

Musterlösung

Statik 1

Probeklausur 1

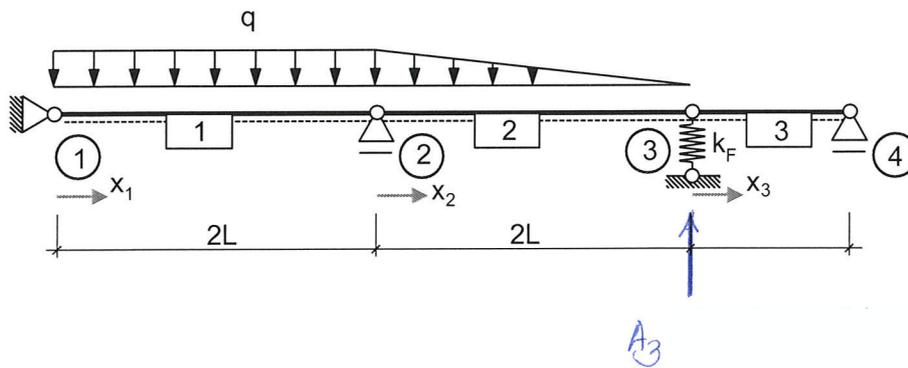
Bearbeitungszeit: 73 Minuten

Aufgabe	Punkte	
	max.	erreicht
1	16	
2	18	
3	18	
4	21	
Σ	73	

Aufgabe 1

(16 Punkte)

Gegeben ist das folgende System mit einer Belastung q .



$$q = 4 \text{ MN/m}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

$$k_F = 5.000 \text{ MN/m}$$

$$EI = 10.000 \text{ MNm}^2$$

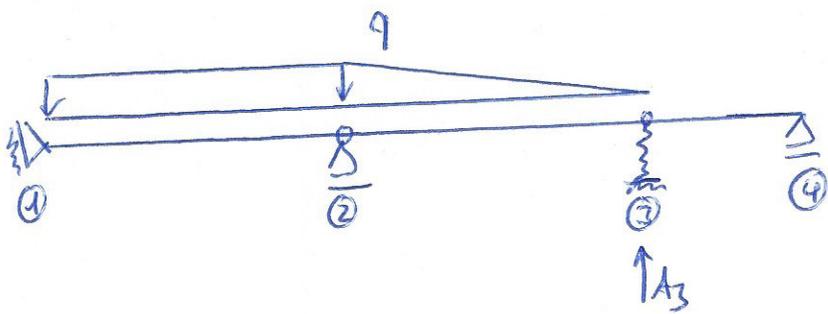
$$EA \rightarrow \infty$$

$$H = 0,20 \text{ m}$$

$$\alpha_T = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

- Bestimmen Sie unter Verwendung der Mohrschen Analogie die Biegelinie des Systems unter Angabe der charakteristischen Werte.
- Geben Sie die Formeln des Funktionsverlaufs der Biegelinie des abgebildeten Systems in den Stäben 2 und 3 an ($w(x_2)$ und $w(x_3)$).
- Bestimmen Sie für den Stab 3 zusätzlich den Funktionsverlauf der Verdrehung φ ($\varphi(x_3)$).
- Was würde eine zusätzliche Temperaturdifferenz $\Delta T = T_U - T_O$ im Stab 3 bewirken? Geben Sie eine kurze Begründung.
Hinweis: Keine Rechnung nötig.

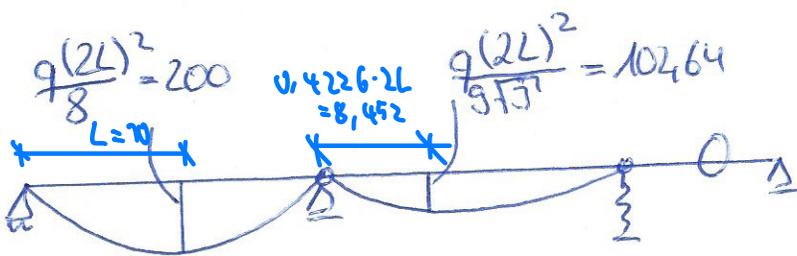
Aufgabe 1



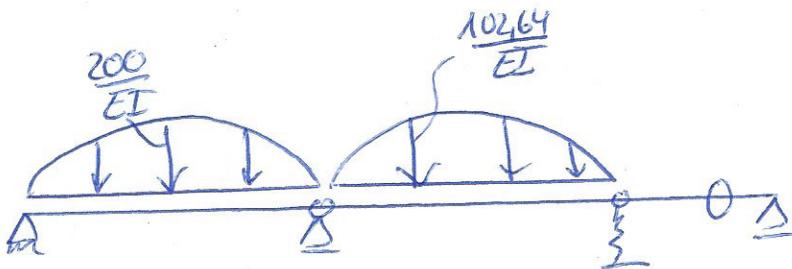
a)

$$A_3 = \frac{\frac{1}{2} q \cdot 2L \cdot \frac{1}{3} \cdot 2L}{2L} = \frac{1}{3} qL = \frac{40}{3}$$

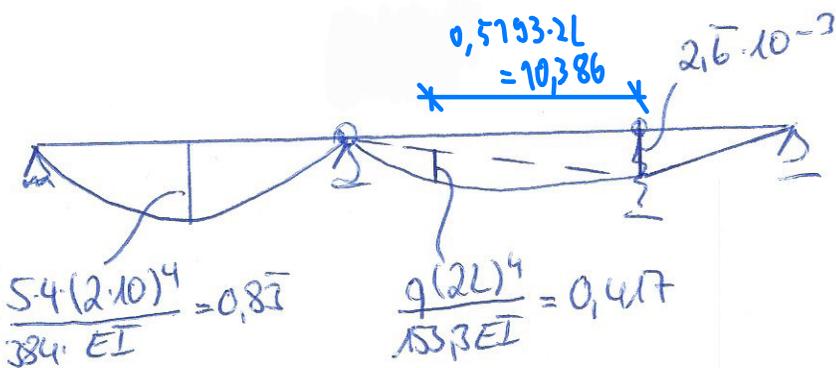
$$k_F = \frac{F}{w} \quad \rightarrow \quad w_3 = \frac{F}{k_F} = \frac{40/3}{5000} = 2,6 \cdot 10^{-3}$$



(M)



(q*)



(w)

$$\begin{aligned}
 b) \quad w(x_2) &= 2,6 \cdot 10^{-3} \left(\frac{x}{2L} \right) + \frac{q \cdot (2L)^4}{360EI} \left(7 \cdot \left(\frac{2L-x}{2L} \right) - 10 \cdot \left(\frac{2L-x}{2L} \right)^3 \right. \\
 &\quad \left. + 3 \cdot \left(\frac{2L-x}{2L} \right)^5 \right) = \\
 &= 2,6 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{x}{20} + \frac{8}{45} \cdot \left[7 \cdot \left(\frac{20-x}{20} \right) - 10 \cdot \left(\frac{20-x}{20} \right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{20-x}{20} \right)^5 \right]
 \end{aligned}$$

$$w(x_3) = 2,6 \cdot 10^{-3} \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$c) \quad \varphi(x_3) = -w'(x_3) = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{10} = 2,6 \cdot 10^{-4}$$

d) statisch bestimmtes System

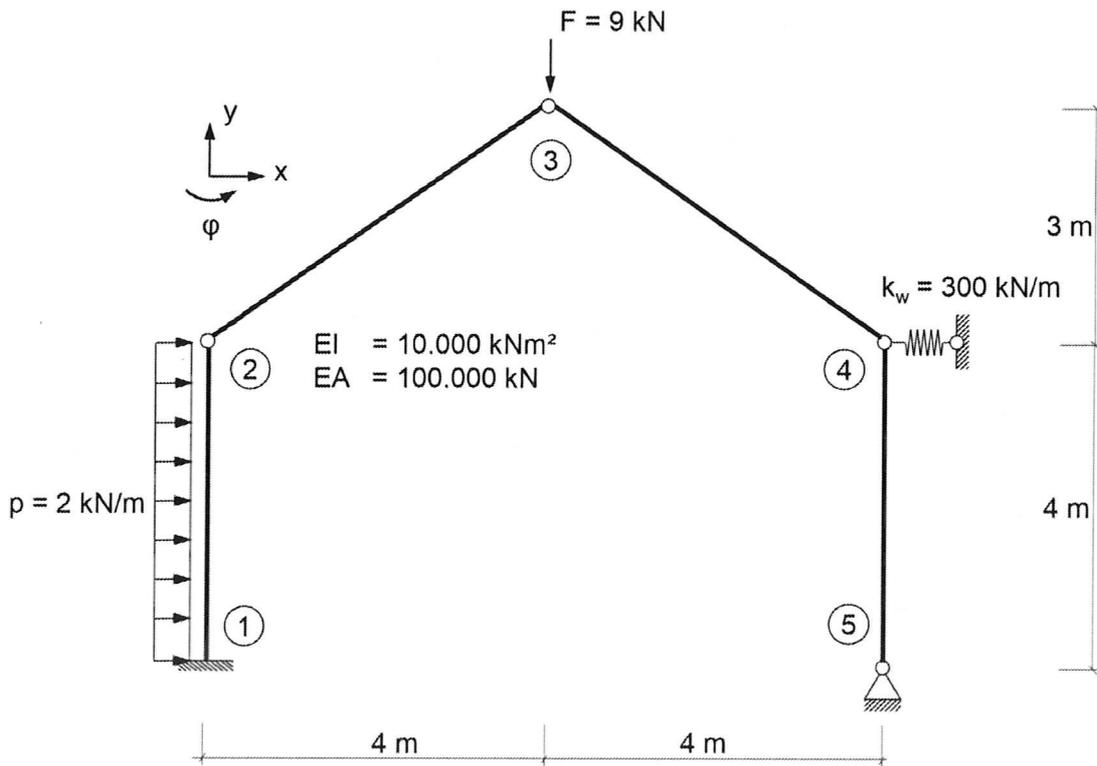
→ Randverformungen & SGR bleiben unverändert

→ ΔT bewirkt Temperaturkrümmung κ_T im Stab 3

→ $w(x_3)$ und $\varphi(x_3)$ verändern sich.

Aufgabe 2

(18 Punkte)

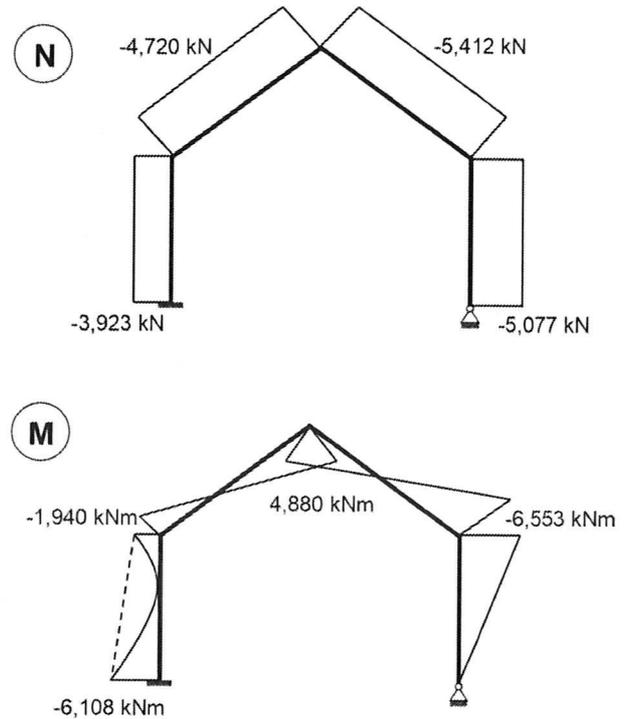
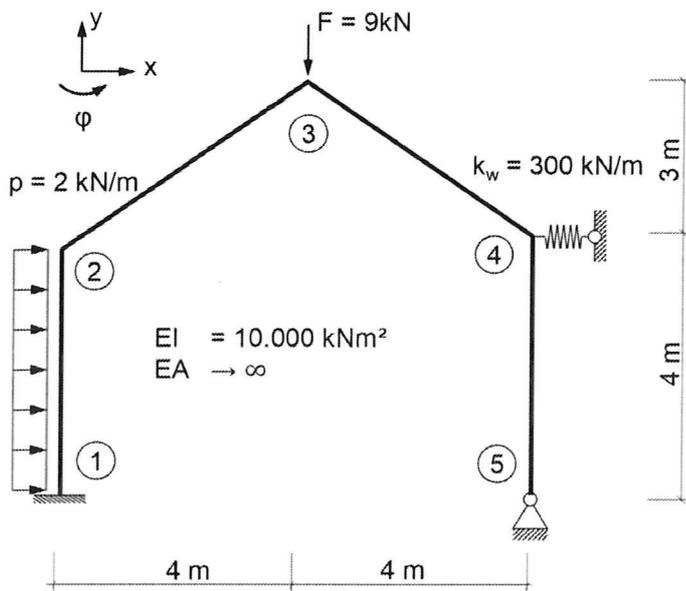


Das oben abgebildete System wird durch die Last p sowie durch die Kraft F belastet.

- Bestimmen Sie die horizontale Verschiebung des Punktes 3 unter der gegebenen Belastung durch Anwendung des **Prinzips der virtuellen Kräfte**.
- Erklären Sie, welche Auswirkungen eine Änderung von EA auf die horizontale Verschiebung des Punktes 3 hat.
Hinweis: keine Rechnung benötigt.

Fortsetzung Aufgabe 2

Im Zuge der Planungsphase werden die Gelenke an den Knoten 2 bis 4 durch starre Verbindungen ersetzt und das System dehnstarr ausgeführt ($EA \rightarrow \infty$). Das entsprechende statische System sowie Auszüge aus der Berechnung mittels eines Stabwerksprogrammes sind im Folgenden dargestellt:



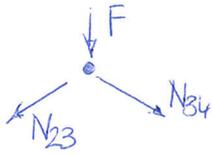
Knoten	u	v	φ
2	0,001642	0,0	-0,0005429
4	0,004399	0,0	-0,0002260
5	0,0	0,0	-0,001537

c) Berechnen Sie für das neue System die horizontale Verschiebung des Punktes 3.

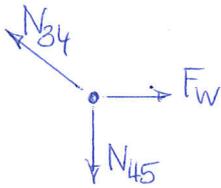
Aufgabe 2

a)

Real

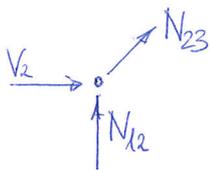


$$\begin{aligned} \sum F_x &= \frac{4}{5} N_{34} - \frac{4}{5} N_{23} = 0 \rightarrow N_{23} = N_{34} \\ \sum F_y &= -F - \frac{3}{5} N_{23} - \frac{3}{5} N_{34} = 0 \rightarrow N_{23} = N_{34} \\ &= -\frac{5}{6} F = -7.5 \end{aligned}$$



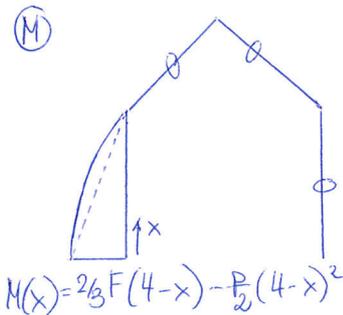
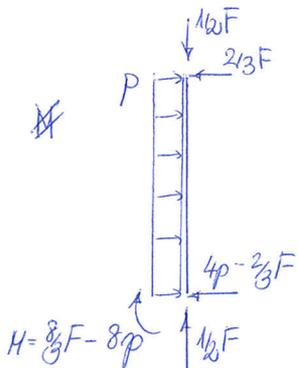
$$\sum F_x = F_W - \frac{4}{5} N_{34} = 0 \Rightarrow F_W = \frac{4}{5} N_{34} = -\frac{2}{3} F = -6$$

$$\sum F_y = \frac{3}{5} N_{34} - N_{45} = 0 \Rightarrow N_{45} = \frac{3}{5} N_{34} = -\frac{1}{2} F = -4.5$$

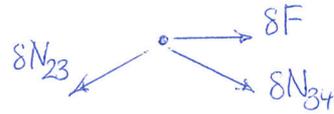


$$\sum F_x = V_2 + \frac{4}{5} N_{23} = 0 \Rightarrow V_2 = -\frac{4}{5} N_{23} = \frac{2}{3} F = 6$$

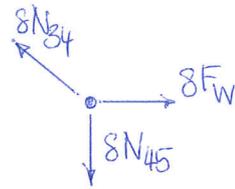
$$\sum F_y = \frac{3}{5} N_{23} + N_{12} = 0 \Rightarrow N_{12} = -\frac{3}{5} N_{23} = \frac{1}{2} F = 4.5$$



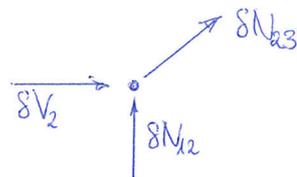
Virtuell



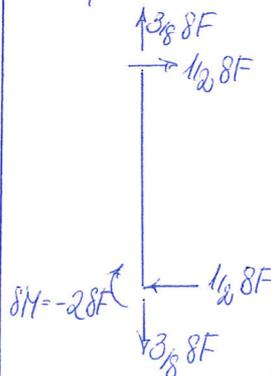
$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &: \delta N_{23} = -\delta N_{34} \\ \sum F_x = 0 &: \delta N_{23} = -\delta N_{34} = \frac{5}{8} \delta F \end{aligned}$$



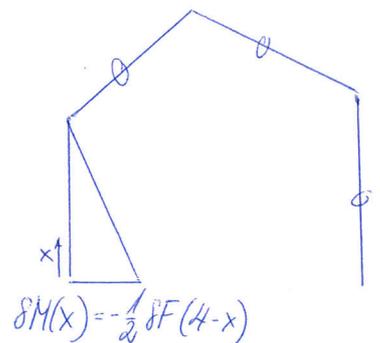
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: \delta F_W = \frac{4}{5} \delta N_{34} = -\frac{1}{2} \delta F \\ \sum F_y = 0 &: \delta N_{45} = \frac{3}{5} \delta N_{34} = -\frac{3}{8} \delta F \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: \delta V_2 = -\frac{4}{5} \delta N_{23} = -\frac{1}{2} \delta F \\ \sum F_y = 0 &: \delta N_{12} = -\frac{3}{5} \delta N_{23} = -\frac{3}{8} \delta F \end{aligned}$$



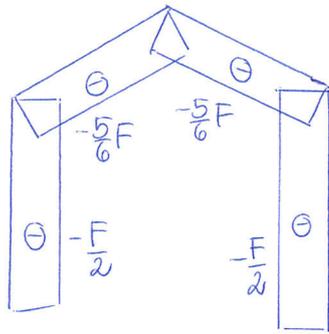
(SM)



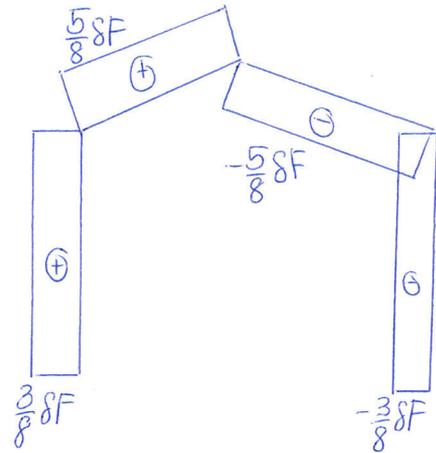
Real

Virtuell

(N)



(8N)



$$\delta W = \frac{1}{EJ} \int M \delta M dx + \underbrace{\frac{1}{EA} \int N \delta N dx}_{=0} + \frac{F_w}{k_w} \delta F_w - u \delta F = 0$$

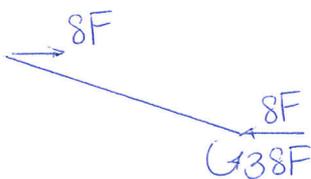
$$= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{3} F \delta F \int_0^4 (4-x)^2 dx + \frac{1}{4} p \delta F \int_0^4 (4-x)^3 dx \right] + \frac{38F}{300} - u \cdot \delta F$$

$$= \frac{8F}{10000} \left[-3 \cdot 21,3 + 0,5 \cdot 64 \right] + \frac{1}{100} \delta F - u \cdot \delta F = 0$$

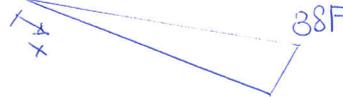
$$\Rightarrow u = \underline{\underline{0,00681 \text{ m}}}$$

b) $\frac{1}{EA} \int N \delta N dx = 0 \Rightarrow$ keine Auswirkungen!

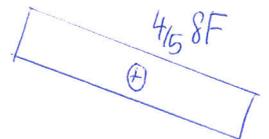
c)



(SM)



(8N)



$$u \delta F - (0,004399) \delta F + 3 \cdot (-0,000226) \cdot \delta F = \frac{1}{EJ} \int_0^5 \left(\frac{3}{5} \times 8F \right) \left(4,880 + \frac{(-6,553 - 4,880)}{5} x \right) dx$$

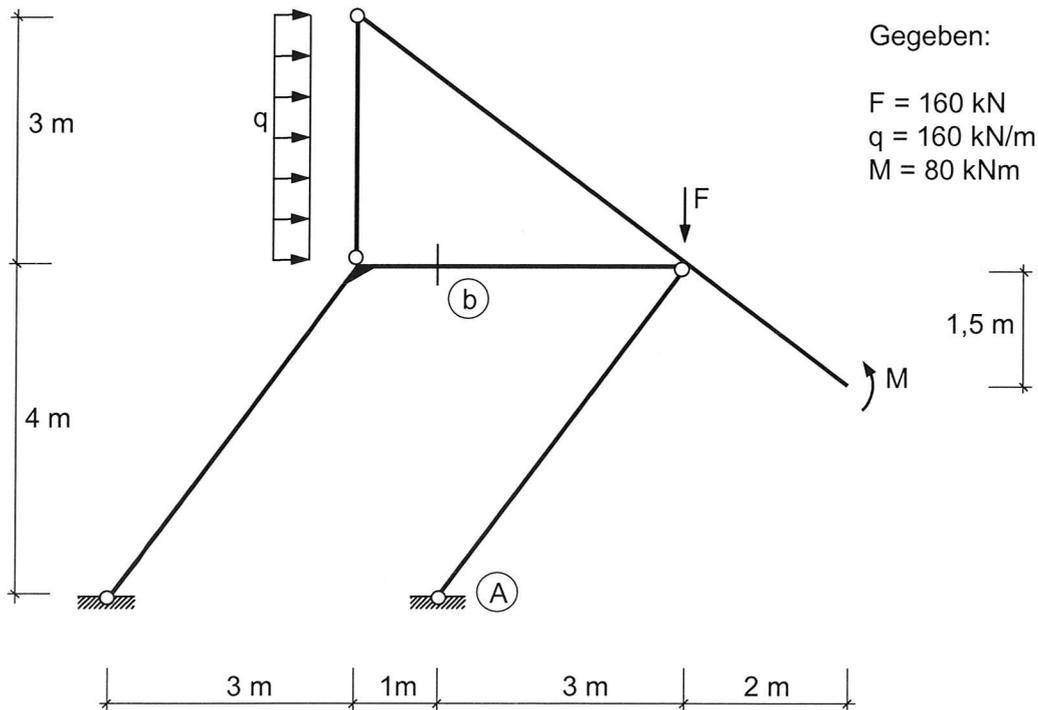
$$= -0,002056$$

$$\Rightarrow u = \underline{\underline{0,00302 \text{ m}}}$$

Aufgabe 3

(18 Punkte)

Gegeben ist das folgende System:



Bestimmen Sie mittel des **Prinzips der virtuellen Verschiebungen (PvV)**:

- a) die horizontale Auflagerkraft A_H am Punkt A
- b) die Normalkraft N_b an der Stelle b

Verwenden Sie für Teilaufgabe c) **nicht** das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

- c) Bestimmen Sie die vertikale Auflagerkraft A_V am Punkt A unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

$$\varphi_1 = a/4 \quad R = 3a$$

$$\varphi_2 = b/4$$

$$a - b = \bar{1}$$

Ermittlung von l_1 : $\frac{3}{7} = \frac{4}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{28}{3}$

Ermittlung von m und n : $\frac{n}{m} = \frac{3}{16/3} \Rightarrow 9m = 16n$
 $m = \frac{16n}{9}$ $\left. \begin{array}{l} m = 27/25 \\ m = 48/25 \end{array} \right\}$
 $m + n = 5$

Ermittlung der Drehwinkel um Hauptpole:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_4 = \frac{9b/28}{27/25} = \frac{25b}{84} \\ \varphi_4 = \frac{3a/4}{27/25} = \frac{25a}{36} \end{array} \right\} \frac{25b}{84} = \frac{25a}{36} \Rightarrow a = \frac{3}{17}b$$

$$\left. \begin{array}{l} b = -\bar{7}/4 \\ a = -\bar{3}/4 \\ a - b = \bar{1} \end{array} \right\}$$

$$\varphi_5 = \frac{3b}{28} = \frac{\bar{3}}{16}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\bar{7}}{28}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\bar{3}}{16}$$

$$\varphi_4 = -\frac{\bar{25}}{48}$$

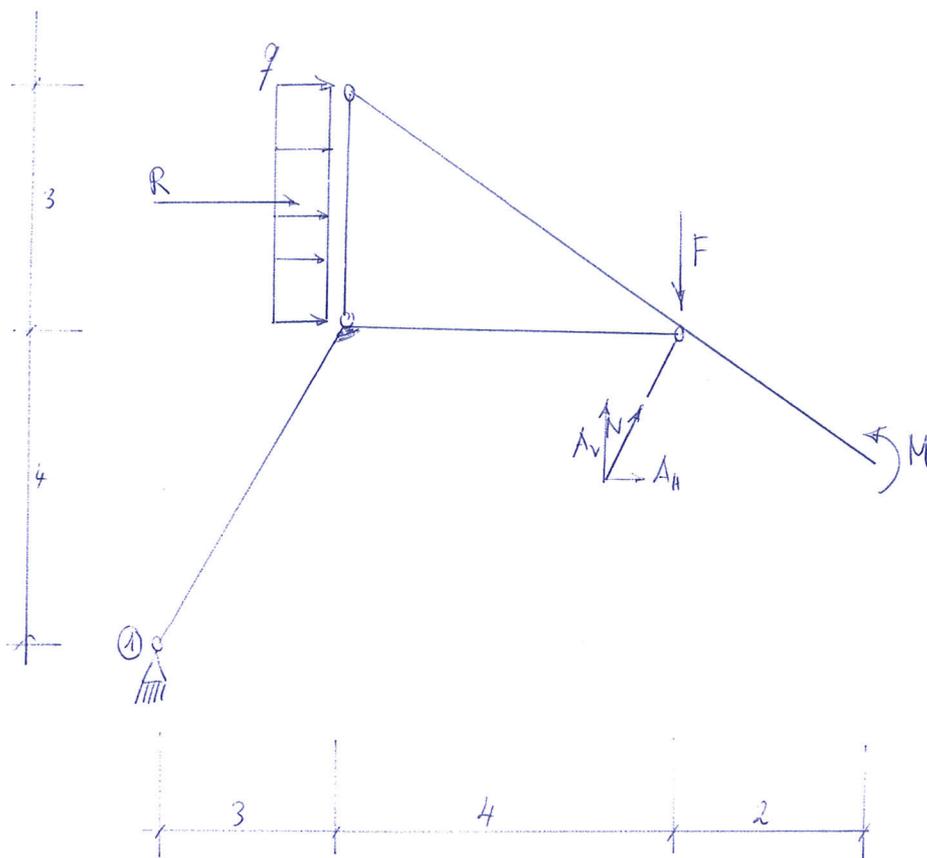
Ermittlung von N_3 :

$$-N \cdot \bar{1} = R \cdot \left(-\frac{\bar{37}}{16} - \frac{\bar{12}}{16} \right) \cdot \frac{1}{2} + F \cdot \left(-\frac{\bar{21}}{16} \right) + M \cdot \left(+\frac{\bar{3}}{16} \right)$$

$$N = R \cdot \frac{49}{32} + F \cdot \frac{21}{16} - M \cdot \frac{3}{16}$$

$$N = 735 + 210 - 15$$

$$N = \underline{\underline{930 \text{ kN}}}$$



$$\sum M_A = 0: M - R \cdot 5,5 - F \cdot 7 - A_H \cdot 4 + 7 \cdot A_V = 0$$

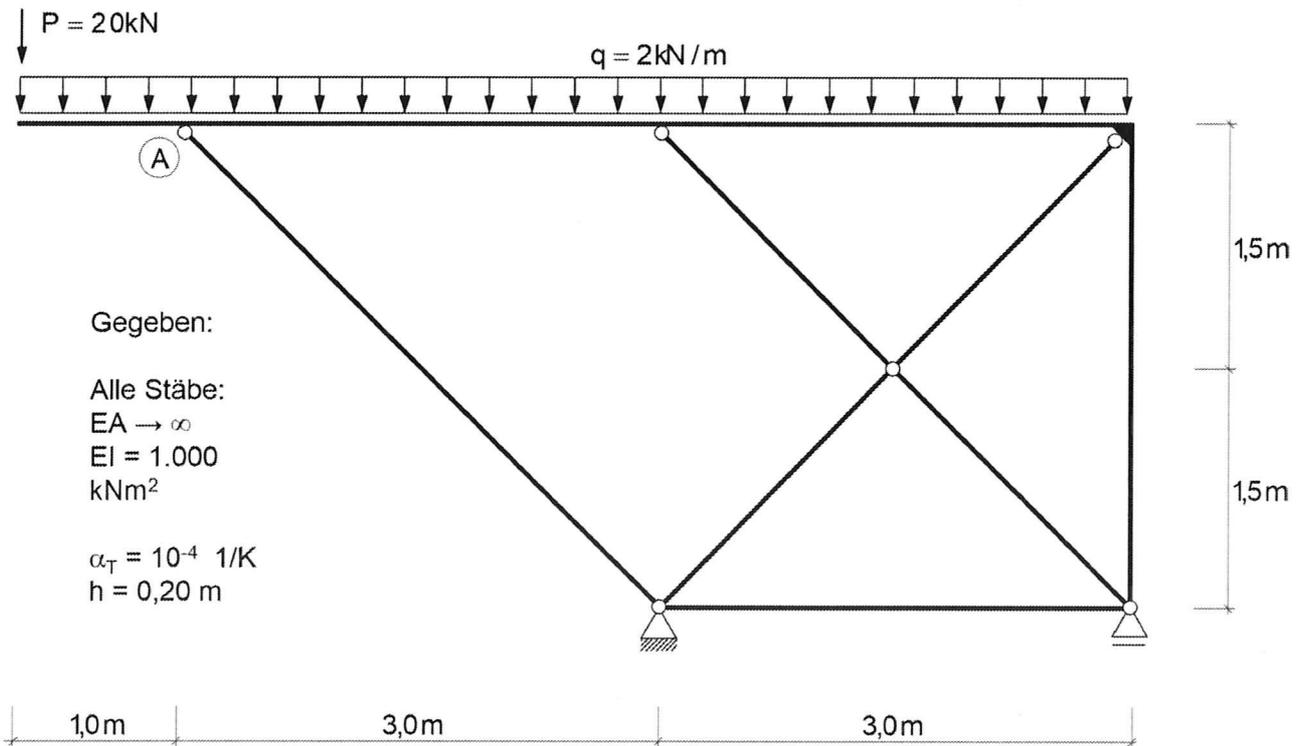
$$\Rightarrow 80 - 2640 - 1120 - 2760 + 7A_V = 0$$

$$\Rightarrow A_V = \underline{\underline{920 \text{ kN}}}$$

Aufgabe 4

(21 Punkte)

Eine Brücke mit fachwerkartiger Unterstützung ist mit einer Gleichstreckenlast belastet.



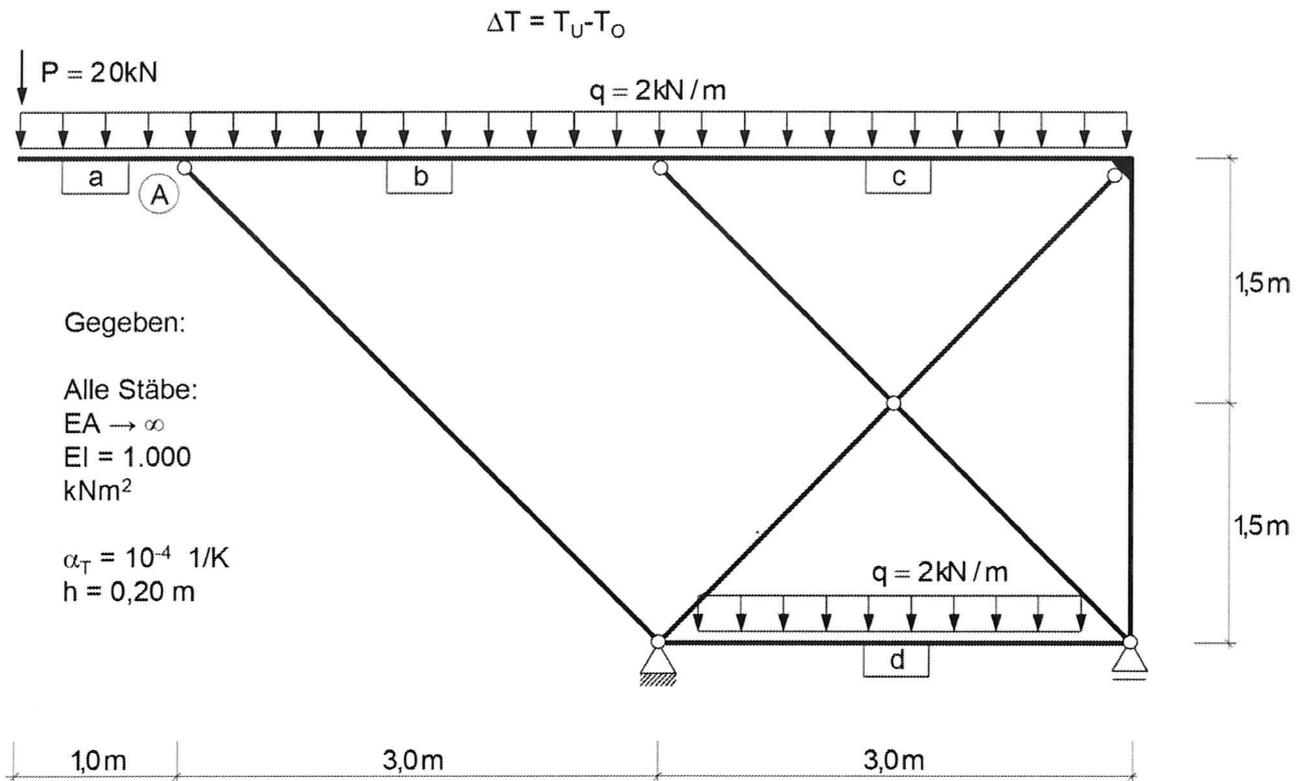
- Überprüfen Sie die statische Bestimmtheit und Brauchbarkeit mit dem Aufbaukriterium
- Berechnen Sie den Momentenverlauf für das gegebene System mit dem **Kraftgrößenverfahren**. Stellen Sie den Momentenverlauf grafisch dar und geben Sie charakteristische Werte an.
- Bestimmen Sie die vertikale Verformung am Knoten A.

Fortsetzung Aufgabe 4

d) Berechnen Sie den Momentenverlauf für den Fall, dass ein Temperaturunterschied und eine zusätzliche Gleichstreckenlast hinzugefügt werden (siehe Grafik):

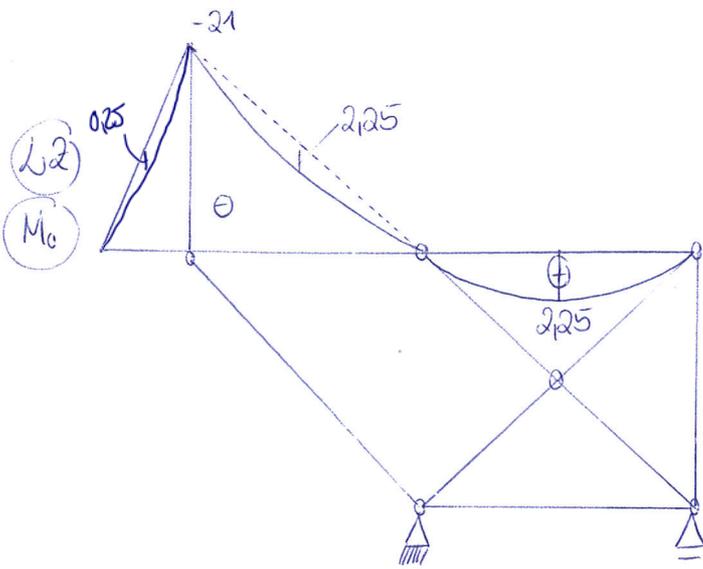
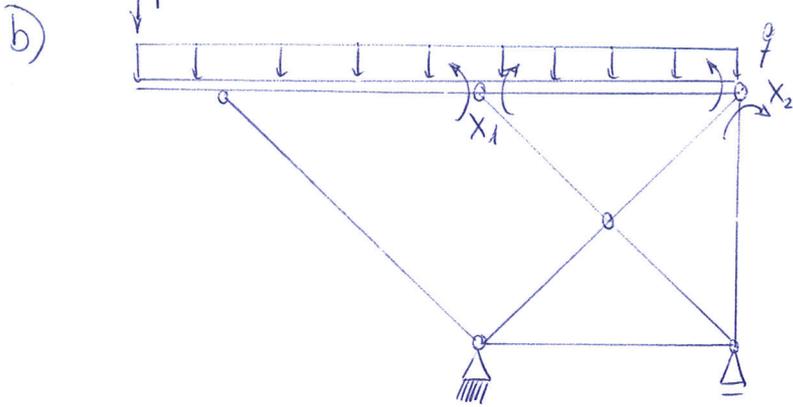
- Temperaturunterschied ΔT auf den Elementen a, b und c:
 $\Delta T = T_U - T_O = -40 \text{ K}$
- Gleichstreckenlast auf dem Element d

Stellen Sie den Momentenverlauf grafisch dar und geben Sie die charakteristischen Werte an.

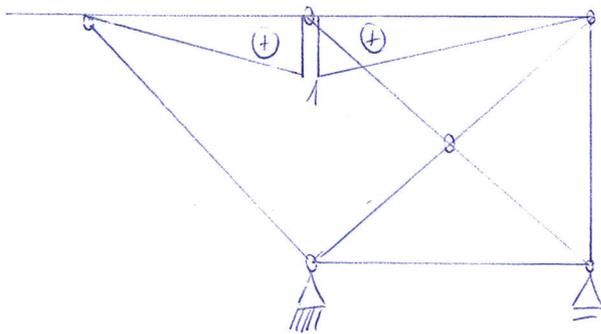


Aufgabe 4

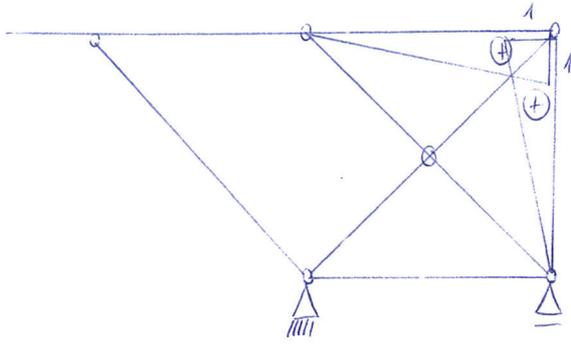
a) $n = 2$



EZ1: M_1



EZ2: M_2



$$EJd_{10} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2,25 \cdot 1 \cdot 3 \right) - \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = -6$$

$$EJd_{20} = \frac{1}{3} \cdot 2,25 \cdot 1 \cdot 3 = 2,25$$

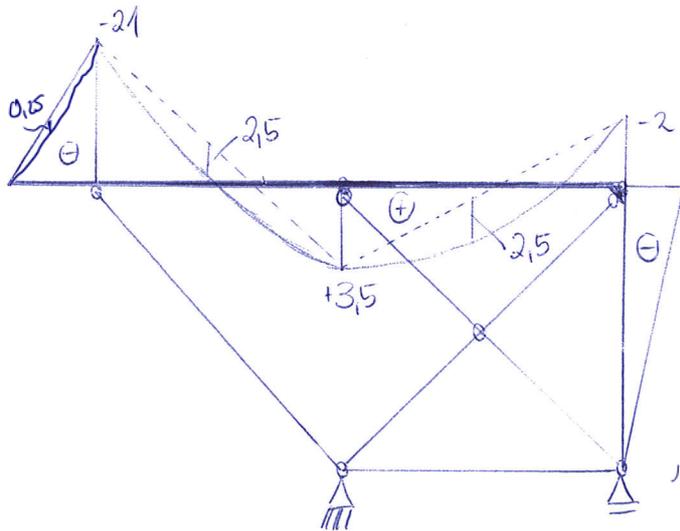
$$EJd_{11} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 2$$

$$EJd_{12} = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{1}{2} = EJd_{21}$$

$$EJd_{22} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} EJd_{11} & EJd_{12} \\ EJd_{21} & EJd_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -EJd_{10} \\ -EJd_{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2,25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= 3,5 \text{ kNm} \\ X_2 &= -2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

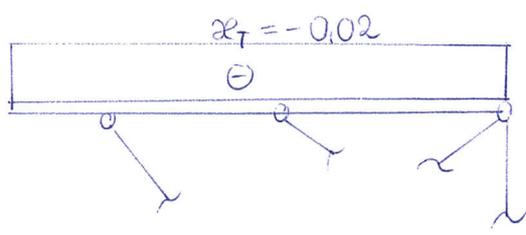


c) $w=0$, da $EA \rightarrow \infty$

d) Krümmung bei Temperaturlast:

$$\alpha_T = \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot (-40)}{0,2} = -0,02$$

↳ nur neuer Lastzustand:



$$\hookrightarrow E J d_{10} = -6 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,02 \cdot 1 \right) \cdot 1000 = -66$$

$$E J d_{20} = 2,25 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,02 \cdot 1 \cdot 1000 = -27,75$$

$$\hookrightarrow X_1 = 31,5 \text{ kNm}$$

$$X_2 = 6 \text{ kNm}$$

