

Musterlösung

# Statik 1

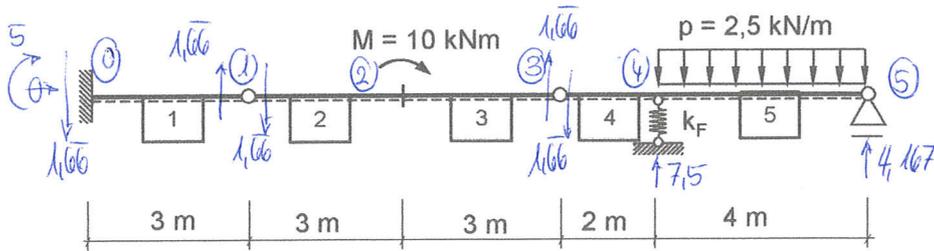
## Probeklausur 3

Bearbeitungszeit: 72 Minuten

Aufgabe	Punkte	
	max.	erreicht
1	13	
2	12	
3	11	
4	16	
5	20	
$\Sigma$	<b>72</b>	

**Aufgabe 1**

(13 Punkte)



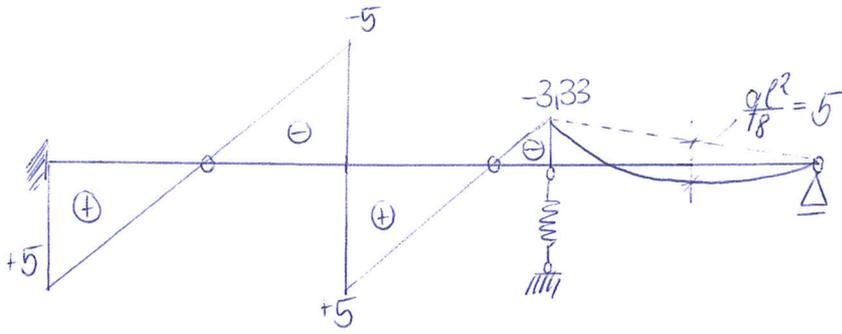
$k_F = 2.000 \text{ MN/m}$   
 $= 2 \cdot 10^6 \text{ kN/m}$   
 $EI = 2.000 \text{ MNm}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$   
 $EA \rightarrow \infty$

- Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Biegelinie. Geben Sie die Verschiebungen der einzelnen Knoten an.
- Geben Sie die Formeln des Funktionsverlaufs der Biegelinie des abgebildeten Systems in den Stäben 4 und 5 an ( $w(x_4)$  und  $w(x_5)$ ). Nutzen Sie die Mohrsche Analogie!

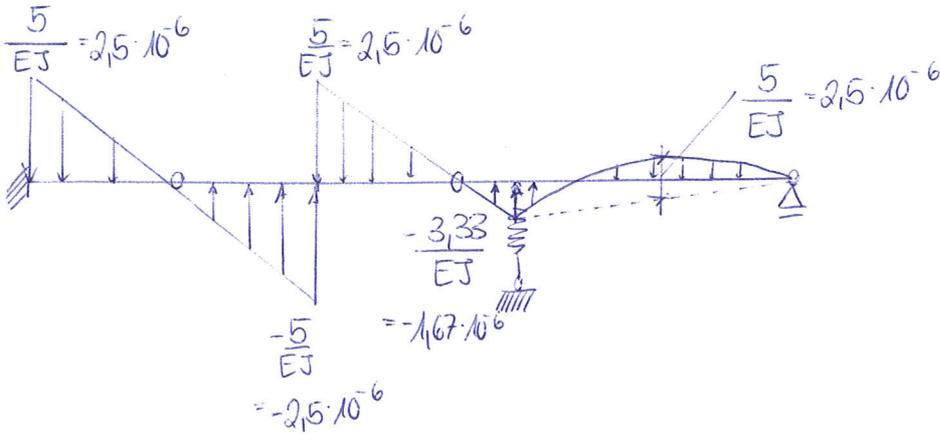
# Aufgabe 1

a)

(M)

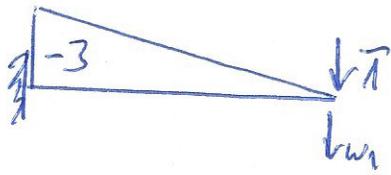


( $\varphi^*$ )



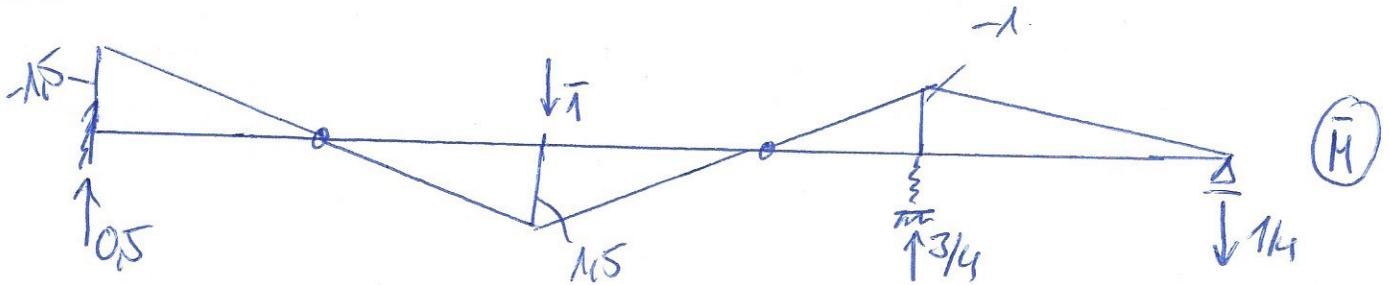
# Ermittlung der charakteristischen Werte

w<sub>1</sub>:



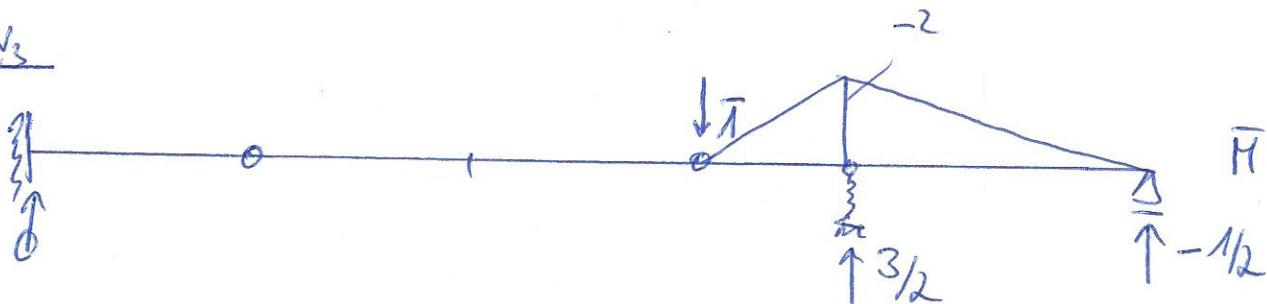
$$\bar{\pi} \cdot w_1 = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot 5 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 3 = -7,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

w<sub>2</sub>:



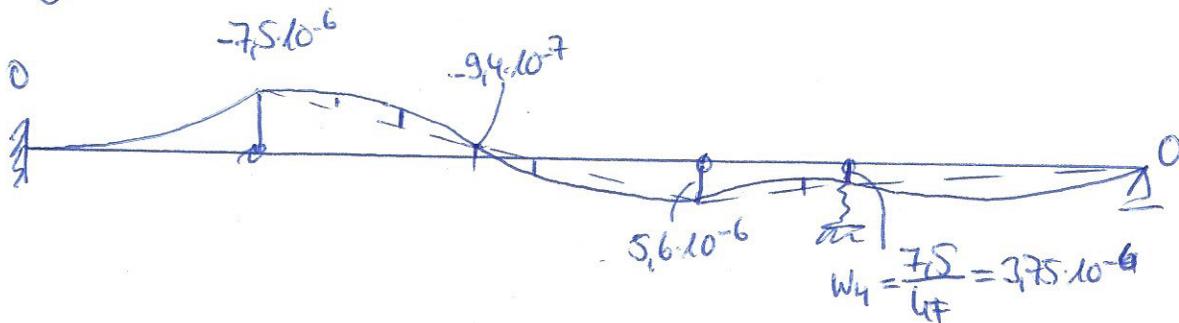
$$\begin{aligned} \bar{\pi} \cdot w_2 &= -\frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} + \frac{1}{3} \cdot 3,33 \cdot 1 \cdot \frac{2}{EI} \\ &+ \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3,33 \cdot \frac{4}{EI} - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{4}{EI} + \frac{3}{4} \cdot \frac{7,5}{k_F} = \\ w_2 &= -9,4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

w<sub>3</sub>:



$$\begin{aligned} \bar{\pi} \cdot w_3 &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3,33 \cdot \frac{2}{EI} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3,33 \cdot \frac{4}{EI} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{EI} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7,5}{k_F} \\ w_3 &= 5,6 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

## Biegelinie



b) Stab 4:

$$w_3 = 5,618 \cdot 10^{-6}$$

$$w_4 = 3,75 \cdot 10^{-6}$$

$$L = 2$$

$$w(x_4) = w_3 - \frac{w_3 - w_4}{L} \cdot x_4 + w_{\text{Biegung}}$$

$$= 5,618 \cdot 10^{-6} - \frac{5,618 - 3,75}{2} \cdot 10^{-6} \cdot x_4 + (-1,67 \cdot 10^{-6}) \cdot \frac{4}{6} \omega_D$$

$$= 5,618 \cdot 10^{-6} - 0,934 \cdot 10^{-6} \cdot x_4 - 1,113 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{x_4}{2} - \left( \frac{x_4}{2} \right)^3 \right]$$

Stab 5:

$$w_4 = 3,75 \cdot 10^{-6}$$

$$w_5 = 0$$

$$L = 4$$

$$w(x_5) = 3,75 \cdot 10^{-6} \left( 1 - \frac{x_5}{4} \right) + w_{\text{Biegung, } \uparrow \uparrow \uparrow} + w_{\text{Biegung, } \downarrow \downarrow \downarrow}$$

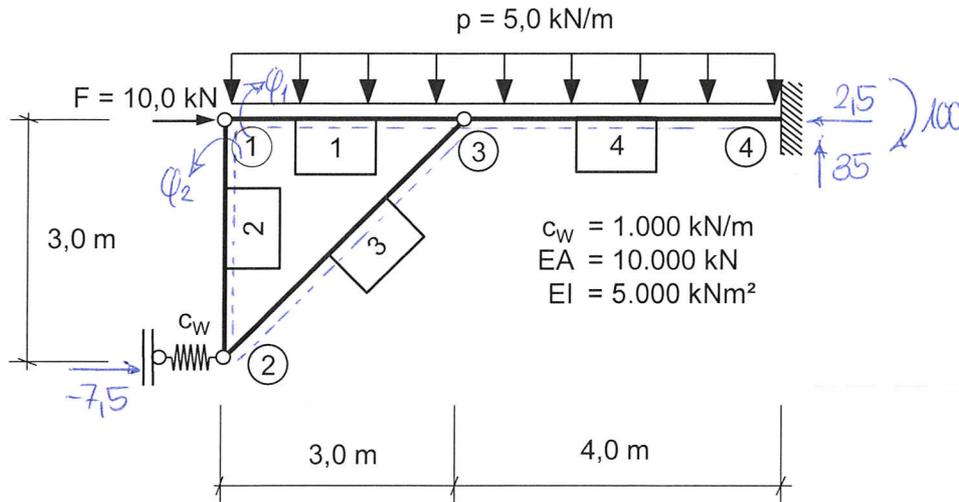
$$= 3,75 \cdot 10^{-6} \left( 1 - \frac{x_5}{4} \right) - 1,67 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{16}{6} \omega_D' + 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{16}{3} \omega_D$$

$$= 3,75 \cdot 10^{-6} \left( 1 - \frac{x_5}{4} \right) - 4,453 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{4 - x_5}{4} - \left( \frac{4 - x_5}{4} \right)^3 \right) + 13,33 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{x_5}{4} - 2 \left( \frac{x_5}{4} \right)^3 + \left( \frac{x_5}{4} \right)^4 \right)$$

## Aufgabe 2

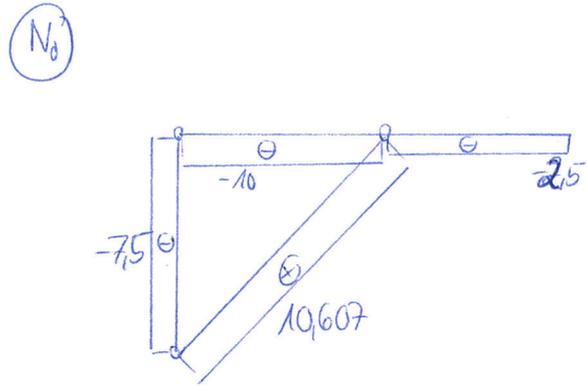
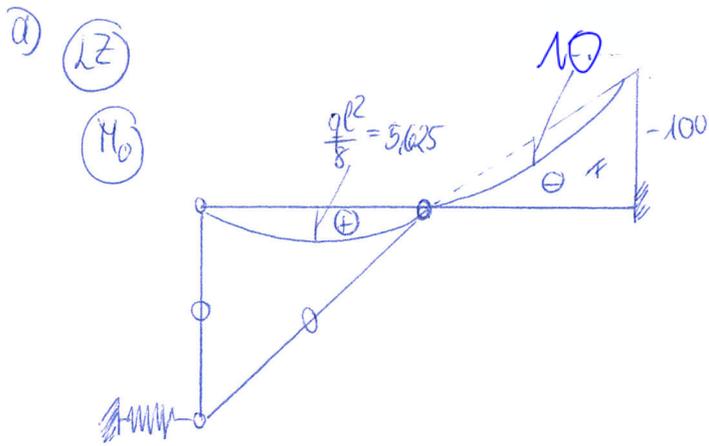
(12 Punkte)

Gegeben ist folgendes System:

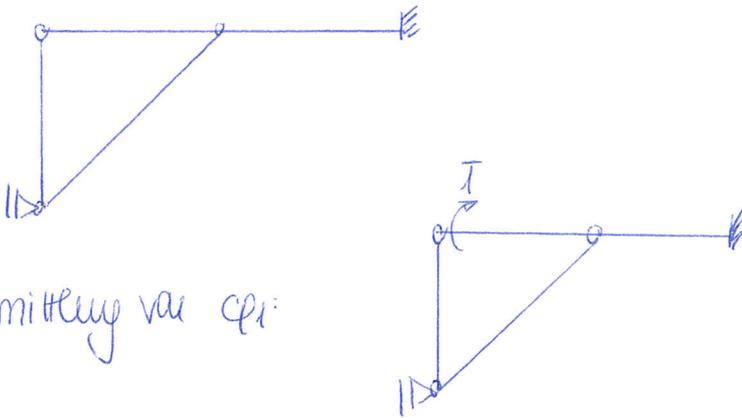


- Berechnen Sie die gegenseitige Verdrehung der Stäbe am Knoten 1 zueinander. Wenden Sie das **Prinzip der virtuellen Kräfte** (PvK) an.
- Geben Sie an, um wie viel sich der Stab 3 dehnt bzw. staucht.

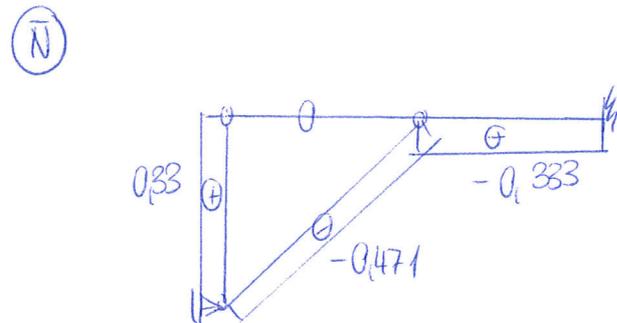
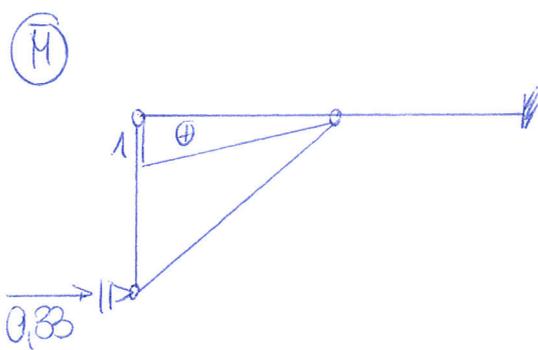
# Aufgabe 2



⇒ Wahl eines Ersatzsystems, welches im GG steht:



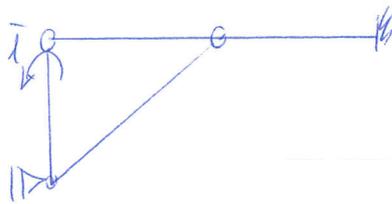
⇒ Ermittlung von  $\varphi_1$ :



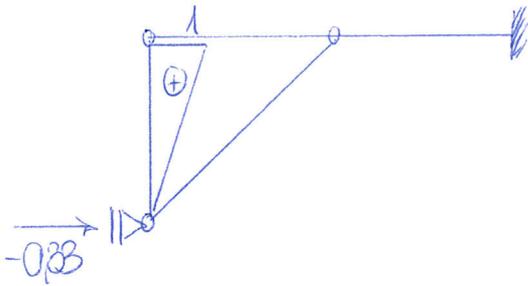
$$\bar{I} \varphi_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 5,625 \cdot \frac{3}{EJ} + 0,33 \cdot (-75) \cdot \frac{3}{EA} + 10,607 \cdot (-0,471) \cdot \frac{3\sqrt{2}}{EA} + (-0,33) \cdot (-2,5) \cdot \frac{4}{EA} + 0,33 \cdot \frac{(-75)}{c_w}$$

⇒  $\varphi_1 = -3,882 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

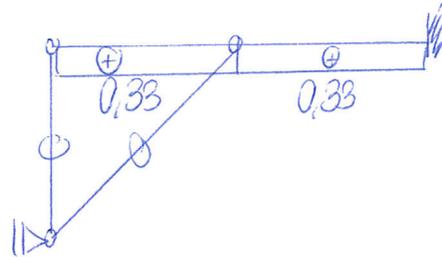
→ Ermittlung von  $\varphi_2$ :



(M)



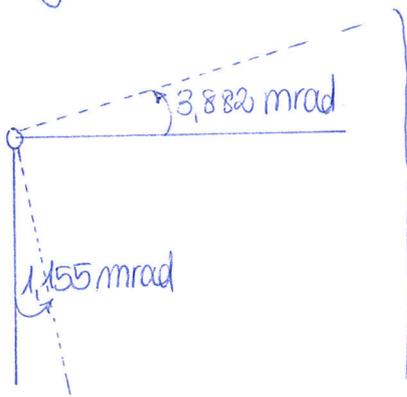
(N)



$$\bar{I} \cdot \varphi_2 = 0,33 \cdot (-10) \cdot \frac{3}{EA} + 0,33 \cdot (-215) \cdot \frac{4}{EA} + 0,33 \cdot 7,5 \cdot \frac{1}{c_w}$$

$$\hookrightarrow \varphi_2 = 1,155 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

→ Ermittlung von  $\Delta\varphi$ :



$$\Delta\varphi = 3,882 \text{ mrad} - 1,155 \text{ mrad} = \underline{\underline{2,73 \text{ mrad}}}$$

~~\_\_\_\_\_~~

b)

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

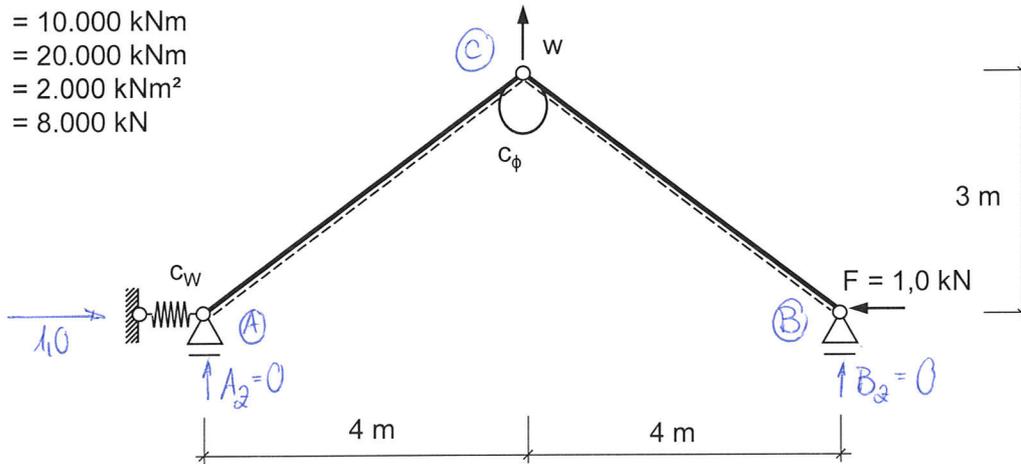
$$\hookrightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{EA} = \frac{10,607 \text{ kN} \cdot 3,2 \text{ m}}{10,000 \text{ kN}} = 4,5 \text{ mm} \Rightarrow \text{Stab 3 dehnt sich um } 4,5 \text{ mm!}$$

### Aufgabe 3

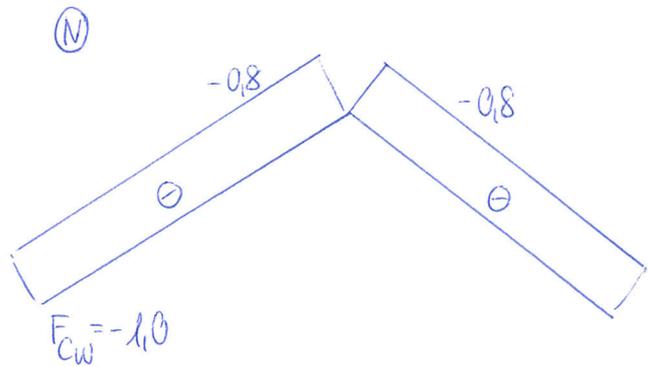
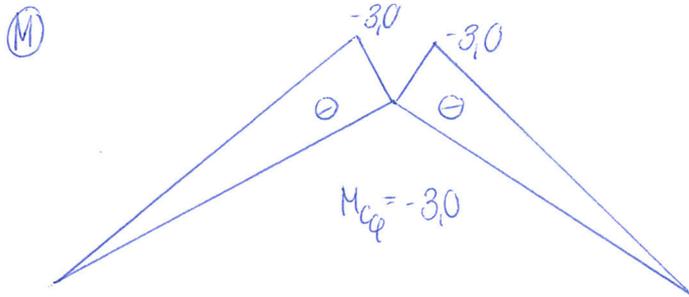
(11 Punkte)

Ermitteln Sie die vertikale Verschiebung  $w$  am Mittelknoten unter der angreifenden Horizontallast  $F$ . Verwenden Sie dazu das **Prinzip der virtuellen Kräfte** (PvK).

$c_\phi = 10.000 \text{ kNm}$   
 $c_w = 20.000 \text{ kNm}$   
 $EI = 2.000 \text{ kNm}^2$   
 $EA = 8.000 \text{ kN}$



# Aufgabe 5

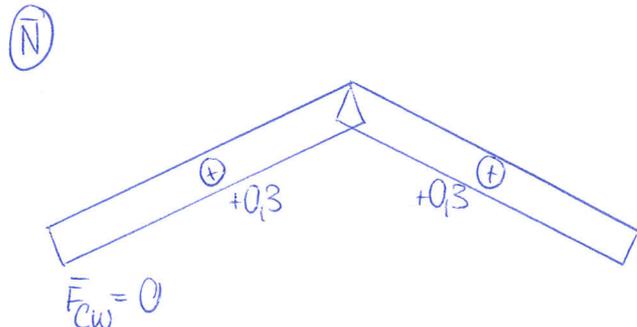
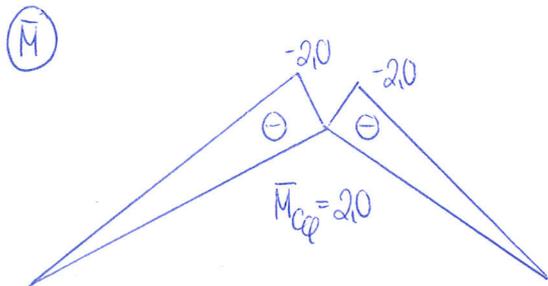
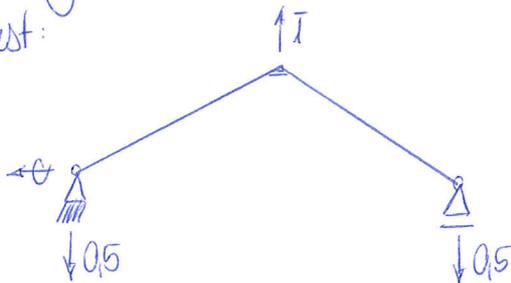


Für die Berechnung der Auflagerreaktionen und der Schnittgrößenverläufe spielt  $c_\phi$  (ebenso  $c_w$ ) keine Rolle (solange die Federsteifigkeit  $> 0$ ), da das System stat. best. ist.

$$\delta \bar{W}_{\text{ext}} = l \cdot w$$

$$- \delta \bar{W}_{\text{int}} = \int \bar{M} \frac{M}{EJ} dx + \int \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \bar{F}_{Cw} \frac{F_{Cw}}{c_w} + \bar{M}_{C\phi} \frac{M_{C\phi}}{c_\phi}$$

Wahl eines beliebigen (aber im GG stehenden) Systems für das Aufbringen der virtuellen Last:



$$- \delta \bar{W}_{\text{int}} = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot \frac{30}{EJ} (5+5) - 1 \cdot 0.3 \cdot \frac{0.8}{EA} (5+5) + 0 \cdot \frac{1.0}{c_w} + 20 \cdot \frac{30}{c_\phi}$$

$$= \left( 20 \frac{2}{3} - 2 \frac{4}{8} + 0 + 6 \frac{1}{10} \right) \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

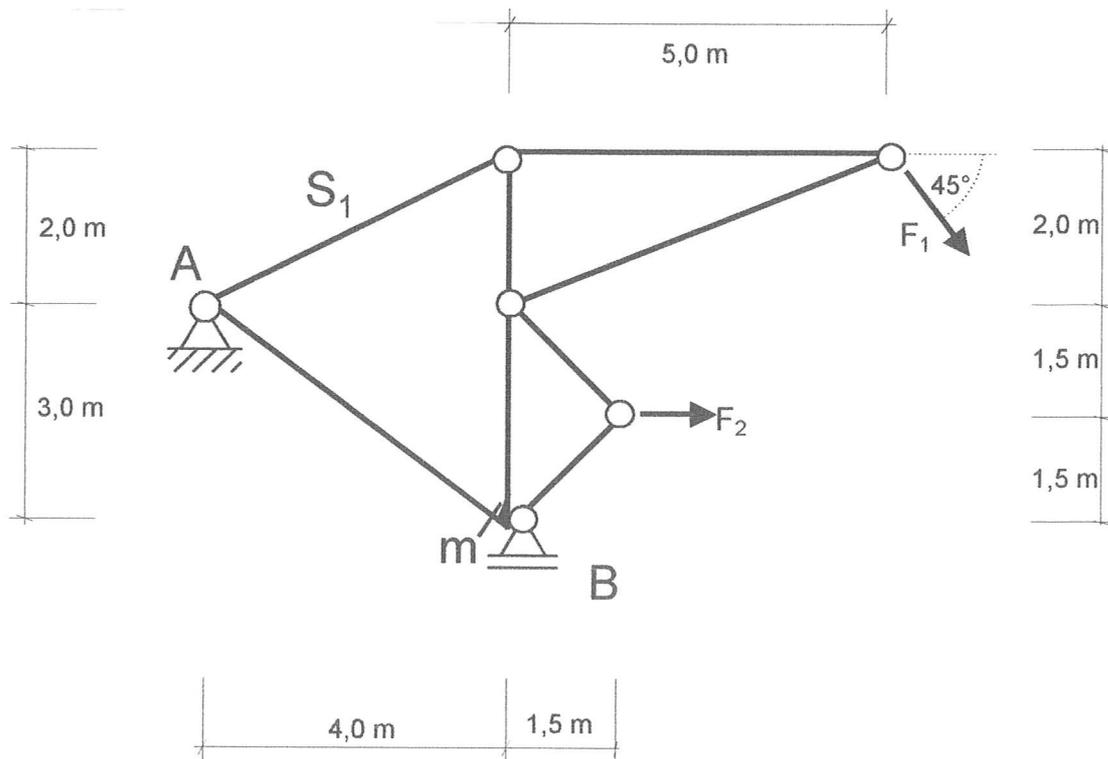
$$\delta \bar{W}_{\text{ext}} + \delta \bar{W}_{\text{int}} = 0$$

$$\Rightarrow l \cdot w = (1.0 - 0.3 + 0.6) \cdot 10^{-3} \Rightarrow w = \underline{10.3 \text{ [mm]}}$$

### Aufgabe 4

(16 Punkte)

Gegeben ist folgendes durch zwei Einzellasten  $F_1$  und  $F_2$  belastete System.

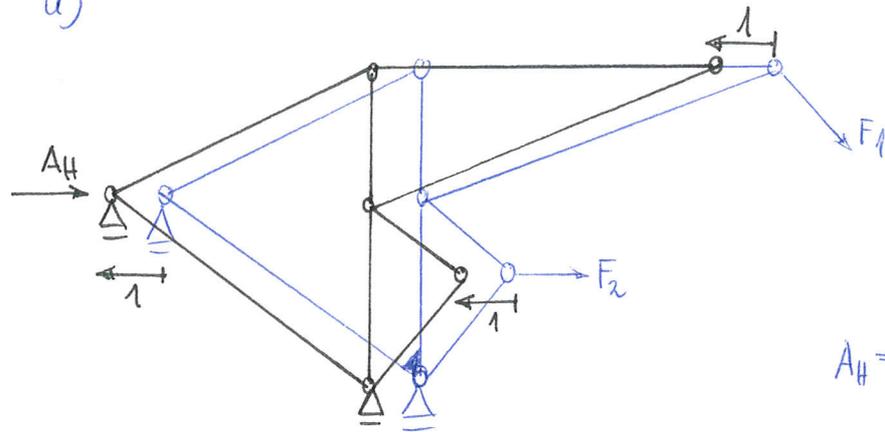


Bestimmen Sie nun mittels **Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV)**:

- Die horizontale Auflagerkraft  $A_H$  im Knoten A.
- Die vertikale Auflagerkraft  $B_V$  im Knoten B.
- Das Moment im Schnitt m.
- Die Normalkraft im Stab  $S_1$ .

# Aufgabe 4

a)

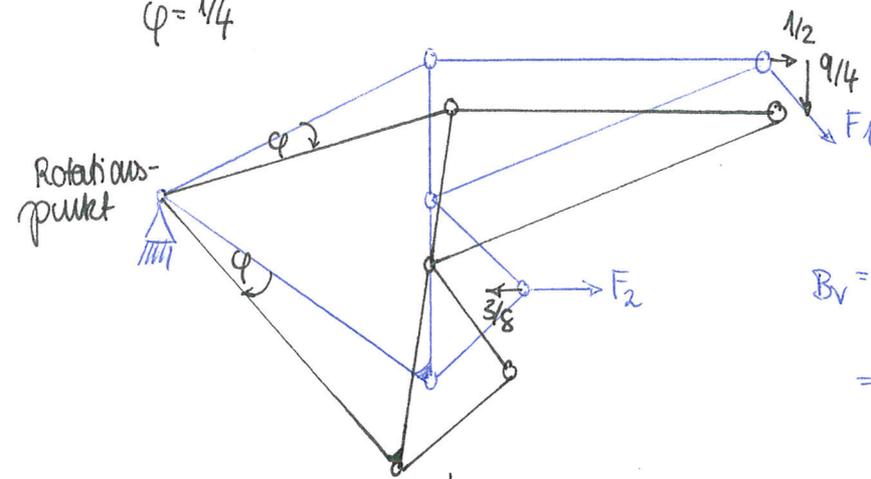


innerlich statisch bestimmt  
 ↳ Parallelverschiebung  
 des Gesamtsystems

$$A_H = -\frac{F_1}{\sqrt{2}} - F_2$$

b)

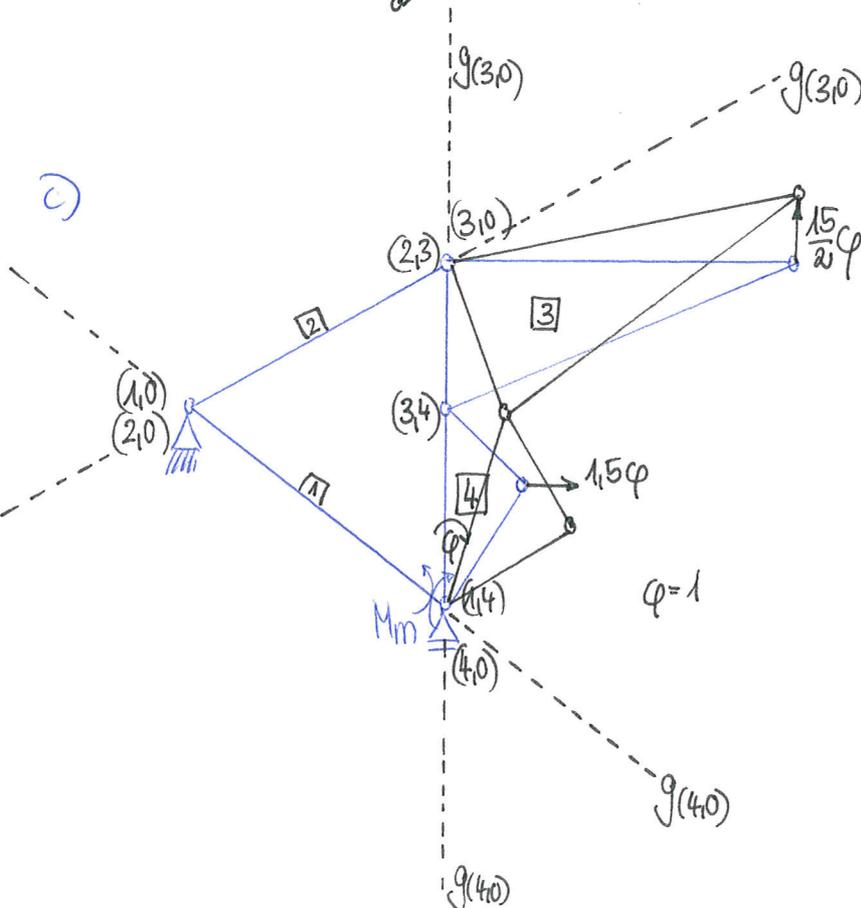
$$\varphi = 1/4$$



$$B_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{2}} + \frac{9}{4} \cdot \frac{F_1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8} F_2$$

$$= \frac{10}{4\sqrt{2}} F_1 - \frac{3}{8} F_2$$

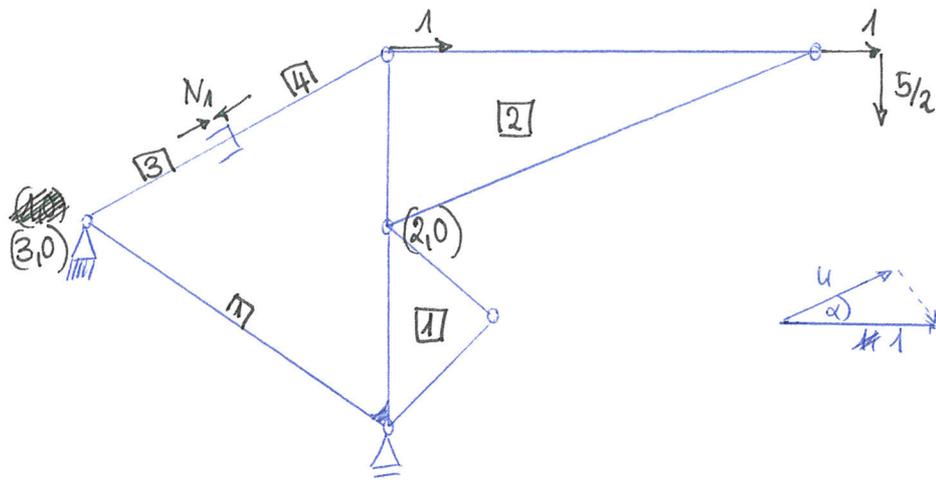
c)



$$M_m: \varphi + F_2 \cdot 15\varphi - \frac{F_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{15}{2}\varphi = 0$$

$$\rightarrow M_m = \frac{15}{2\sqrt{2}} F_1 - 3\frac{1}{2} F_2$$

d)



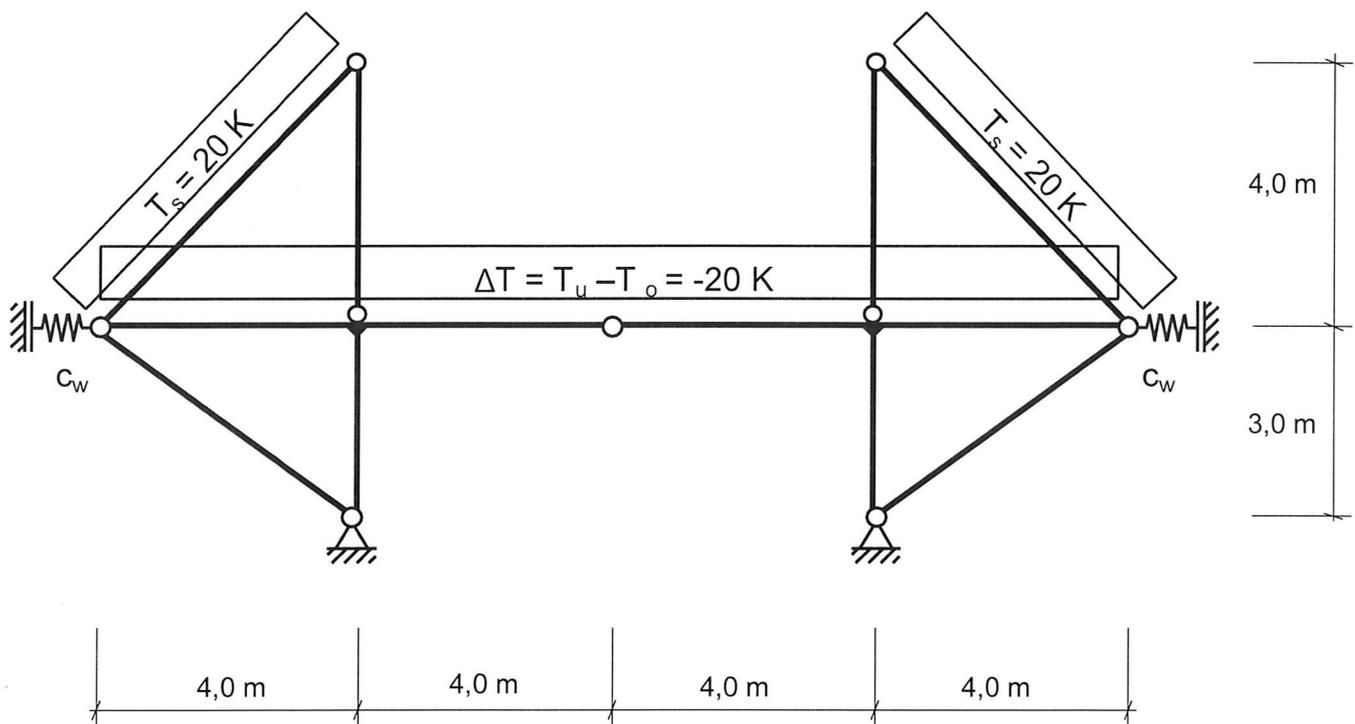
$$u = \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} N_1 = 1 \cdot \frac{F_1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} \frac{F_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_1 = \frac{7\sqrt{10}}{8} F_1$$

### Aufgabe 5

(20 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe des **Kraftgrößenverfahrens** (KV) den Momenten- und Normalkraftverlauf des gesamten Systems infolge der gesamten Temperaturlast ( $T_s$  und  $\Delta T$ ).



#### Alle Stäbe:

$$EI = 10.000 \text{ kNm}^2$$

$$EA = 5.000 \text{ kN}$$

$$\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

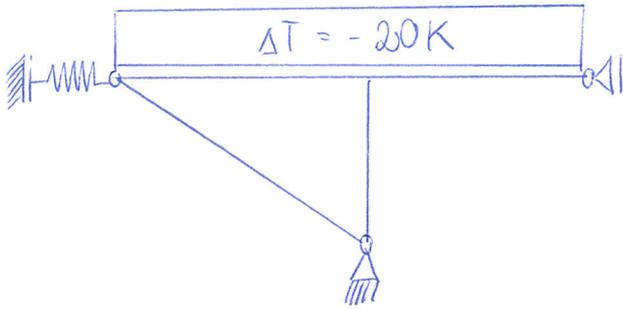
$$h = 0,2 \text{ m}$$

#### Wegfeder:

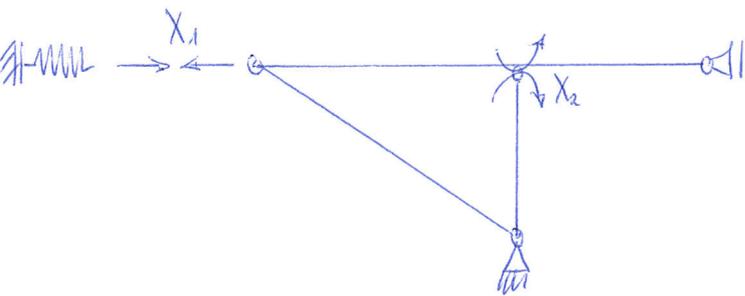
$$c_w = 4.000 \text{ kN/m}$$

# Aufgabe 5

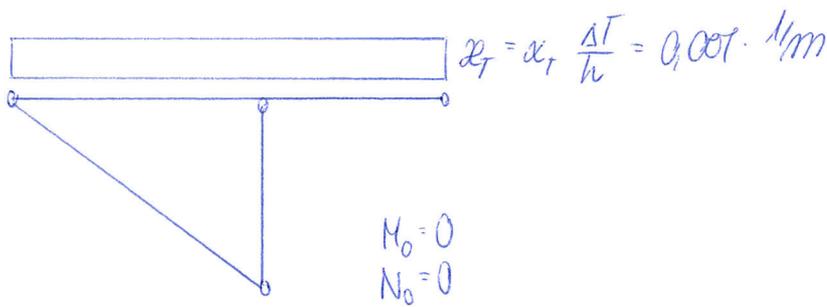
Ersatzsystem unter Ausnutzen der Symmetrie:



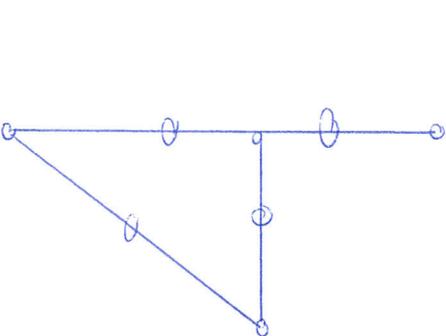
statisch bestimmtes Hauptsystem:



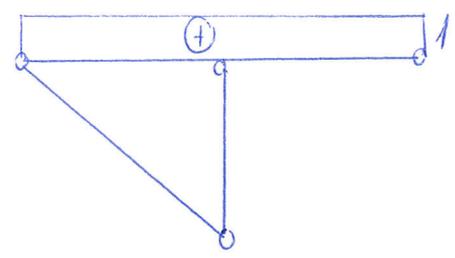
$M_0$   
 $N_0$



$EI$   
 $M_1$   
 $F_w = 10$   
 $X_1 = 1$

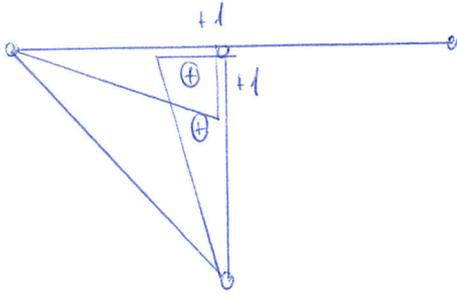


$N_1$

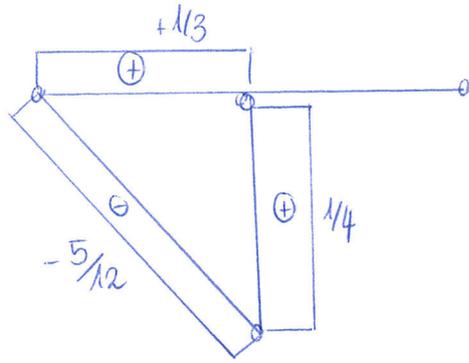


EZ 2

(M<sub>2</sub>)



(N<sub>2</sub>)



δ<sub>ik</sub>-Werte:

$$\delta_{10} = 0$$

$$\delta_{20} = -1/2 \cdot 0,001 \cdot 1 \cdot 4 = -0,002$$

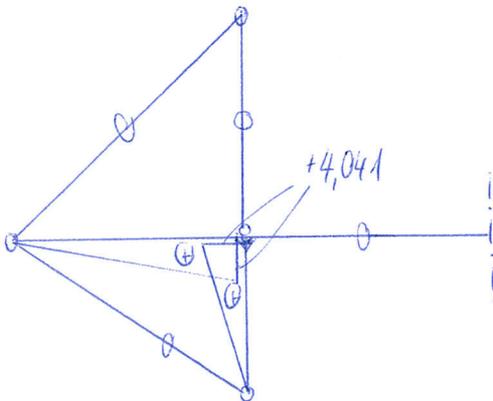
$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot 1}{5000} \cdot 8 + \frac{1 \cdot 1}{4000} = 0,00185$$

$$\delta_{12} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1/3}{5000} \cdot 4 = 0,00026 = \delta_{21}$$

$$\delta_{22} = 1/3 \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot (3+4)}{10000} + \frac{1/3 \cdot 1/3 \cdot 4 + 1/4 \cdot 1/4 \cdot 3 + (-5/12) \cdot (-5/12) \cdot 5}{5000} = 0,00053$$

$$\begin{bmatrix} 0,00185 & 0,00026 \\ 0,00026 & 0,00053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,002 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -0,5825 \text{ kN} \\ x_2 = 4,041 \text{ kNm} \end{matrix}$$

(M)



(N)

