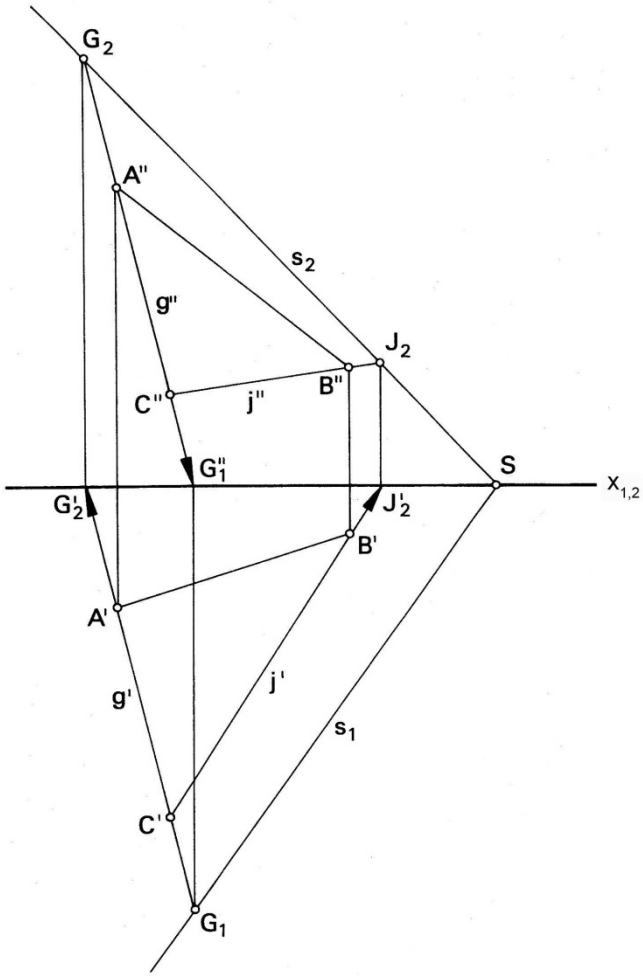


Gegeben sei eine Ebene E, dargestellt durch ihre Spuren s_1 und s_2 in Zweitafelprojektion. Gesucht sei der wahre Neigungswinkel α von E.

Eine erstprojizierende Hilfsebene, die senkrecht auf E steht, wird um ihre Grundrissspur in die Grundrissebene geklappt. Es erscheint ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten durch Grundriss- und Aufrissspur der Hilfsebene und dessen Hypotenuse durch die Verschneidungsgerade zwischen Hilfsebene und E gebildet werden. Grundrissspur und Klappbild der Verschneidungsgeraden schließen den wahren Winkel α ein.

Das rechtwinklige Dreieck ist das Stützdreieck eines Punktes F_2, der auf s_2 liegt. Die Grundrissspur f‘ der Hilfsebene steht senkrecht auf s_1, die Aufrissspur senkrecht zur Rissachse. Die Aufrissspur der Hilfsebene schneidet s_2 in F_2. Mit Hilfe der Höhe h_{F_2} von F_2 kann das geklappte Stützdreieck gezeichnet und α zwischen f‘ und f° abgelesen werden.

4.5 Ebenenspuren aus drei Punkten

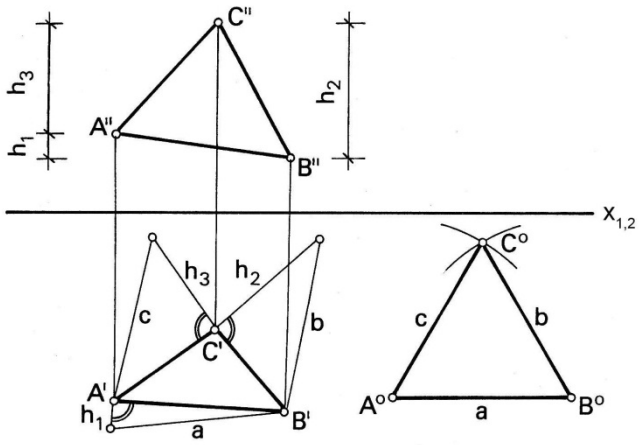


Gegeben seien die Punkte A, B und C, dargestellt in Zweitafelprojektion. Gesucht seien die Spuren s_1 und s_2 der durch die drei Punkte aufgespannten Ebene. Durch beliebige zwei der drei Punkte (z.B. A und C) wird eine Gerade g gelegt. Die Gerade ist Element der Ebene deren Spur gesucht wird. Die Spurpunkte G_1 und G_2 der Geraden sind Punkte der Ebenenspuren. Mit Hilfe eines anderen Punktepaares (z.B. B und C) wird durch Wiederholung der gleichen Operation mit einer Geraden j ein zweiter Punkt J_2 für eine der beiden Ebenenspuren (hier s_2) gefunden. Im Schnittpunkt der gefundenen Spur mit der Rissachse liegt ein Punkt S der auch Element der anderen Spur (hier s_1) ist, welche somit ebenfalls durch zwei Punkte bestimmt ist.

4.6 Wahre Größe und Form einer Fläche

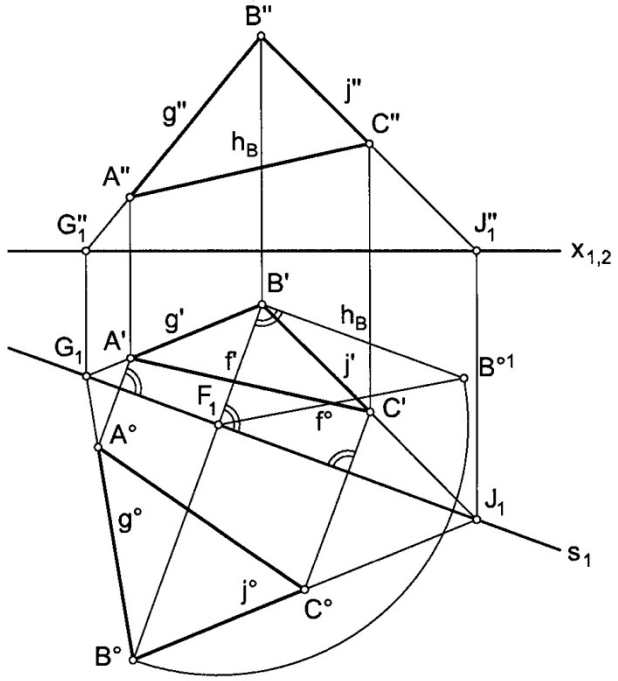
Jede ebene, durch Geraden begrenzte Fläche kann aus Dreiecken zusammengesetzt werden. Kann die wahre Fläche dieser Dreiecke konstruiert werden, so ist auch die wahre Fläche der aus ihnen zusammengesetzten Figur darstellbar. Deshalb werden hier Flächenaufgaben anhand von Dreiecken demonstriert.

Wahre Fläche mittels Höhendifferenzen



Ein Dreieck ist in Größe und Form festgelegt, wenn die drei Seitenlängen bekannt sind. Mehrere Verfahren um wahre Strecken zu ermitteln wurden bereits gezeigt. Hier ist die Konstruktion mit Höhendifferenzen dargestellt. Dabei bilden die Grundrissprojektion einer Dreiecksseite und die Höhendifferenz ihrer Endpunkte die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die wahre Länge dieser Dreiecksseite angibt.

Wahre Fläche durch Klappen in die Grundrissebene

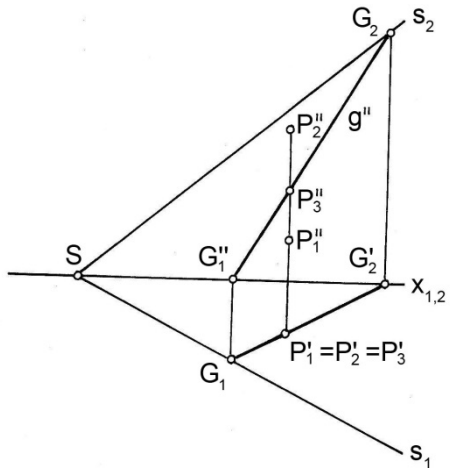


Die Fläche ABC wird um die Grundrissspur der sie enthaltenden Ebene in die Grundrissebene geklappt. Die Eckpunkte der Fläche beschreiben bei diesem Klappvorgang Kreisbahnen, deren Mittelpunkte auf der Grundrissspur liegen. Ihre Radien entsprechen den wahren Längen der Hypotenusen der Stützdreiecke. Stützdreiecke und Kreisbögen liegen in erstprojizierenden Ebenen, die senkrecht von der Grundrisspur durchstoßen werden. Sie erscheinen deshalb als senkrecht zur Grundrissspur verlaufende Strecken. Um den Klappvorgang in der Zeichenebene sichtbar zu

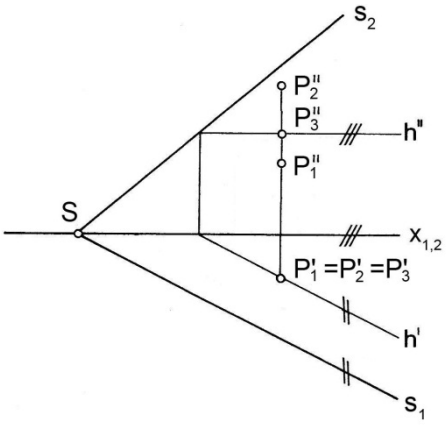
machen, werden die Ebenen, in denen die Kreisbahnen liegen, ihrerseits um 90° in die Grundrissebene geklappt.

Von den Grundrissbildern der Punkte A, B und C werden die Lote auf die Grundrissspur s_1 gefällt und über die Grundrissspur hinaus verlängert. Dem Aufriss wird die Höhe h_B des Punktes B entnommen und im Grundriss in B‘ senkrecht zu dessen Lot auf s_1 errichtet. h_B und f‘ bilden nun die Katheten des in den Grundriss geklappten Stützdreiecks unter B, dessen Hypotenuse f° jetzt in wahrer Länge gezeichnet werden kann. Mit einem Zirkelschlag, der den Klappvorgang von B darstellt, wird der Radius f° auf das verlängerte Lot von B‘ auf s_1 übertragen. Dies ist der Ort B°, an dem B nach dem Klappvorgang zu liegen kommt. Die beiden anderen Eckpunkte A° und C° des geklappten Dreiecks ABC werden durch Klappen der Geraden g und j gefunden.

4.7 Lage eines Punktes zu einer Ebene

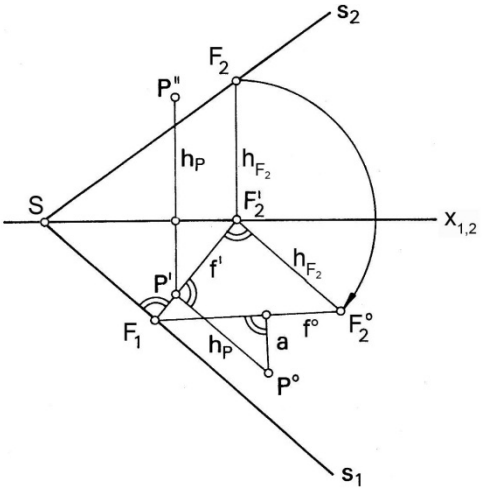


Die Überprüfung, ob ein gegebener Punkt in einer Ebene liegt, erfolgt anhand einer in der Ebene liegenden Geraden. Erscheint der Punkt in Grund- und Aufriss als auf der Geraden liegend (im Beispiel P_3), so liegt er auch im Raum auf ihr und ist somit Element der Ebene.



Besonders anschaulich und genau ist die Konstruktion, wenn als Gerade eine Höhenlinie gewählt wird.

4.8 Wahrer Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene

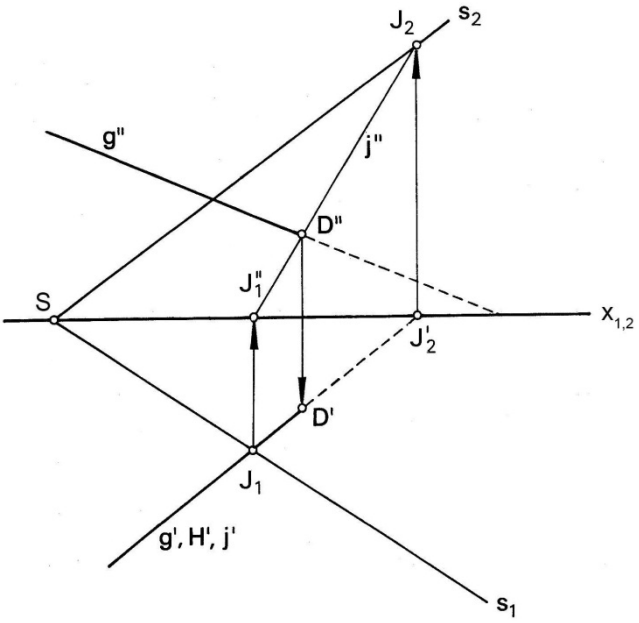


Gegeben seien die Spuren s_1 und s_2 einer Ebene E sowie ein Punkt P, dargestellt in Zweitafelprojektion. Gesucht sei der kürzeste Abstand a (*wahrer Abstand*) zwischen P und E.

Eine erstprojizierende Hilfsebene, die P enthält und gleichzeitig senkrecht auf E steht, wird um ihre Grundrissspur in den Grundriss geklappt. Das Lot vom Klappbild des Punktes auf das Klappbild der Verschneidungsgeraden zwischen E und Hilfsebene zeigt den wahren Abstand a.

Die erstprojizierende Hilfsebene schneidet aus E und den beiden Bildtafeln ein rechtwinkliges Dreieck. Die Verschneidungsgerade mit E bildet die Hypotenuse, die beiden Spuren der Hilfsebene bilden die Katheten des Dreiecks. Die Grundrissspur der Hilfsebene steht senkrecht auf s_1 und verläuft durch P'. Die Länge der durch sie gebildeten Kathete erscheint unverkürzt im Grundriss. Die Aufrissspur der erstprojizierenden Hilfsebene steht senkrecht auf der Rissachse. Zwischen Rissachse und s_2 ist die Länge der durch sie gebildeten Kathete abzugreifen und durch Zirkelschlag in das Klappbild im Grundriss zu übertragen. Die beiden Katheten legen die Lage der Hypotenuse und damit den Verlauf der geklappten Verschneidungsgeraden fest. Die Höhe h_P von P wird dem Aufriss entnommen und in P' rechtwinklig zur Grundrissspur der Hilfsebene abgetragen: Es erscheint das Klappbild P° des Punktes P. Auf dem Lot von P° auf die geklappte Verschneidungsgerade liegt zwischen Lotfuß und P° der wahre Abstand a.

4.9 Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

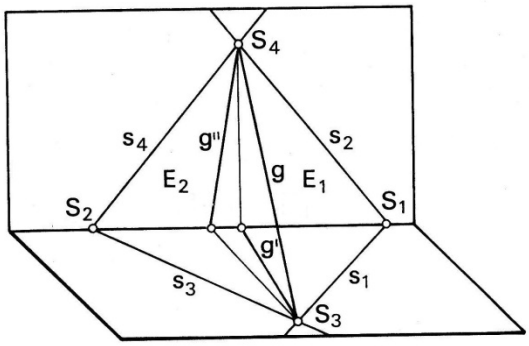


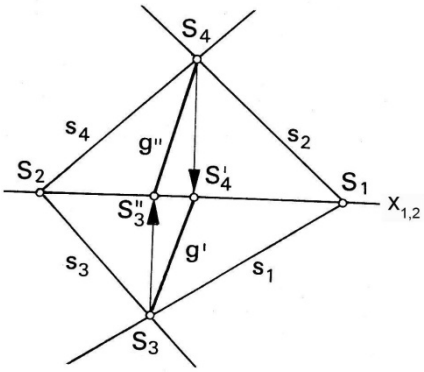
Gesucht sei der Durchstoßpunkt D einer Geraden g durch eine Ebene E.

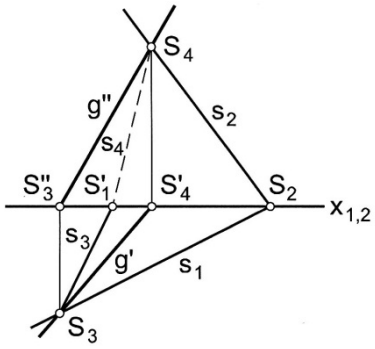
Es wird eine erstprojizierende Hilfsebene H errichtet, die die Gerade g enthält. Die Verschneidungsgerade j zwischen E und H schneidet g in D. Die Lage von D kann dem Aufriss entnommen und in den Grundriss projiziert werden.

Verläuft das Aufrissbild von j parallel zu dem von g, so liegt D im Unendlichen: g liegt parallel zu E. Fallen die Aufrissbilder von j und g zusammen, so liegt g in E.

4.10 Verschneidungsgerade zweier Ebenen



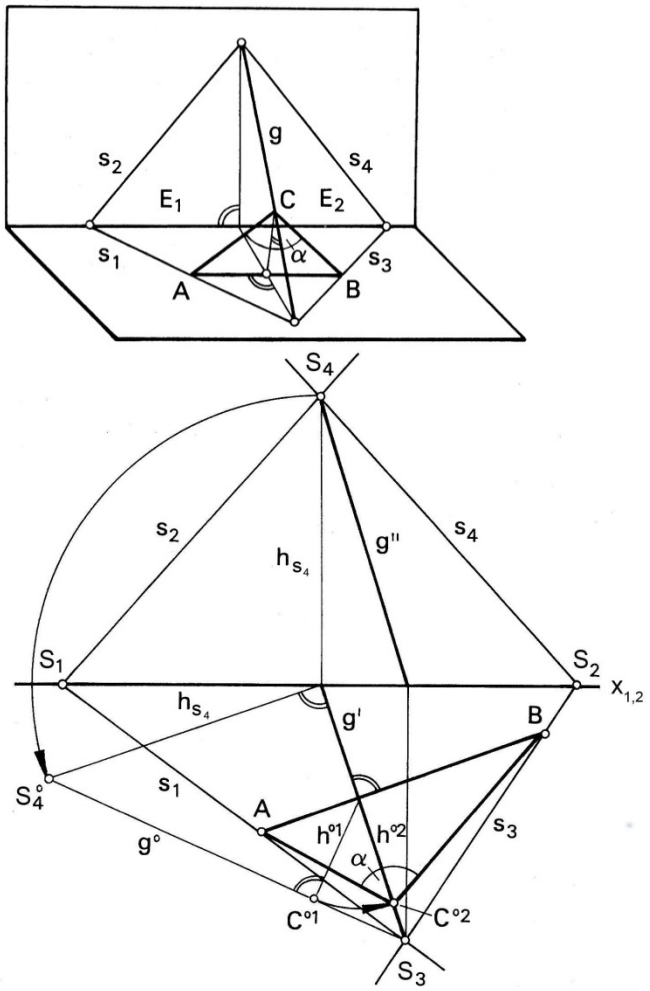




Die Grundrissspuren s_1 und s_3 zweier Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich im Punkt S_3. Die Aufrissspuren s_2 und s_4 der beiden Ebenen schneiden sich im Punkt S_4. Die Verschneidungsgerade g von E_1 und E_2 verläuft durch diese Schnittpunkte. In jedem Riss ist je einer der Schnittpunkte. (S_3 in Grundriss, S_4 im Aufriss) unmittelbar ersichtlich. Die Lage des jeweils anderen (S_4 in Grundriss, S_3 im Aufriss) muss durch Projektion von Riss zu Riss ermittelt werden.

Im Bild links befinden sich beide Ebenen in gestützter Lage. Im Bild rechts befindet sich nur E_1 in gestützter Lage. E_2 befindet sich in gespannter Lage. Hier wird die Aufrissspur s_4 von E_2 durch E_1 verdeckt und ist deshalb als gestrichelte Linie dargestellt.

4.11 Wahrer Winkel zwischen zwei Ebenen



Gegeben seien zwei sich schneidende Ebenen E_1 und E_2, dargestellt durch ihre Spuren s_1, s_2, s_3 und s_4. Gesucht sei der *wahre Winkel* α zwischen E_1 und E_2. Der *wahre Winkel zwischen zwei Ebenen* ist der Winkel zwischen den Spuren dieser zwei Ebenen auf einer dritten Ebene, welche sowohl E_1 als auch E_2 im rechten Winkel schneidet (*Normalebene*).

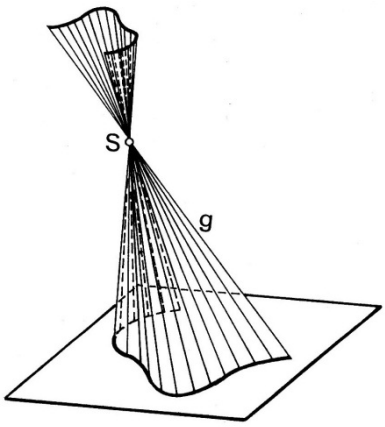
Zunächst wird, wie oben beschrieben, die Verschneidungsgerade g von E_1 und E_2 konstruiert. Dann wird die Normalebene eingeführt. Dies geschieht, indem an beliebiger Stelle des Grundrissbildes g' von g im rechten Winkel eine Gerade errichtet wird. Sie schneidet die Ebenenspuren s_1 und s_3 in den Punkten A und B. Die Strecke AB ist eine Seite der dreieckigen Fläche ABC, welche die Ebenen E_1, E_2 und die Grundrissebene π_1 aus der Normalebene herausschneiden. AB erscheint in wahrer Länge. Die anderen beiden Seiten von ABC, AC und BC, sowie der von ihnen eingeschlossene wahre Winkel α, würden aber, in den Grundriss projiziert, verzerrt erscheinen. Deshalb wird ein Klappbild von ABC konstruiert:

Eine erstprojizierende Hilfsebene über g' beinhaltet die Verschneidungsgerade g, den Eckpunkt C von ABC sowie das Höhenlot h von C auf AB. Die Hilfsebene wird um g' in den Grundriss geklappt. Vom Schnittpunkt zwischen g' und AB wird das Lot $h°^1$ auf g° gefällt. Mittels Zirkel-schlag wird das Höhenlot h von g° auf g' übertragen. Die zwei noch fehlenden Seiten $AC°^2$ und $BC°^2$ des geklappten Dreiecks $ABC°^2$ können nun gezeichnet werden. Sie schließen den wahren Verschneidungswinkel α ein.

5 Gekrümmte Flächen in Zweitafelprojektion

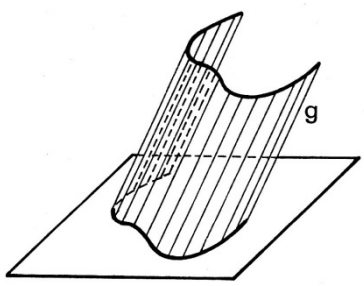
5.1 Kegel und Zylinder, Definitionen

Kegelflächen



Wird eine Gerade g (*Erzeugende*) an einer beliebigen, ebenen oder räumlichen Kurve (*Leitlinie*) entlang geführt, während ein Punkt S von g festgehalten wird, so entsteht eine Kegelfläche (kurz *Kegel*). Der Fixpunkt S wird Kegelspitze, die Erzeugende *Mantellinie* genannt. Beim *Kreiskegel* ist die Leitkurve ein Kreis, beim *geraden Kreiskegel* liegt der Kreismittelpunkt im Lot der *Kegelspitze* auf die Ebene des Kreises.

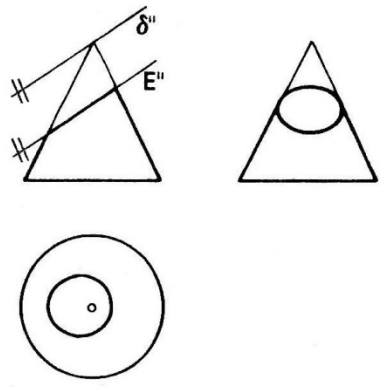
Zylinderflächen



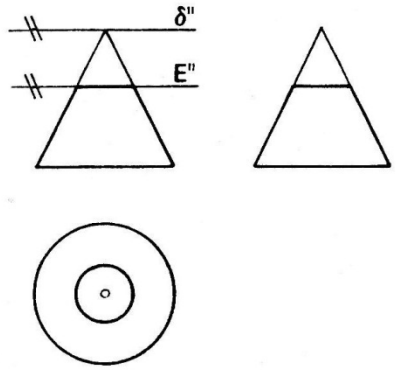
Ein *Zylinder* ist ein Kegel dessen Spitze im Unendlichen liegt. Seine Mantellinien verlaufen untereinander parallel. Beim *Kreiszylinder* ist die Leitkurve ein Kreis, beim *geraden Kreiszylinder* stehen die Mantellinien senkrecht auf der Ebene des Kreises.

5.2 Arten von Kegelschnitten

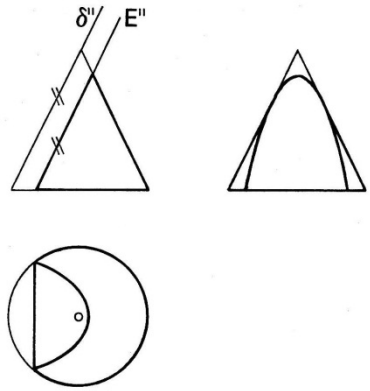
Der ebene Schnitt eines Kreiskegels kann verschiedene Formen annehmen. Anhand einer die Spitze des Kegels enthaltenden und zur Schnittebene E parallelen *Testebene δ* („Delta“) können sie unterschieden werden.



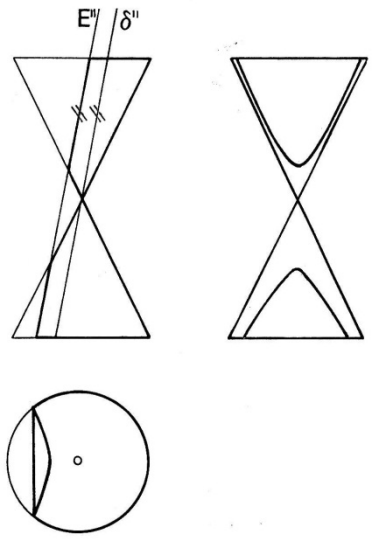
Ellipse: δ enthält keine Mantellinien. Wenn E und δ zusammenfallen entsteht als Sonderfall des elliptischen Schnittes ein Punkt.



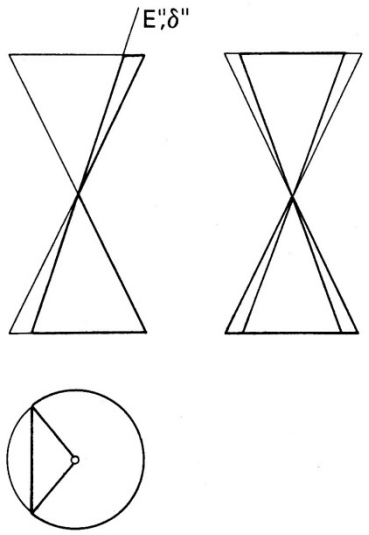
Kreis: Sonderfall des elliptischen Schnittes mit δ parallel zum Basiskreis de s Kegels.



Parabel: δ berührt die Kegelfläche. Sie enthält eine Mantellinie. Wenn E und δ zusammenfallen entsteht als Sonderfall des parabolischen Schnittes eine Gerade.



Hyperbel: δ schneidet die Kegelfläche. Sie enthält zwei Mantellinien.

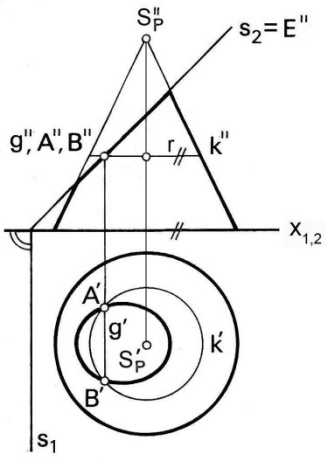


zwei sich schneidende Geraden: Sonderfall des hyperbolischen Schnittes mit E = δ.

5.3 Elliptischer Schnitt eines geraden Kreiskegels

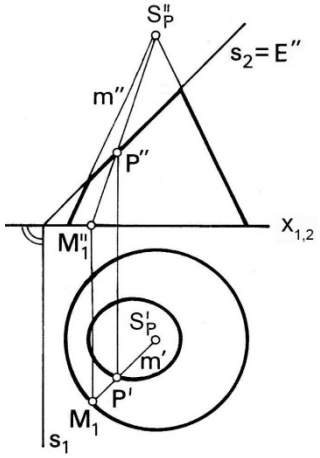
Die Aufrissebene (bzw. eine Hilfsrissebene) ist so zu wählen, dass sie senkrecht auf der Schnittebene E steht. Somit erscheint die Schnittellipse im Aufriss (bzw. im Hilfsriss) als Strecke.

Punktweise Konstruktion der Grundrissellipse mit Schichtkreisen



Die Verschneidungsgerade g zwischen der Schnittebene E und der Ebene des Schichtkreises k erscheint im Aufriss als Punkt g", im Grundriss als Senkrechte g' zur Rissachse. Die Schnittpunkte A und B von Verschneidungsgerade und Schichtkreis sind Ellipsenpunkte.

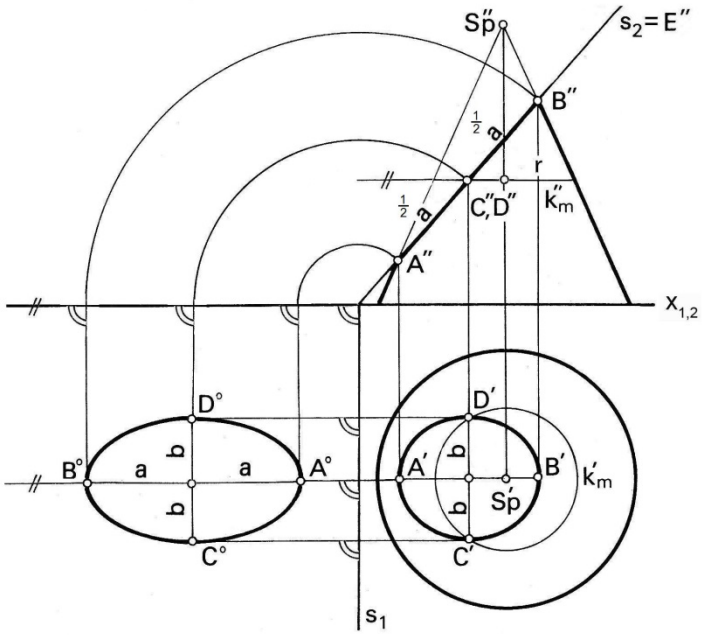
Punktweise Konstruktion der Grundrissellipse mit Mantellinien



Der Durchstoßpunkt P der Mantellinie m durch die Schnittebene E ist ein Ellipsenpunkt.

Ermittlung der Achsen von Grundrissellipse und wahrer Schnittellipse

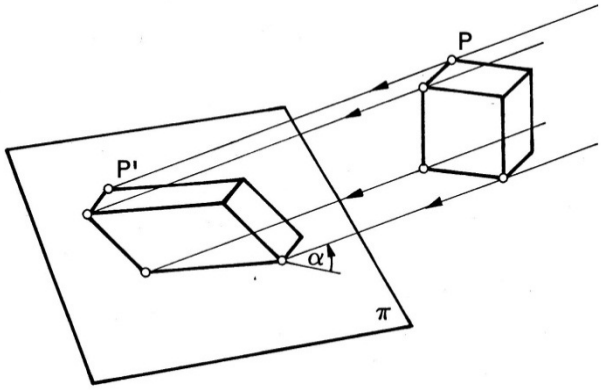
Schnitt- und Grundrissellipse können mit Hilfe einer der im Anhang gezeigten Ellipsenkonstruktionen gezeichnet werden, wenn die Achsen bekannt sind.



Die Schnittellipse erscheint im Aufriss als Strecke A"B". Die Länge dieser Strecke entspricht der wahren Länge der Hauptachse, ihre Endpunkte A" und B" den Projektionen der Hauptscheitelpunkte A und B der Schnittellipse. Die Projektion dieser Punkte in den Grundriss ergibt die Hauptscheitelpunkte A' und B' der Grundrissellipse und damit deren Hauptachse. Die Nebenachse liegt auf der Mittelsenkrechten der Hauptachse. Die Verschneidungspunkte von Nebenachse und Grundrissbild des mittleren Schichtkreises k'_m sind die Nebenscheitelpunkte C' und D' der Grundrissellipse. Die Länge der Nebenachse der Grundrissellipse entspricht der wahren Länge der Nebenachse der Schnittellipse. Die Grundrissprojektion Sp' der Kegelspitze Sp ist ein Brennpunkt F_2 der Grundrissellipse. Die wahre Schnittellipse wird durch Klappen der Schnittebene E um ihre Grundrissspur s_1 in die Grundrissebene ermittelt.

D Axonometrie

1 Axonometrie, Einführung

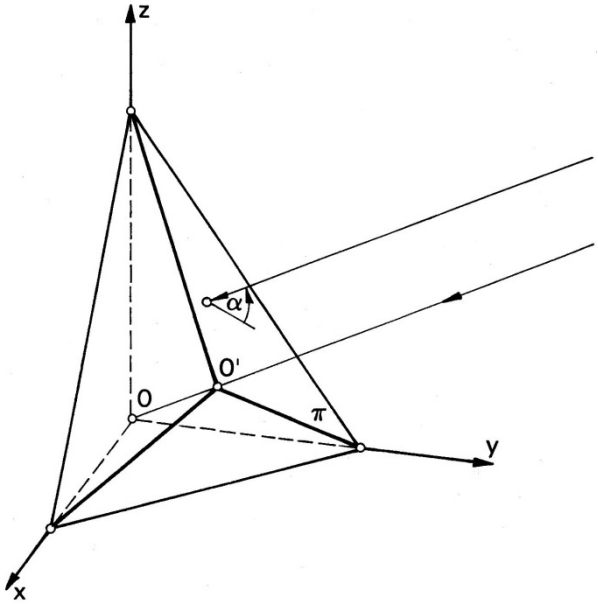


Das axonometrische Bild eines Körpers entsteht durch Parallelprojektion. Die Projektionsstrahlen und die Bildebene π schließen einen Winkel α (α ≤ 90°) ein. Die Projektionsrichtung darf zu keiner der Körperflächen senkrecht verlaufen, da sonst kein räumliches Bild entsteht. Die Axonometrie ist geraden- und parallelentreu. Jedem Punkt P wird eindeutig ein Punkt P' zugeordnet.

Die Anschaulichkeit der Axonometrie beruht auf ihrer Ähnlichkeit mit der Perspektive: bei unendlich großem Abstand zwischen Standort und Objekt (bzw. unendlich kleinem Objekt) sind Axonometrie und Perspektive identisch. Da andererseits der Betrachter bei räumlichen Bildern stets die ihm vertraute Perspektive sucht, bewirkt die Parallelität der Kanten in der Axonometrie, dass die dargestellten Körper verzerrt und unnatürlich gekippt wirken.

Die Variablen der Axonometrie sind der zwischen Bildebene und Projektionsrichtung eingeschlossene Winkel und die Lage des Objekts zur Bildebene. In der Bildebene erscheinen Veränderungen dieser beiden Variablen als Veränderungen von Winkeln und Längen und prägen dadurch das spezifische Erscheinungsbild der einzelnen Axonometrie. Um Axonometriearten zu unterscheiden genügen somit auch folgende auf die Zeichenebene bezogenen Angaben:
- die Winkel zwischen den in die Bildebene projizierten Koordinatenachsen des Objekts und
- das Verhältnis der Verkürzungen in den drei Koordinatenrichtungen.

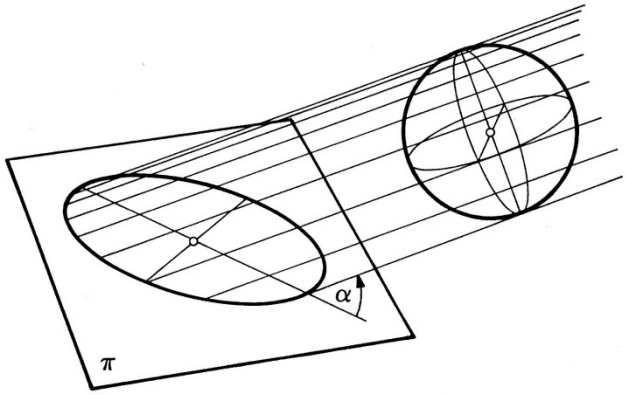
2 Schräge Axonometrie



Obiges Bild zeigt die Abbildung des Koordinatenkreuzes in der Bildebene π durch schräge Projektion. Die Richtungen der Koordinatenachsen in der Zeichenebene und die jeweiligen Verkürzungen können unabhängig voneinander gewählt werden. Dadurch werden Koordinatensystem, Projektionsstrahlen und Bildebene in ihrer Drehung zueinander festgelegt.

2.1 Kugel in der schrägen Axonometrie

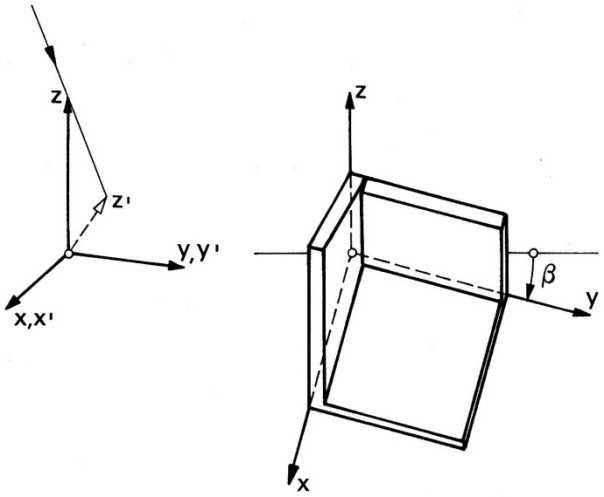
Wegen der Geraden- und Parallelentreue der Axonometrie ist das Bild ebenflächiger Körper einfach zu konstruieren, so dass auf dieses Thema hier nicht näher eingegangen werden muss. Einzig das elliptische Bild der Kugel in der schrägen Axonometrie bedarf der Erläuterung.



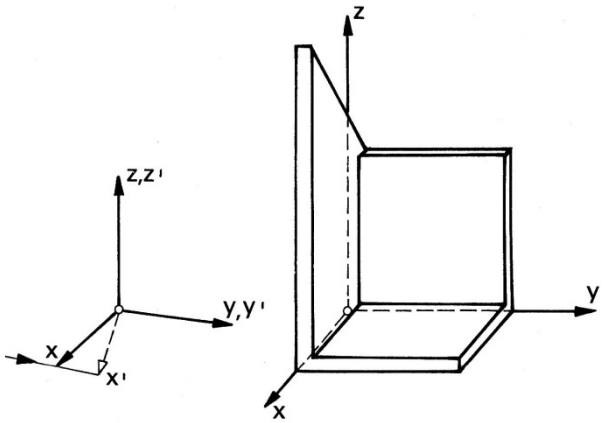
Die umhüllenden Projektionsstrahlen bilden einen geraden Kreiszylinder. Die Bildebene schneidet diesen Kreiszylinder unter dem Projektionswinkel α. Das Bild entspricht also einem allgemeinen Zylinderschnitt (Ellipse). Einzelne Punkte auf der Kugeloberfläche können durch Längen- und Breitenkreise konstruiert werden (Kreise werden zu Ellipsen).

2.2 Aufsichts- und Ansichtsaxonometrie

Zur schrägen Axonometrie gehören zwei durch Konvention festgelegte Arten, die missverständlicherweise Militär- und Kavalierperspektive genannt werden. Sie werden hier Aufsichts- und Ansichtsaxonometrie genannt.

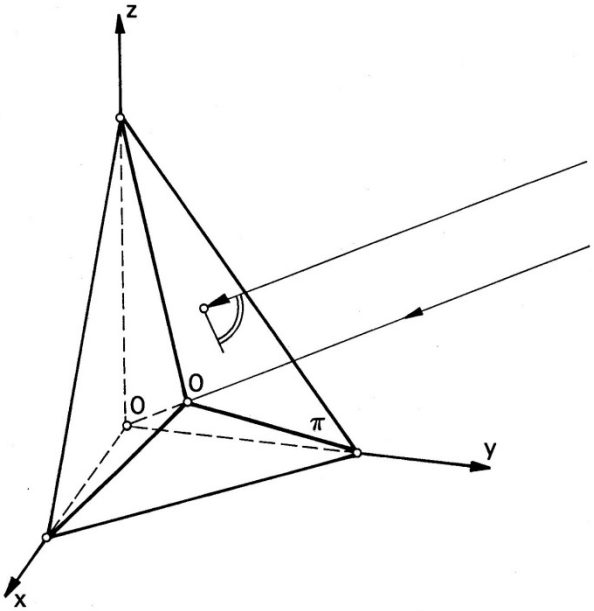


Bei der Aufsichtsaxonometrie liegt die Bildebene parallel zur Grundrissebene. Deshalb bleiben die Maße und Winkel in allen zum Grundriss parallelen Ebenen erhalten. Der Projektionswinkel wird so gewählt, dass die aufgehenden Strecken verkürzt abgebildet werden (üblicherweise x:y:z wie 1:1:1/2, ß = 30°).



Bei der Ansichtsaxonometrie liegt die Bildebene parallel zur Aufriss- oder Seitenrissebene. Im Übrigen gilt sinngemäß das über die Aufsichtsaxonometrie Gesagte. Die üblichen Verkürzungen betragen x:y:z wie 1/2:1:1, α = 60°.

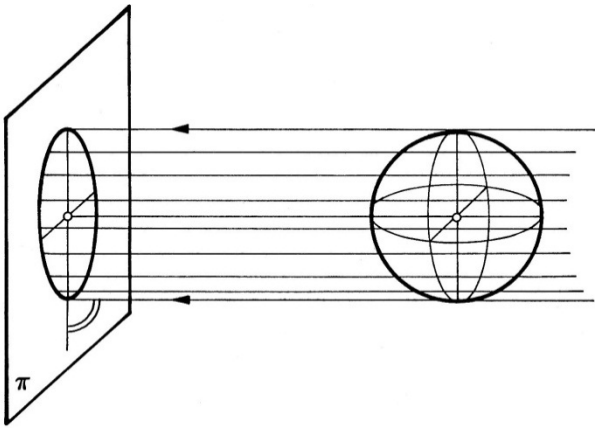
3 Orthogonale Axonometrie



Die Abbildung entsteht durch Projektionsstrahlen, die senkrecht auf der Bildebene π stehen. Es können entweder die Verkürzungen oder die Lage der Koordinatenachsen in der Zeichenebene gewählt werden, da der Projektionswinkel α mit 90° gegeben ist. Im Allgemeinen sind die drei Verkürzungen verschieden (Trimetrie). Die Bildebene darf zu keiner der Koordinatenebenen parallel sein, da sonst keine Axonometrie, sondern ein Normalriss entsteht.

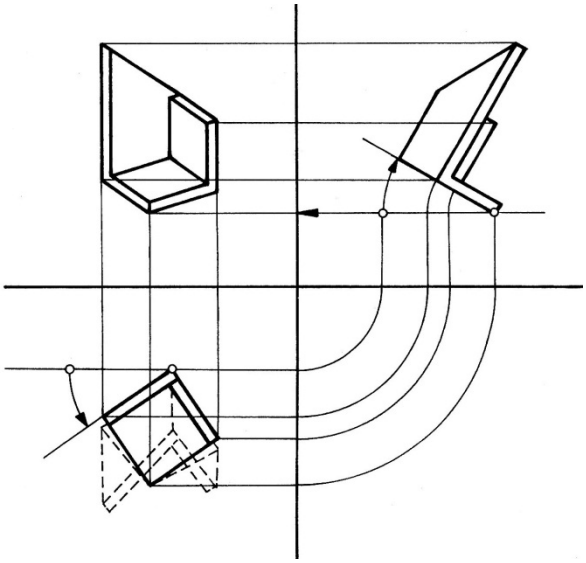
3.1 Kugel in der Orthogonalen Axonometrie

Im Unterschied zur schrägen Axonometrie erscheint die Kugel in der orthogonalen Axonometrie immer als Kreis.



Die umhüllenden Projektionsstrahlen bilden einen geraden Kreiszylinder. Die Bildebene schneidet diesen Zylinder senkrecht. Die Schnittfläche ist somit ein Kreis.

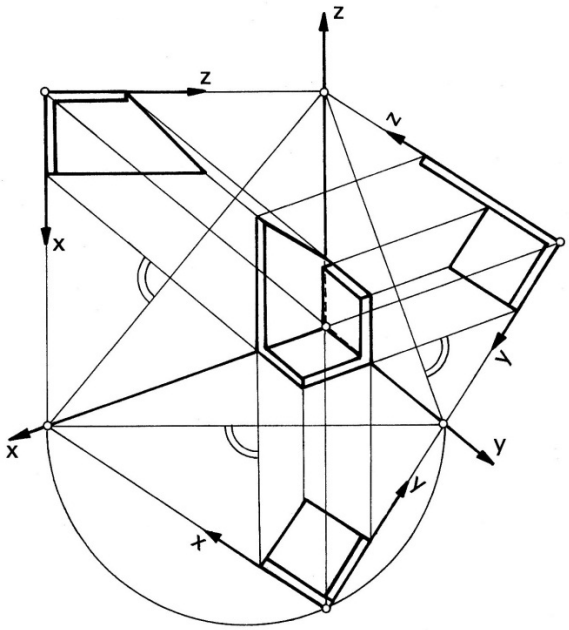
3.2 Orthogonale Axonometrie in Dreitafelprojektion



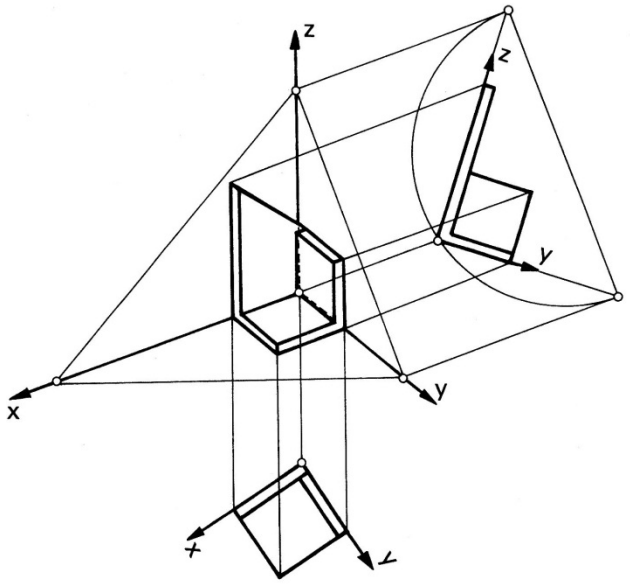
Um ein räumliches Bild zu erhalten, muss der Körper zunächst im Grundriss gedreht werden. Dann wird der Seitenriss des gedrehten Körpers gekippt. Auf die Konstruktion des gekippten Körpers im Grundriss kann verzichtet werden, da senkrecht zur Kippachse projiziert wird. Dennoch ist die Konstruktion sehr aufwendig, da der Seitenriss des gedrehten Körpers gesondert konstruiert werden muss.

3.3 Orthogonale Axonometrie im Einschneideverfahren

Da die in die Bildebene projizierten Koordinatenachsen die Höhenlote des Spurdreiecks sind, können sowohl die Achsen, als auch das Spurdreieck Ausgangspunkt der Axonometriekonstruktion nach dem Einschneideverfahren sein. In beiden Fällen wird durch diesen ersten Schritt bereits das Verkürzungsverhältnis festgelegt. Die Ordner verlaufen immer senkrecht zu den Spuren und parallel zu den projizierten Koordinatenachsen.

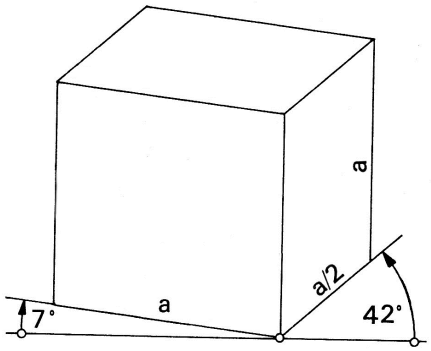


Die Risse werden um die jeweilige Spur nach außen in die Bildebene geklappt und erscheinen dort unverzerrt, aber seitenverkehrt. Die Lage des einzelnen Risses nach dem Klappvorgang wird mit Hilfe eines Thaleskreises auf der zugehörigen Spur und mit einem Ordner durch den Ursprung ermittelt.

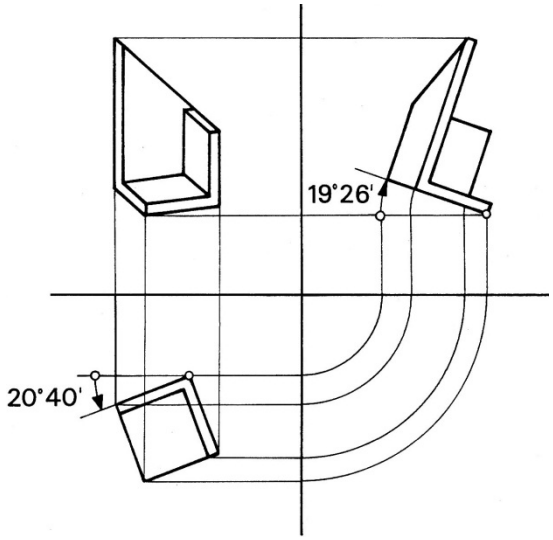


In aller Regel soll die Axonometrie aus den seitenrichtigen Rissen der in ihr sichtbaren Seiten eingeschnitten werden. Hierzu werden die Risse nach innen in die Bildebene geklappt. Die dabei in der Zeichnung entstehende Überlagerung von Rissen und Axonometrie wird durch Verschieben der Risse entlang der Ordner nach außen umgangen.

3.4 Projektion nach DIN 5 Teil 2

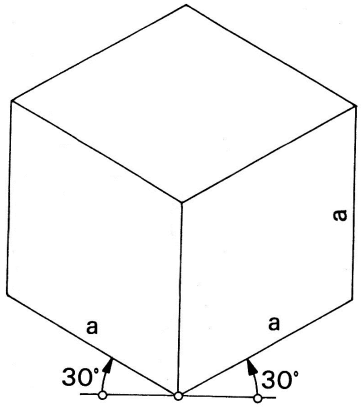


Anschauliche und leicht zu zeichnende Axonometrien entstehen dann, wenn das Koordinatensystem so im Raum liegt, dass zwei Verkürzungen gleich sind, also nur zwei verschiedene Verkürzungen (Dimetrie) entstehen, und das Verkürzungsverhältnis 1:1:0,5 beträgt. Das ist dann der Fall, wenn die Öffnungswinkel zwischen den projizierten Achsen 131,5°, 97,0°, 131,5° und die damit gegebenen Verkürzungen 0,94:0,94:0,47 betragen. Die in der DIN angegebenen Winkel (ß = 7°, τ = 42°) und Verkürzungen (1:0,5:1) sind Näherungswerte.

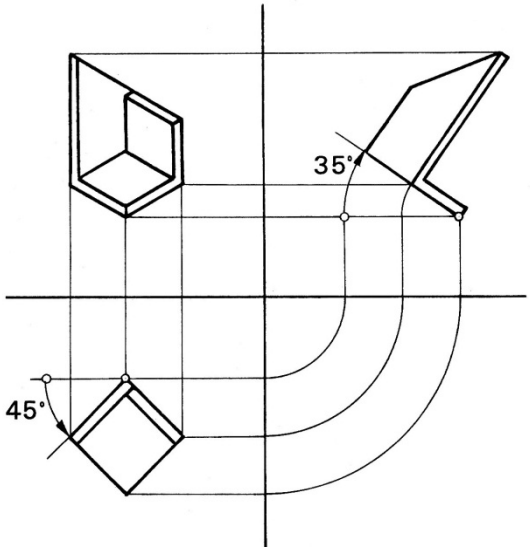


In der Dreitafelprojektion wird eine Axonometrie nach DIN 5 Teil 2 erzeugt, wenn der Grundriss um 20°40' gegen den Uhrzeigersinn gedreht und der Seitenriss des gedrehten Körpers um 19°26' im Uhrzeigersinn gekippt wird.

3.5 Isometrische Projektion nach DIN 5 Teil 1



Die Lage des Koordinatenkreuzes zur Bildebene wird so gewählt, dass alle Achsen in gleichem Maße verkürzt werden (Isometrie). Das ist der Fall wenn alle drei zwischen den projizierten Achsen eingeschlossen Winkel gleich sind: ß = 360°/3 = 120°. Das Spurdreieck wird somit gleichseitig. Die Verkürzung beträgt √(2/3) = 0,8165. In der Praxis jedoch werden die achsparallelen Kanten im isometrischen Bild unverkürzt gezeichnet.



In der Dreitafelprojektion wird eine Isometrie erzeugt, wenn der Grundriss um 45° gedreht und der Seitenriss des gedrehten Körpers um 35° im Uhrzeigersinn gekippt wird.

E Perspektive

1 Perspektive, Einführung

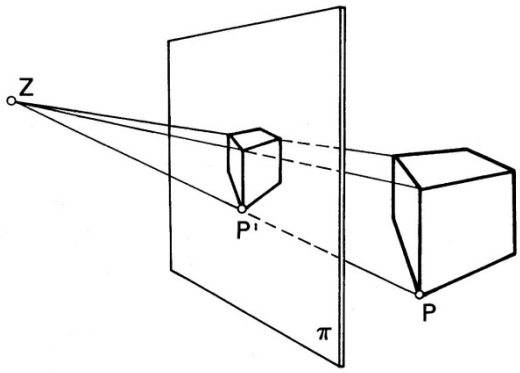
1.1 Das Prinzip der Perspektive

Aufgabe der Perspektive ist es, ein größtmögliches Maß an Anschaulichkeit zu erreichen. Diese Aufgabe wäre dann optimal erfüllt, wenn das perspektivische Bild den gleichen Seheindruck hervorrufen würde, wie das Original selbst. Solche Abbildungen müssen jedoch ein Ideal bleiben, denn Betrachter, denen wir anstelle eines räumlichen Gegenstandes ein ebenes Bild desselben unterschieben könnten, müssten wenigstens einäugig und völlig unbeweglich sein. (Deshalb posiert auch Caspar David Friederich auf seinem Selbstbildnis als Zeichner von 1802 „mit Mütze und Visierklappe“.)

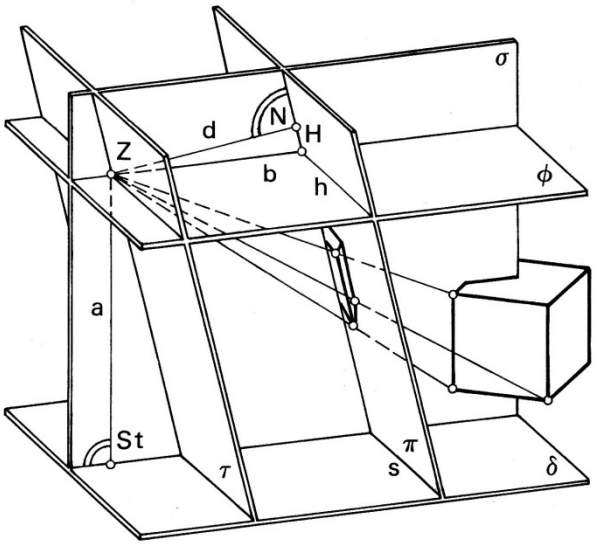
Derartige Handicaps vorausgesetzt lassen sich allerdings recht brauchbare Nachbildungen der Natur herstellen: Wird nämlich zwischen einen solchermaßen abstrahierten Betrachter und ein Objekt eine Ebene gestellt, und fixiert der Betrachter einen Objektpunkt, so durchstößt der Sehstrahl die Ebene an einem Punkt, der aus der Sicht des Betrachters mit dem Originalpunkt zusammenfällt. Werden nun nach und nach alle signifikanten Punkte und Kanten des Gegenstandes mit dem Sehstrahl abgetastet, so entsteht auf der Ebene ein Bild, dessen Form unserem einäugigen Durchblicker mit der des Gegenstandes identisch erscheinen muss.

Der beschriebene Vorgang ist aber nichts anderes als eine Projektion. Das Auge ist das Projektionszentrum von dem ausgehend Sehstrahlen als Projektionsstrahlen auf der Bildebene Bildpunkte erzeugen: perspektivische Bilder entstehen durch Zentralprojektion.

1.2 Die Elemente der Zentralprojektion



Die *Projektionsstrahlen* haben ihren Ursprung im *Projektionszentrum Z* (auch *Augpunkt 0* genannt). Ein Projektionsstrahl durch den *Objektpunkt P* erzeugt auf der *Bildebene π* den *Bildpunkt P'*. Der Bildpunkt kann je nach Anordnung der Bildebene vor, hinter oder auf dem Objektpunkt liegen.



Die horizontale *Grundebene δ* bildet die Bezugsebene zur Festlegung der räumlichen Lage des zu zeichnenden Gegenstandes.

Die zur Bildebene parallele Ebene, welche das Projektionszentrum enthält, heißt *Verschwindungsebene τ* In dieser Ebene liegende Punkte haben ihr Bild im Unendlichen.

Die zur Grundebene parallele Ebene, welche das Projektionszentrum enthält, heißt *Horizontebene Φ*.

Die zur Grundebene und zur Bildebene normale Ebene, welche das Projektionszentrum enthält, heißt *Sagittalebene σ.*

Die Verschneidungsgerade zwischen Grundebene und Bildebene ist die *Grundlinie s.*

Die Verschneidungsgerade zwischen Horizontebene und Bildebene ist der *Horizont h*. Der Horizont verläuft parallel zur Grundlinie.

Die senkrechte Projektion des Projektionszentrums auf die Grundebene ergibt den *Standpunkt St* und mit dem Abstand zwischen diesen beiden Punkten die *Aughöhe a*.

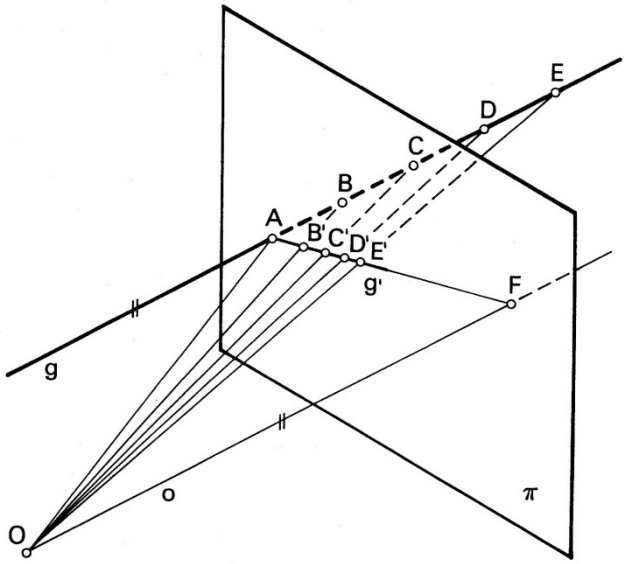
Auf der Verschneidungsgeraden zwischen Horizontebene und Sagittalebene liegt der *Hauptsehstrahl b*. Der Hauptsehstrahl durchstößt die Bildebene im *Hauptpunkt H*.

Die Normale vom Projektionszentrum auf die Bildebene ergibt den *Normalpunkt N* und mit dem Abstand zwischen diesen beiden Punkten die *Distanz d*.

1.3 Fluchtung im perspektivischen Bild

Bei der Zentralprojektion variiert, unter sonst gleichbleibenden Umständen, die Größe des Abbildes mit der Entfernung des Objektes vom Projektionszentrum. Entfernte Objekte erscheinen kleiner als nahe.

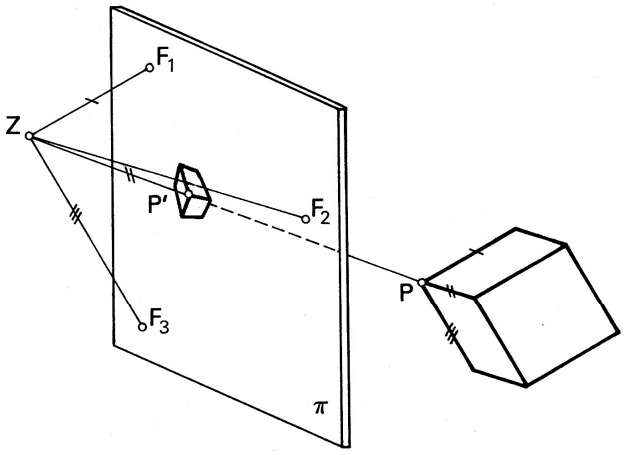
Aus diesem Grund haben in die Tiefe laufende, parallele Geraden kein paralleles Bild. Der Abstand zwischen einem solchen Parallelenpaar erscheint umso kleiner, je weiter die jeweils projizierte Stelle vom Projektionszentrum entfernt ist.

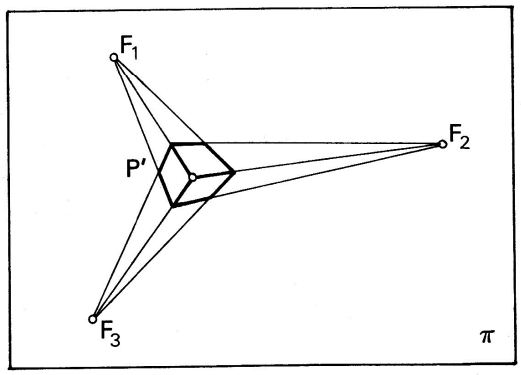


Im Unendlichen erscheint der Abstand des Parallelenpaars unendlich klein. Die Bilder der Geraden berühren sich in einem gemeinsamen Punkt, dem *Fluchtpunkt F* der Geraden. Fluchtpunkte sind die perspektivischen Bilder der unendlich fernen Punkte (*Fernpunkt*) von Geraden. Sie liegen in der Bildebene und werden durch den auf den Fernpunkt der jeweiligen Geraden gerichteten, also zu ihr parallelen Sehstrahl o lokalisiert. Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen: Sie haben einen gemeinsamen Fernpunkt und damit auch, wie schon gezeigt, einen gemeinsamen Fluchtpunkt.

Die Fluchtpunkte aller Geraden einer Ebene liegen auf einer Geraden in der Bildebene, der Fluchtgeraden der Ebene. Parallele Ebenen schneiden sich im Unendlichen: Sie haben eine gemeinsame Ferngerade und damit auch eine gemeinsame Fluchtgerade. Der Horizont ist die Fluchtgerade aller horizontalen Ebenen, also auch von Grundebene und Horizontebene.

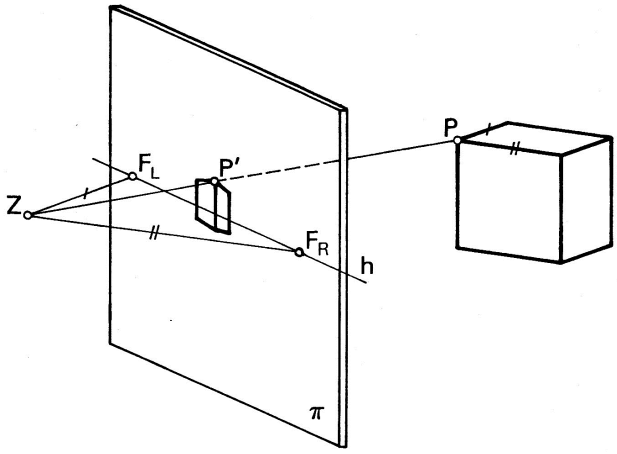
1.4 Perspektive orthogonaler Körper in allgemeiner Lage

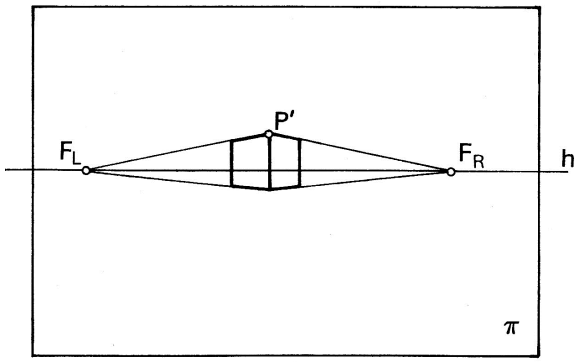




Die Kanten von aus Quadern zusammengesetzten Körpern (*orthogonale Körper*) verlaufen in drei rechtwinklig aufeinander stehenden Richtungen. Alle Kanten einer Richtung verlaufen parallel und haben deshalb einen gemeinsamen Fluchtpunkt. Es gibt also drei Fluchtpunkte: *Perspektive mit drei Fluchtpunkten*. Die Fluchtpunkte liegen in der Bildebene und werden durch den zu der jeweiligen Kantenschar parallelen Sehstrahl lokalisiert.

1.5 Eckperspektive

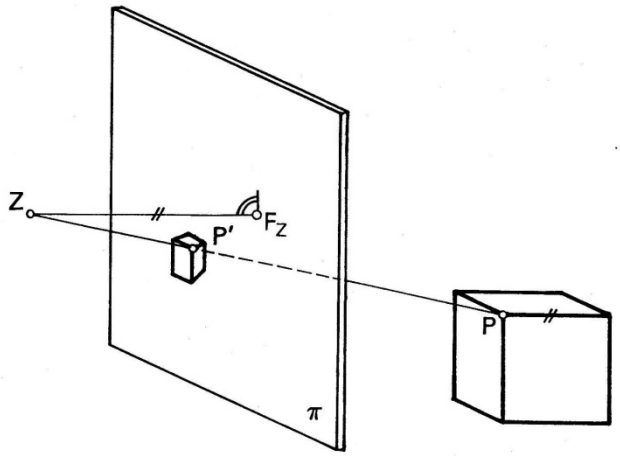


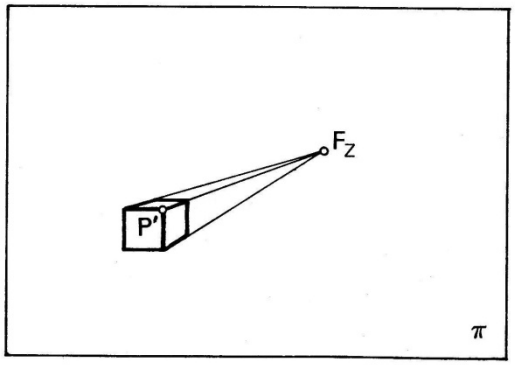


Verläuft eine Richtung des abzubildenden orthogonalen Körpers parallel zur Bildebene, so haben die Kanten dieser Richtung ihren Fluchtpunkt im Unendlichen. Die Bilder dieser Kanten sind untereinander parallel, da sie auf einen Fernpunkt fluchten. Es gibt nur zwei im Endlichen liegende Fluchtpunkte: *Perspektive mit zwei Fluchtpunkten.*

Die gebräuchlichste Form der Perspektive ist die *Eckperspektive*. Bei dieser verlaufen die lotrechten Kanten des Gegenstandes parallel zu einer lotrecht stehenden Bildebene. Die beiden anderen Richtungen verlaufen horizontal. Sie haben ihre Fluchtpunkte auf dem Horizont: *linker Fluchtpunkt* F_L und rechter *Fluchtpunkt* F_R. Bei der Eckperspektive fallen Haupt- und Normalpunkt zusammen.

1.6 Zentralperspektive





Verlaufen zwei Richtungen des abzubildenden orthogonalen Körpers parallel zur Bildebene, so haben die Kanten dieser Richtungen ihre Fluchtpunkte im Unendlichen. Die Bilder dieser Kanten sind jeweils untereinander parallel, da sie auf einen Fernpunkt fluchten. Die dritte Richtung verläuft normal zur Bildebene. Ihr Fluchtpunkt fällt mit dem Normalpunkt zusammen. Es gibt also nur einen im Endlichen liegenden Fluchtpunkt: *Perspektive mit einem Fluchtpunkt.*

Gängig, insbesondere für die Darstellung von Innenräumen, ist die *Zentralperspektive* mit lotrecht stehender Bildebene. Die vertikale und eine horizontale Kantenrichtung des orthogonalen Objektes verlaufen parallel zur Bildebene. Die zweite horizontale Richtung steht normal auf der Bildebene. Ihr Fluchtpunkt wird durch den Hauptsehstrahl lokalisiert: *zentraler Fluchtpunkt* F_Z. Der zentrale Fluchtpunkt, der hier mit Haupt- und Normalpunkt zusammenfällt, liegt auf dem Horizont im Schnittpunkt von Bild-, Horizont- und Sagittalebene.

2 Verfahren der Perspektivkonstruktion

Perspektiven können konstruiert werden, indem der Projektionsvorgang mit seinen Elementen Projektionszentrum, Objekt und Bildebene in Grund- und Seitenriss dargestellt wird: *Perspektivkonstruktion aus zwei Rissen.*

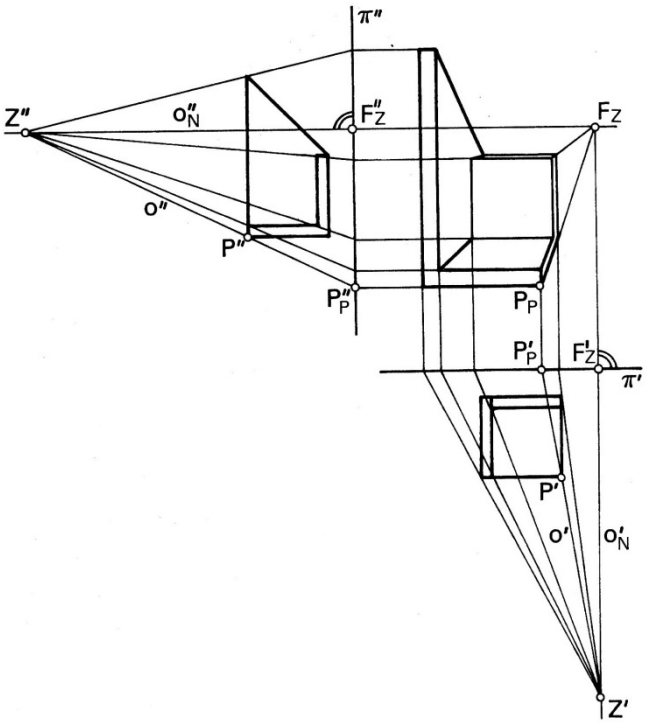
Auf den Seitenriss kann verzichtet werden, wenn die Lage der Bildebene so gewählt wird, dass möglichst viele wichtige Objektpunkte in dieser selbst zu liegen kommen. Die Höhenmaße dieser

Punkte können dann direkt in das perspektivische Bild übernommen werden: *Perspektivkonstruktion aus dem Grundriss*.

Perspektiven können auch ganz ohne die Zuhilfenahme von Rissen aufgebaut werden: *Distanz- und Messpunktverfahren.*

Im Unterschied zur Einführung, wo vom Allgemeinen zum Besonderen fortgeschritten wurde, wird im Folgenden die einfacher zu beherrschende Zentralperspektive vor der Eckperspektive dargestellt. Auf die 'allgemeine Lage' wurde ganz verzichtet. Stattdessen wird unter der Überschrift 'Rampenfluchtpunkt' gezeigt, wie der Fluchtpunkt einer beliebigen Richtung gefunden werden kann.

2.1 Zentralperspektive aus zwei Rissen



Der Begriff Zentralperspektive bezieht sich auf orthogonale Objekte bzw. auf solche, die in ein orthogonales Bezugssystem einbeschrieben sind.

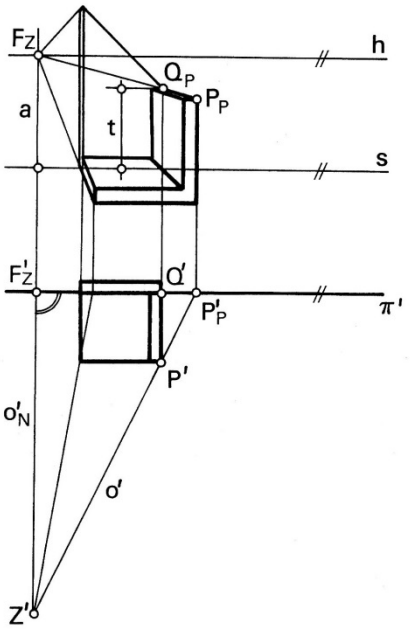
Die Bildebene π steht senkrecht, also normal zum Grundriss, und erscheint daher in diesem als Gerade: π'. Die Lage der Bildebene zum Seitenriss ist ebenfalls normal. Sie erscheint somit auch im Seitenriss als Gerade: π''. Die vertikale und eine der beiden horizontalen Koordinatenrichtungen des Objektes verlaufen parallel zur Bildebene. Die andere horizontale Richtung steht normal auf der Bildebene. In Grund- und Aufriss ist das Projektionszentrum Z dargestellt: Z' und Z''. Das Objekt liegt in dem hier gezeigten Fall zwischen Projektionszentrum und Bildebene. Die relative Lage dieser drei Elemente, insbesondere ihre Reihenfolge entlang der Sehstrahlen, ist grundsätzlich frei wählbar. Sie bestimmt jedoch, wie weiter hinten noch gezeigt werden wird, ganz wesentlich die Bildwirkung.

Durch jeden Objektpunkt P lässt sich nun ein Projektionsstrahl o legen, der auf der Bildebene den Bildpunkt P_P erzeugt. Der Projektionsstrahl und der Bildpunkt erscheinen in Grund- und Aufriss: o', o'' und P_P', P_P''. Dem Grundriss kann die seitliche Lage, dem Aufriss die Höhenlage von P_P

entnommen werden. Dies geschieht mit vertikalen und horizontalen Ordnern. Im Schnittpunkt der Ordner erscheint P_P in der Zeichenebene.

Der eine im Endlichen liegende Fluchtpunkt - der zentrale Fluchtpunkt F_Z - wird durch den zur Bildebene normalen Sehstrahl o_N lokalisiert. Mit Hilfe von F_Z kann das Bild einer in die Tiefe laufenden Geraden anhand eines einzigen auf ihr liegenden Punktes konstruiert werden. Die Bilder der zur Bildebene parallelen Objektkanten verlaufen horizontal und vertikal. Auch diese können daher anhand von nur einem Objektpunkt konstruiert werden. Ist das Bild einer Geraden erst einmal gefunden, so lassen sich die Bilder von auf ihr liegenden Punkten schon aus nur einem der beiden Risse herleiten.

2.2 Zentralperspektive aus dem Grundriss



Die Bildebene π steht senkrecht, also normal zum Grundriss, und erscheint daher in diesem als Gerade: π'. Die eine horizontale Koordinatenrichtung des Objektes verläuft parallel zur Bildebene. Die andere horizontale Richtung steht normal auf der Bildebene. Die Vertikalen des Objektes sind wiederum parallel zur Bildebene. Als drittes Element ist im Grundriss das Projektionszentrum Z dargestellt: Z'.

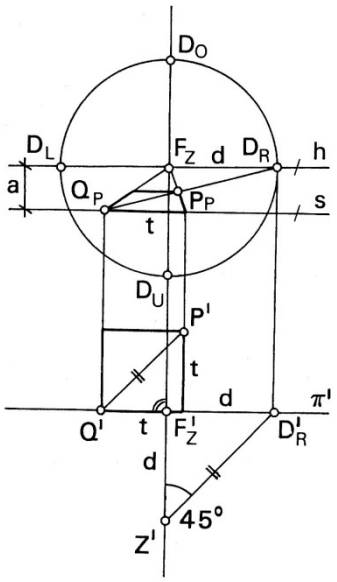
Durch jeden Objektpunkt P lässt sich nun ein Projektionsstrahl o legen, der auf der Bildebene den Bildpunkt P_P erzeugt. Der Projektionsstrahl und der Bildpunkt erscheinen im Grundriss: o' und P_P'. Dem Grundriss kann die seitliche Lage der Bildpunkte entnommen werden. Dies geschieht mit vertikalen Ordnern.

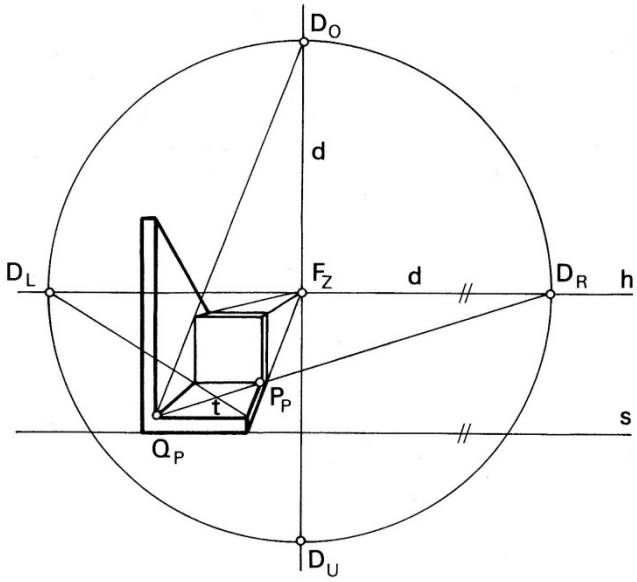
Auf den Seitenriss kann verzichtet werden, wenn die Lage der Bildebene so gewählt wird, dass viele signifikante Objektpunkte in dieser selbst liegen. Im Beispiel liegen alle Punkte der Innenseite der nach oben schräg begrenzten Wand in π. Die Höhenlage dieser Bildpunkte kann direkt im perspektivischen Bild abgetragen werden. Hierzu dient die Grundlinie s, eine horizontale Gerade, die an beliebiger Stelle oberhalb oder unterhalb des Grundrisses gezeichnet wird, als Nulllinie.

Zur Darstellung von Bildpunkten, deren Original nicht in der Bildebene liegt, muss zunächst der eine im Endlichen liegende Fluchtpunkt - der zentrale Fluchtpunkt F_Z - gefunden werden. Er wird durch den zur Bildebene normalen Sehstrahl o_N lokalisiert. Das Bild von o_N im Grundriss liefert die seitliche Lage von F_Z. Die Höhenlage von F_Z über der Grundlinie entspricht, je nach verwendetem Maßstab, der gewünschten Höhe des Projektionszentrums über der Grundebene (Aughöhe a). Der Horizont h verläuft durch F_Z.

Die Höhenlage von Bildpunkten, deren Original nicht in der Bildebene liegt, wird mittels eines Hilfspunktes aus der Bildebene in die Tiefe gelotet. Der Hilfspunkt Q hat die gleiche Höhe t und die gleiche seitliche Lage wie der jeweilige Objektpunkt P, liegt aber in π. Das Bild des Hilfspunktes Q_P kann unmittelbar in die Perspektive eingezeichnet werden. Die Gerade durch Q_P und F_Z stellt die Tiefenlinie dar, auf der der Punkt liegt, dessen Bild gesucht ist. Das Bild der Tiefenlinie schneidet den vertikalen Ordner über P_P' im gesuchten Bildpunkt P_P.

2.3 Zentralperspektive mit Distanzpunkten





Bei diesem Verfahren wird das perspektivische Bild in direkter Weise ohne die Zuhilfenahme von Rissen konstruiert.

Als erster Schritt wird der Distanzkreis gezeichnet. Sein Radius ist die Distanz d (zwischen dem Projektionszentrum Z und der Bildebene π). Der Distanzkreis stellt den Schnittkreis des 90°-Sehkegels mit der Bildebene dar. Die Mittelachse dieses geraden Kreiskegels ist der Hauptsehstrahl. Der Mantel des Kegels wird von den Sehstrahlen gebildet, die in einem Winkel von 45° zum Hauptsehstrahl verlaufen. Der Distanzkreis ist also der Ort der Fluchtpunkte aller Geraden, die in einem Winkel von 45° zur Bildebene stehen.

Der Kreismittelpunkt ist der Hauptpunkt H, der bei der Zentralperspektive mit dem zentralen Fluchtpunkt F_Z zusammenfällt.

Die Horizontale durch F_Z ergibt den Horizont h.

Als nächstes wird parallel zum Horizont die Grundlinie s eingezeichnet. Sie liegt in aller Regel unterhalb von h und zwar im Abstand a, der der gewünschten Höhe des Projektionszentrums über der Grundebene δ entspricht (Aughöhe a).

In der Bildebene liegende Teile des Gegenstandes werden unverkürzt abgebildet. Im Beispiel (unteres Bild) wurde die Lage der Bildebene so gewählt, dass die L-förmige Vorderfläche des Objektes in π liegt. Diese Fläche kann deshalb auch in der Perspektive praktisch als Riss gezeichnet werden und bildet den Ausgang für die weitere Perspektivzeichnung. Da der Körper als auf der Grundebene stehend angenommen wird, liegt die unterste Kante der Vorderfläche auf der Grundlinie. Die seitliche Lage dieser Fläche ist in Hinblick auf die gewünschte Bildwirkung zu wählen.

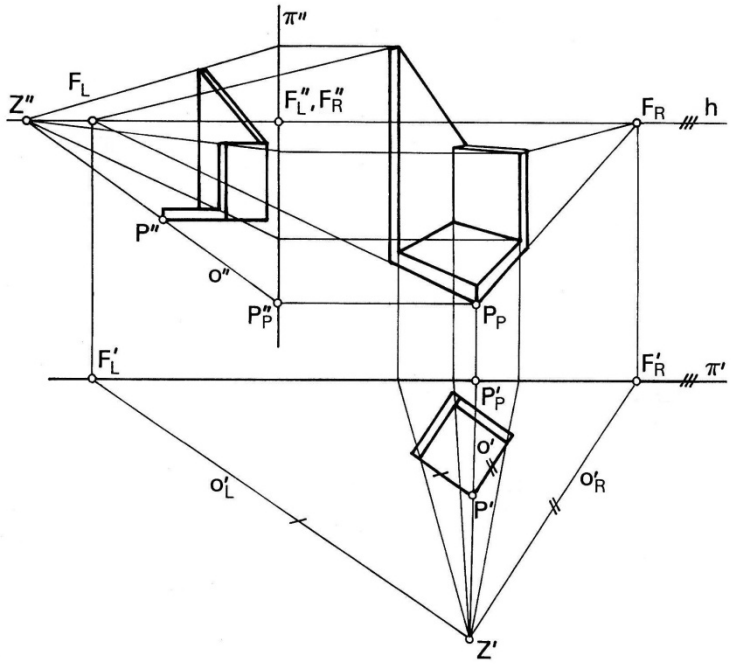
Normal zur Bildebene verlaufende Kanten fluchten auf den zentralen Fluchtpunkt F_Z. Von den Ecken der Vorderfläche ausgehende Tiefenlinien können nun also als Verbindungslinien zwischen Eckpunkten und F_Z gezeichnet werden.

Der nächste Schritt, der wesentliche dieses Verfahrens, wird zunächst mit Hilfe eines Grundrisses (oberes Bild, unten) erläutert: Gesucht sei das Bild eines Punktes P, welcher auf einer bereits dargestellten, normal zur Bildebene verlaufenden Geraden liegt. Hierzu wird der Punkt als Eckpunkt eines Quadrates gedacht, das parallel zur Grundebene liegt, und dessen eine Kante in der Bildebene liegt. (Bei dem Beispiel im unteren Bild ist dies die quadratische obere Fläche der liegenden Scheibe.) Die Kantenlänge t des Quadrates entspricht also dem Abstand des Punktes von der Bildebene. Vom Bild des Quadrates sind nun das der unverkürzt wiedergegebenen Vorderkante und das der den Punkt enthaltenden Tiefenlinie gegeben. Die Fluchtung einer dritten Seite des Quadratbildes lässt sich mit Hilfe von F_Z noch konstruieren, das Bild der hinteren Seite und mit ihm das gesuchte Bild der hinteren Quadratecken fehlen vorerst noch. Hier hilft nun der anfangs gezeichnete Distanzkreis. Denn das Quadratbild kann vervollständigt werden, wenn eine der beiden Quadratdiagonalen dargestellt werden kann. Letztere aber haben, wie gezeigt, ihre Fluchtpunkte auf dem Distanzkreis. Und zwar in diesem Fall, da in einer horizontalen Ebene liegend, in dessen Schnittpunkten mit dem Horizont. Als Verbindungslinien zwischen den vorderen Eckpunkten des Quadratbildes (hier Q_P) und den Diagonalenfluchtpunkten (hier D_R) entstehen die Bilder der Diagonalen und im Schnittpunkt zwischen diesen und denen der Tiefenlinien die gesuchten Bilder der hinteren Quadratecken (hier P_P).

Die Diagonalenfluchtpunkte werden Distanzpunkte genannt. Praktisch bedeutsam sind die auf dem Horizont liegenden Distanzpunkte für horizontale 45°-Diagonalen: linker und rechter Distanzpunkt D_L und D_R und die auf der Vertikalen durch F_Z liegenden Distanzpunkte für vertikale 45°-Diagonalen: oberer und unterer Distanzpunkt D_O und D_U.

Zusammengefasst gesagt lautet das Prinzip dieser auch *Distanzkreisverfahren* genannten Perspektivkonstruktion: Mit dem auf einen Distanzpunkt fluchtenden Bild einer 45°-Diagonalen kann ein unverkürzt in der Bildebene liegendes Maß auf eine Tiefenlinie übertragen werden.

2.4 Eckperspektive aus zwei Rissen



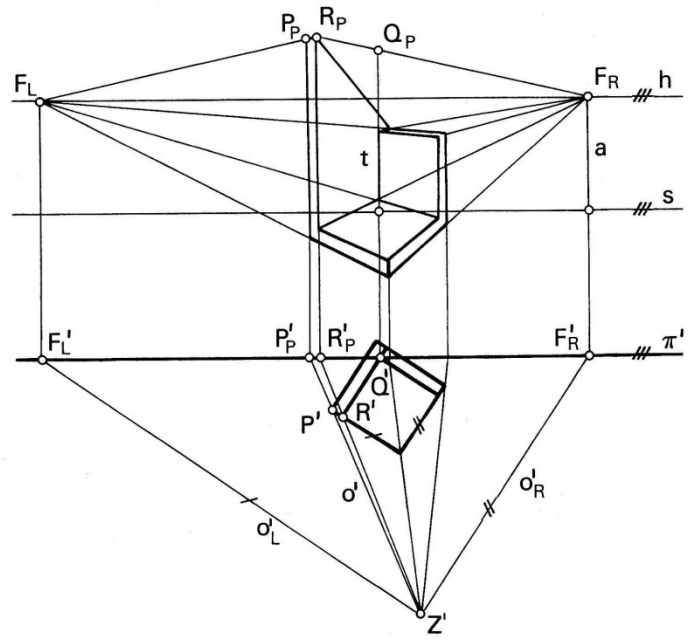
Der Begriff Eckperspektive bezieht sich auf orthogonale Objekte bzw. auf solche, die in ein orthogonales Bezugssystem einbeschrieben sind.

Die Bildebene π steht senkrecht, also normal zum Grundriss, und erscheint daher in diesem als Gerade: π'. Die Lage der Bildebene zum Seitenriss ist ebenfalls normal. Sie erscheint somit auch im Seitenriss als Gerade: π''. Die vertikale Koordinatenrichtung des Objektes verläuft parallel zur Bildebene. Die horizontalen Richtungen haben eine allgemeine Lage zur Bildebene. In Grund- und Aufriss ist das Projektionszentrum Z dargestellt: Z' und Z''. Das Objekt liegt in dem hier gezeigten Fall zwischen Projektionszentrum und Bildebene. Die relative Lage dieser drei Elemente, insbesondere ihre Reihenfolge entlang der Sehstrahlen, ist grundsätzlich frei wählbar. Sie bestimmt jedoch, wie weiter hinten noch gezeigt werden wird, ganz wesentlich die Bildwirkung.

Durch jeden Objektpunkt P lässt sich nun ein Projektionsstrahl o legen, der auf der Bildebene den Bildpunkt P_P erzeugt. Der Projektionsstrahl o und der Bildpunkt P_P erscheinen in Grund- und Aufriss: o', o'' und P_P', P_P''. Dem Grundriss kann die seitliche Lage, dem Aufriss die Höhenlage von P_P entnommen werden. Dies geschieht mit horizontalen und vertikalen Ordnern. Im Schnittpunkt der Ordner erscheint P_P in der Zeichenebene.

Die beiden horizontalen Koordinatenrichtungen haben im Endlichen liegende Fluchtpunkte: linker Fluchtpunkt F_L und rechter Fluchtpunkt F_R. Die Fluchtpunkte werden durch die zur jeweiligen Koordinatenrichtung parallelen Sehstrahlen o_L und o_R lokalisiert. Beide Fluchtpunkte liegen auf gleicher Höhe. Die durch sie laufende Gerade ist der Horizont h. Mit Hilfe der Fluchtpunkte können die Bilder von in die Tiefe laufenden Geraden anhand eines einzigen Objektpunktes konstruiert werden. Die Bilder der vertikalen Objektkanten verlaufen vertikal. Auch diese können daher anhand eines einzigen Objektpunktes konstruiert werden. Ist das Bild einer Geraden erst einmal gefunden, so lassen sich die Bilder von auf ihr liegenden Punkten schon aus nur einem der beiden Risse herleiten.

2.5 Eckperspektive aus dem Grundriss



Die Bildebene π steht senkrecht, also normal zum Grundriss, und erscheint daher in diesem als Gerade: π'. Die Vertikalen des Objektes verlaufen parallel zur Bildebene. Die horizontalen Kanten des Objektes liegen in allgemeiner Lage zur Bildebene. Als drittes Element ist im Grundriss das Projektionszentrum Z dargestellt: Z'.

Durch jeden Objektpunkt P lässt sich nun ein Projektionsstrahl o legen, der auf der Bildebene den Bildpunkt P_P erzeugt. Der Projektionsstrahl und der Bildpunkt erscheinen in Grundriss: o' und P_P'. Dem Grundriss kann die seitliche Lage der Bildpunkte entnommen werden. Dies geschieht mit vertikalen Ordnern.

Auf den Seitenriss kann verzichtet werden, wenn die Lage der Bildebene so gewählt wird, dass signifikante Objektpunkte in dieser selbst liegen. Im Beispiel liegen alle Punkte der vertikalen Innenkante des Gegenstandes in π. Die Höhenlage dieser Bildpunkte kann direkt im perspektivischen Bild abgetragen werden. Hierzu dient die Grundlinie s, eine horizontale Gerade, die an beliebiger Stelle oberhalb oder unterhalb des Grundrisses gezeichnet wird, als Nulllinie.

Zur Darstellung von Bildpunkten, deren Original nicht in der Bildebene liegt, müssen zunächst die beiden im Endlichen liegenden Fluchtpunkte - der linke Fluchtpunkt F_L und rechte Fluchtpunkt F_R -

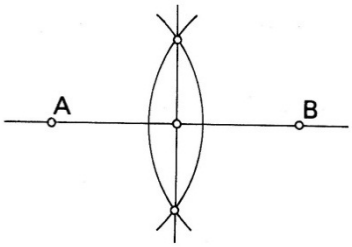
gefunden werden. Sie werden durch die zu den horizontalen Koordinatenrichtungen parallelen Sehstrahlen o_L und o_R lokalisiert. Die Bilder von o_L und o_R im Grundriss liefern die seitliche Lage der Fluchtpunkte. Die Höhenlage der Fluchtpunkte über der Grundlinie entspricht der gewünschten Höhe des Projektionszentrums über der Grundebene (Aughöhe a). Beide Fluchtpunkte liegen auf gleicher Höhe. Die durch sie laufende Gerade ist der Horizont h.

Die Höhenlage von Bildpunkten, deren Original nicht in der Bildebene liegt kann mittels eines Hilfspunktes Q gefunden werden. Der Hilfspunkt hat die gleiche Höhe t wie der jeweilige Objektpunkt, liegt aber in π. Das Bild des Hilfspunktes Q_P kann unmittelbar in die Perspektive eingezeichnet werden. Ausgehend von Q_P wird mit Hilfe von Fluchtstrahlen aus der Bildebene in die Tiefe gelotet. Hierzu genügt ein Fluchtstrahl, wenn der gesuchte Punkt und Q in der gleichen Objektebene liegen. Ansonsten ist als Zwischenschritt ein weiterer Hilfspunkt R erforderlich, der auf der gleichen Höhe t wie der Punkt P und der Hilfspunkt Q liegt und sowohl mit P als auch mit Q je eine gemeinsame Objektebene hat. Der Fluchtstrahl von Q_P auf den einen der beiden Fluchtpunkte liefert im Schnittpunkt mit dem Ordner über R_P' den Bildpunkt R_P, der Fluchtstrahl von R_P auf den anderen der beiden Fluchtpunkte liefert im Schnittpunkt mit dem Ordner über P_P' den gesuchten Bildpunkt P_P.

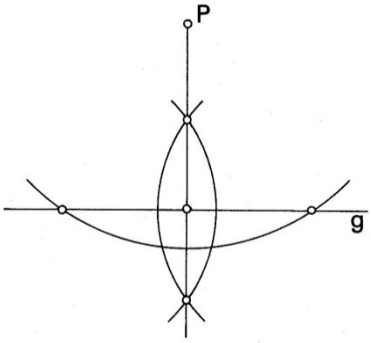
F Anhang

Geometrische Grundkonstruktionen

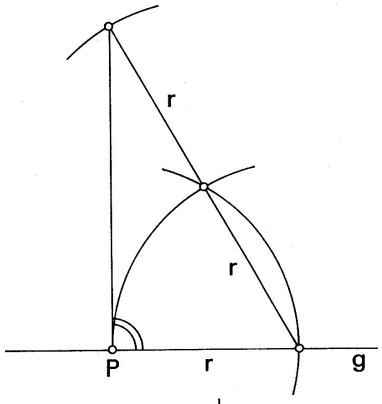
Halbieren der Strecke AB

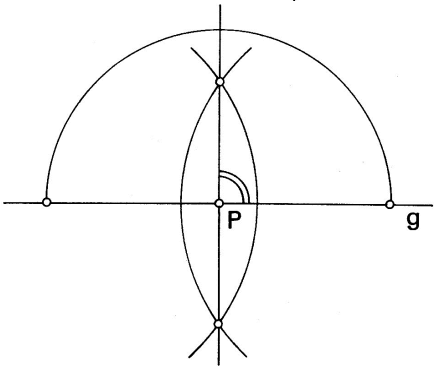


Lot von Punkt P auf die Gerade g

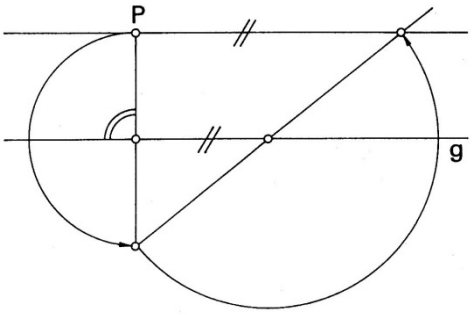


Senkrechte zur Geraden g im Punkt P

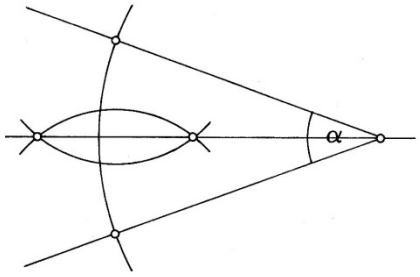




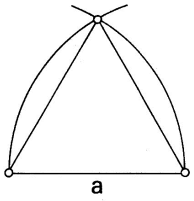
Parallele zur Geraden g durch den Punkt P



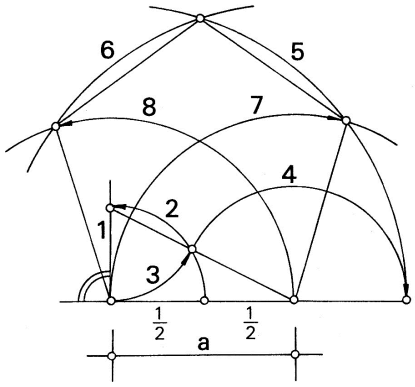
Halbieren des Winkels α



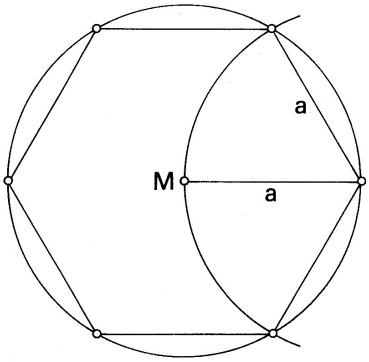
Regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge a



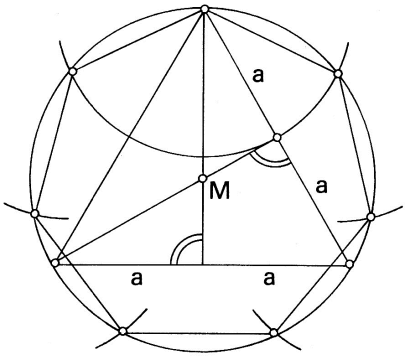
Regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge a



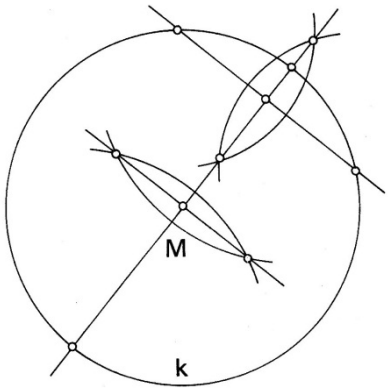
Regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a



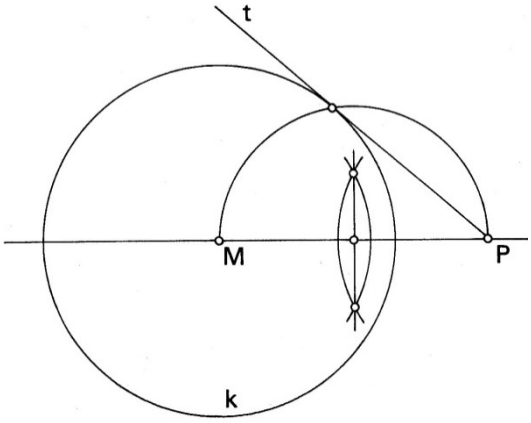
Regelmäßiges Siebeneck mit der Seitenlänge a (Näherung)



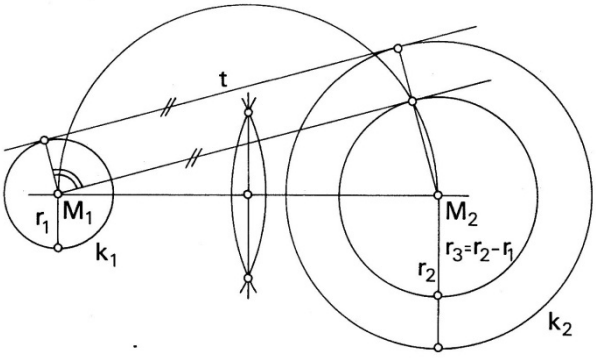
Mittelpunkt M des Kreises k



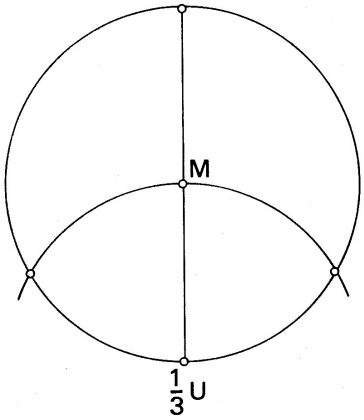
Tangente t von Punkt P an den Kreis k



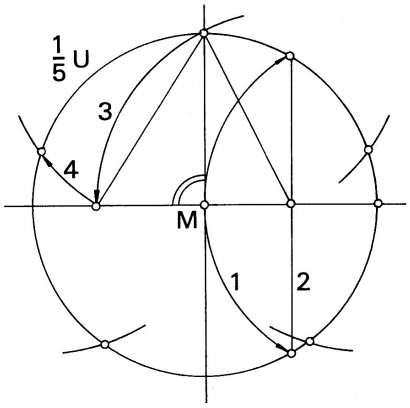
Gemeinsame Außentangente t an die Kreise k_1 und k_2



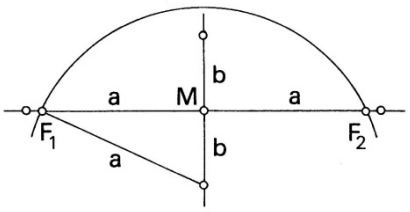
Teilung des Kreisumfangs in drei gleiche Teile



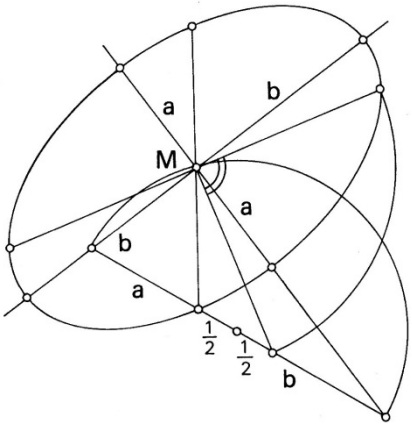
Teilung des Kreisumfangs in fünf gleiche Teile



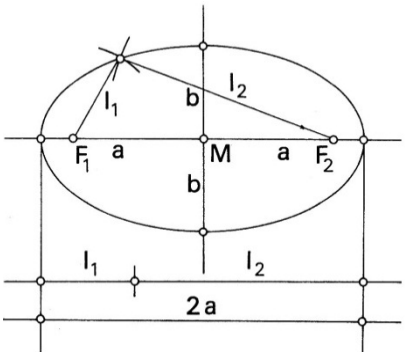
Bestimmung der Brennpunkte einer Ellipse



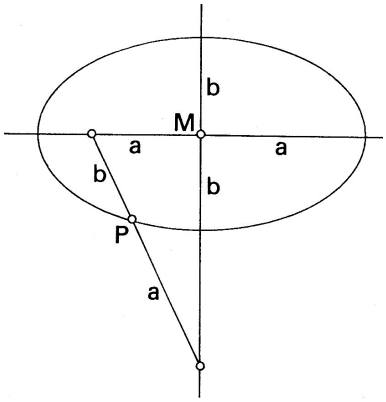
Bestimmung der Ellipsenachsen nach Rytz



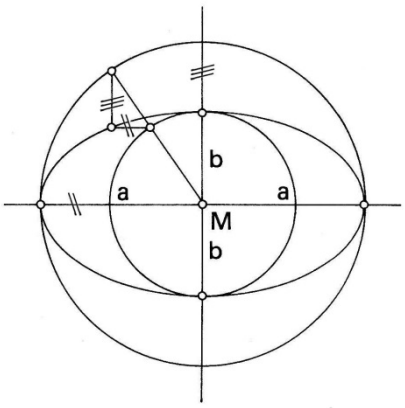
Gärtner-Ellipsenkonstruktion



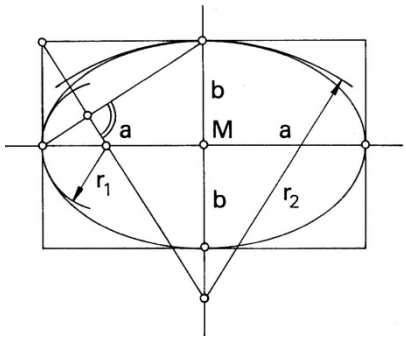
Papierstreifen-Ellipsenkonstruktion



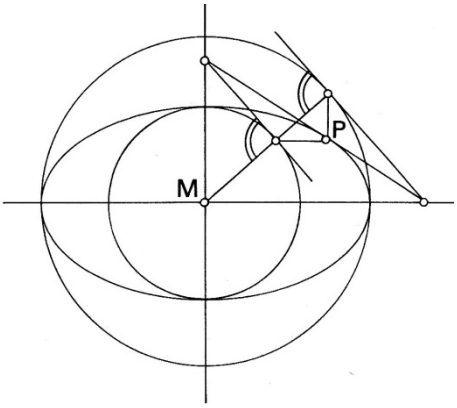
Scheitelkreis-Ellipsenkonstruktion



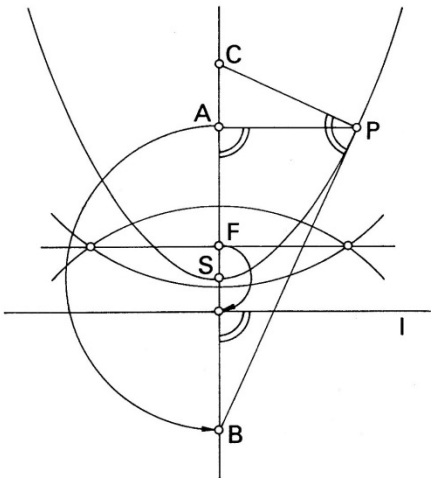
Krümmungskreiskonstruktion



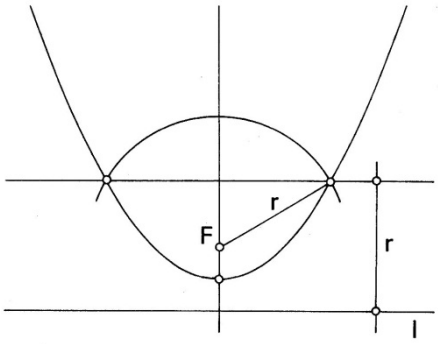
Tangente t im Punkt P an einer Ellipse



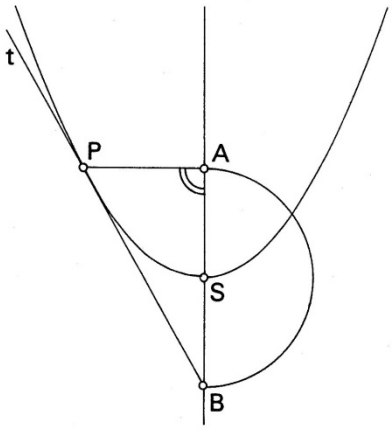
Bestimmung von Brennpunkt und Leitlinie einer Parabel



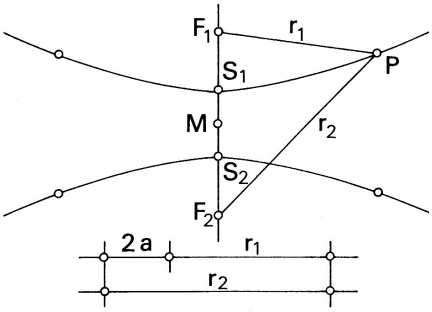
Punktweise Parabelkonstruktion



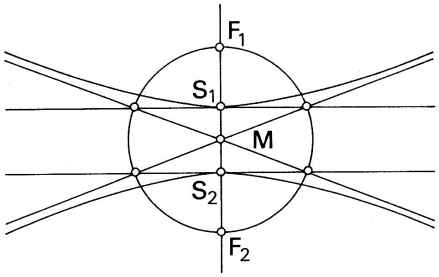
Tangente t im Punkt P an eine Parabel



Punktweise Hyperbelkonstruktion



Bestimmung der Asymptoten einer Hyperbel



Bezeichnungen und Symbole, Zeichenmaterial

Bezeichnungen

Punkte: P_1, P_2, P_3...; A, B, C...; 1, 2, 3...
Durchstoßpunkt, Spurpunkt: G
Mittelpunkt: M
Scheitel: S
Geraden: g_1, g_2, g_3...; a, b, c...
Rissachsen: $x_{1,2}$, $x_{2,3}$
Spurgeraden: s_1, s_2, s_3...
Höhengeraden: h_1, h_2, h_3...; 0, 1, 2...
Frontgeraden: v_1, v_2, v_3...
Fallgeraden: f_1, f_2, f_3...
Strecken: AB, AC, BC
Ebenen: E_1, E_2, E_3...
Projektionsebenen: π_1, π_2, π_3...
Polygone: ABC, ABCD...
Kreise, Kegelschnitte: k_1, k_2, k_3...
Kartesische Koordinaten: x, y, z.
Länge: l
Höhe: h
Radius: r
Winkel: α, β...

Symbole

Parallele: //
90°-Winkel:

Linienarten

Körperkanten geschnitten: kräftige Volllinie
Körperkanten sichtbar: mittlere Volllinie
Körperkanten verdeckt: feine gestrichelte Linie
Achsen: feine strichpunktierte Linie
Hilfslinien: sehr feine Volllinie

Zeichenmaterial

Fallminenbleistift Härte HB
Buntstifte
Bleistiftspitzer für Fallminenstifte
Bleistiftspitzer für Buntstifte
Geodreieck
Zirkel
Radiergummi